

SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
2 June, 1883.
Math 358.77.2
SCIENCE CENTER LIBRARY



LEHRBUCH

DER

HÖHEREN MATHEMATIK

VON

DR. JOSEF PH. HERR

K. K. MINISTERIALRATH, O. Ö. PROFESSOR DER HÖHEREN GEODÄSIE UND SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE
AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU WIEN.

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE.

ERSTER BAND

DIE ALGEBRAISCHE ANALYSIS UND ANALYTISCHE GEOMETRIE
ENTHALTEND.

MIT 88 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

WIEN

DRUCK UND VERLAG VON L. W. SEIDEL & SOHN

1877.



Vorrede zur ersten Auflage.

Das Lehrbuch über höhere Mathematik, welches ich hiemit der Oeffentlichkeit übergebe, bildete im Manuscripte die Grundlage der Vorlesungen, welche ich in meiner früheren Stellung am st. st. Joanneum zu Gratz über diesen Gegenstand zu halten hatte. Zunächst für den Unterricht an höheren technischen Lehranstalten bestimmt, soll dasselbe — dieses Ziel hatte ich wenigstens bei der Bearbeitung im Auge — einerseits den der Mathematik Beflissenen in das Studium der höheren Theile dieser Wissenschaft auf gründliche Weise einführen, anderseits demjenigen, der vorzugsweise den praktischen Wissenschaften sich widmen will, das hiezu erforderliche Materiale in möglichst genügender Weise darbieten. Wie weit ich mich diesem Ziele genähert habe, muss dem Urtheile der Sachkundigen überlassen bleiben.

Das Lehrbuch zerfällt in drei Theile, welche der algebraischen Analysis, der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume, endlich der Differenzial- und Integralrechnung gewidmet sind, und schliesst sich im Allgemeinen dem in dem Elementarunterrichte gebotenen Lehrstoffe an. Vielleicht hätten sich die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene, weil in den Elementarunterricht hie und da aufgenommen, ausschliessen lassen; bei der Unsicherheit über das Maass der vorauszusetzenden Kenntnisse habe ich jedoch um so weniger Bedenken getragen, auch diesen Abschnitt aufzunehmen, als die weniger einfachen Lehren desselben doch nicht übergangen werden konnten, und daher an Raum nicht bedeutend erspart worden wäre.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass ich in der Darstellung allenthalben der neueren Methoden mich bedient habe, wo dieselben vor älteren einen reellen Vorzug voraus haben und für ein Compendium geeignet schienen. Eben so sind Gründlichkeit und mathematische Strenge Eigenschaften, die man heute auch bei einem Elementar-Lehrbuche nicht mehr vermissen mag, ja bei einem solchen um so weniger, als dadurch — unter Voraussetzung eines fasslichen Vortrages — das Verständniss am besten gefördert und allein nachhaltiger Nutzen gestiftet wird. Wenn bei dem Unterrichte an technischen Lehranstalten die praktische Tendenz nicht aus dem Auge verloren werden darf, so scheint sich diese Rücksicht doch mehr auf die Auswahl des Stoffes beziehen zu sollen, als auf die Art der Behandlung desselben, welche der wissenschaftlichen Form nicht entkleidet werden darf, wenn der Unterricht nicht in ein blosses Abrichten der Schüler ausarten soll.

Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, werden manche Lehren — namentlich der algebraischen Analysis — nicht als zu weitläufig behandelt erscheinen, welche sich sonst, bloss mit Rücksicht auf das praktische Bedürfniss, kürzer hätten erledigen lassen. Ich nenne beispielsweise das zweite Kapitel über die Convergenz der Reihen und das sechste über die Theorie der algebraischen Gleichungen. In letzterem habe ich namentlich die allgemeineren Sätze, so weit die Grenzen des Buches es erlaubten, berücksichtiget, da es kaum eine mathematische Betrachtung gibt, in welche nicht der eine oder andere derselben eingeht; bei der Auflösung der numerischen Gleichungen jedoch glaubte ich vorwiegend dem Bedürfnisse des Praktikers Rechnung tragen zu müssen und habe daher, nebst den nöthigen Hilfsmitteln zur Trennung der Wurzeln in schwierigeren Fällen, nur solche Methoden zur näherungsweisen Berechnung der reellen Wurzeln aufgenommen, welche sich durch einen einfachen Rechnungsmechanismus auszeichnen, nämlich die Newton'sche in ihrer einfachsten Form, die Horner'sche und die Regula falsi. Strenge genommen ist freilich alles, was über die letztere hinausgeht, für den Praktiker von Ueberfluss.

Die analytische Geometrie, sowohl in der Ebene als im Raume, wurde im Allgemeinen mit rechtwinkeligen Coordinaten durchgeführt, da diese in der Praxis fast allein Anwendung finden, und der Nutzen, welchen die Durchführung der Rechnungen mit schiefwinkeligen Coordinaten etwa gewähren mag, mit dem Raume, den dieselbe in

Anspruch nimmt, in zu ungünstigem Verhältnisse steht. Bei der Discussion der allgemeinen Gleichungen der Linien und Flächen zweiter Ordnung bin ich im Wesentlichen Cauchy's schöner Analyse gefolgt. — Uebrigens enthält der zweite Theil die analytische Geometrie nur in so weit, als die Hilfsmittel der Algebra reichen; die allgemeine Theorie der krummen Linien und Flächen, so weit deren Aufnahme angemessen schien, wurde, wie dies üblich ist, in der Differenzial- und Integralrechnung abgehandelt, an welchem Orte sie zugleich das geeignetste Mittel zur Erläuterung der rein analytischen Operationen bildet.

Die Differenzial-Rechnung habe ich auf die Betrachtung der Grenzen gegründet und bin insbesondere bei der Entwickelung des Begriffes des Differenzialquotienten, nach Navier's Vorgange, von der Vorstellung der Geschwindigkeit des Wachsthums einer Funktion ausgegangen, eine Darstellung, welche an und für sich der Natur der Sache angemessen ist und sich durch Anschaulichkeit empfiehlt. — Unter den Hilfsmitteln zur Entwickelung der Funktionen in Reihen glaubte ich das Reversions-Theorem von Lagrange nicht übergehen zu dürfen, da man von demselben in der angewandten Mathematik, insbesondere der Geodäsie und Astronomie häufig Gebrauch zu machen hat. Aus gleichem Grunde habe ich in der Integralrechnung die Fourier'schen Reihen aufgenommen, welche namentlich für die Physik von Wichtigkeit sind und die früheren Sätze über die Entwickelung der Funktionen in Reihen in einem wesentlichen Punkte ergänzen. Die Lehre von den bestimmten Integralen und den Transcendenten der Integralrechnung konnte selbstverständlich nur in beschränktem Maasse Aufnahme finden; das Mitgetheilte dürfte jedoch genügen, um die nächsten Bedürfnisse des angehenden Mathematikers zu befriedigen und ihn zu befähigen, für entfernter liegende, schon einigermaassen orientirt, an ausführlicheren Quellen Belehrung zu suchen. Dieselbe Rücksicht musste mir auch bei der Bearbeitung der Kapitel über die Integration der Differenzial-Gleichungen zur Richtschnur dienen.

Bei der Abfassung des Werkes, welches der Bequemlichkeit des Gebrauches wegen in zwei Bände getheilt wurde und für dessen äussere Ausstattung der Herr Verleger in vorzüglicher Weise gesorgt, habe ich die besten mir zugänglichen Werke und Zeitschriften benutzt. Von älteren Autoren abgesehen, nenne ich vorzugsweise die neueren Schriften von Cauchy, Navier, Grunert, Ettingshausen,

Schlömilch, Moigno, Petzval. — Beispiele habe ich nur so viele gegeben, als zur Erläuterung der theoretischen Sätze nothwendig schienen; zur weiteren Einübung verweise ich den Leser auf die Aufgaben- und Beispielsammlungen von Sohnke, Strauch, Rogner, Schnuse und Magnus.

Wien im August 1857.

J. HERR.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die wohlwollende Aufnahme, welche diesem Lehrbuche in weiteren Kreisen zu Theil wurde, berechtiget wol zu der Annahme, dass es für den Zweck, welchen ich bei der Bearbeitung desselben vor Augen hatte, nicht ungeeignet befunden wurde. Es lag demnach bei Veranstaltung dieser neuen Auflage zur Vornahme einer wesentlicheren Umgestaltung kein Anlass vor, wol aber habe ich das Buch einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen und die Mängel der ersten Auflage theils durch Zusätze, theils durch eine genauere Fassung der Darstellung thunlichst zu beseitigen gesucht. Ich war hiebei bemüht, die schätzenswerthen Bemerkungen der Fachmänner, welche das Buch einer öffentlichen Kritik unterzogen, so wie mehrerer geehrten Collegen so viel als möglich zu berücksichtigen und fühle mich verpflichtet, denselben hiemit meinen Dank auszusprechen.

Auf die Correctur des Druckes wurde die möglichste Sorgfalt verwendet, so wie auch die Verlagshandlung für eine gute Ausstattung des Buches Sorge getragen hat.

Wien im December 1871.

J. HERR.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die gegenwärtige dritte Auflage wurde einer sorgfältigen Revision unterzogen und im zweiten Bande mit einigen Zusätzen bereichert.

Wien im Juli 1877.

J. HERR.

INHALT.

ERSTER THEIL.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

EINLEITUNG.

ERSTES KAPITEL.

Von den unendlich gross und unendlich klein werdenden Grössen und den Grenzwerthen der Funktionen.

ZWEITES KAPITEL.

Von den unendlichen Reihen im Allgemeinen.

DRITTES KAPITEL.

Von den imaginären Grössen und den algebraischen Funktionen mit imaginären Veränderlichen.

VIERTES KAPITEL.

Entwickelung der Funktionen in Reihen.

FÜNFTES KAPITEL.

Von den transcendenten Funktionen mit imaginären Veränderlichen.

SECHSTES KAPITEL.

Theorie der algebraischen Gleichungen.

A. Gleichungen mit einer Unbekannten.

V. Auflösung der allgemeinen Gleichungen des 3ten und 4ten Grades, der reciproken und binomischen Gleichungen.

VI. Auflösung der numerischen Gleichungen.

Näherungsmethoden zur Berechnung der irrationalen Wurzeln.

B. Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten

SIEBENTES KAPITEL.

Ueber die Differenz- und Summenreihen, die arithmetischen Reihen, und über die Interpolation der Reihen.

Von den arithmetischen Reihen.

Von der Interpolation.

ACHTES KAPITEL.

ZWEITER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE.

I. ABSCHNITT.

ANALYTISCHE GEOMETRIE IN DER EBENE.

ERSTES KAPITEL.

Bestimmung der Lage eines Punktes. — Coordinatensysteme. — Transformation der Coordinaten.

ZWEITES KAPITEL.

Von der geraden Linie.

DRITTES KAPITEL.

Vom Kreise.

Verbindung des Kreises mit der Geraden.

Verbindung mehrerer Kreise.

VIERTES KAPITEL.

Ueber die Linien zweiter Ordnung überhaupt, oder über die geometrische Bedeutung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

FÜNFTES KAPITEL.

Ueber einige der vorzüglichsten Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung.

I. Die Ellipse.

II. Die Hyperbel.

III. Die Parabel.

SECHSTES KAPITEL.

Ueber die Polargleichungen der Linien zweiter Ordnung, und über die Bestimmung dieser Curven nach gegebenen Bedingungen.

SIEBENTES KAPITEL.

Ueber einige algebraische Linien höherer Ordnung und über einige transcendente Curven.

II. ABSCHNITT.

ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME.

ERSTES KAPITEL.

Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. — Coordinatensysteme. — Transformation der Coordinaten.

ZWEITES KAPITEL.

Von der Ebene und der geraden Linie.

Die Ebene.

Die gerade Linie.

DRITTES KAPITEL.

Von den krummen Flächen im Allgemeinen; den cylindrischen, conischen, Rotations- und windschiefen Flächen.

VIERTES KAPITEL.

Von den Flächen der zweiten Ordnung.

Verbesserungen.

Seite 101, Z. 10, v. o. statt: $\frac{1}{2}[l(x-1)+l(x+1)$ lies: $\frac{1}{2}[l(x-1)+l(x+1)]$.

„ 152, Z. 15, v. o. st. $(-x-a_3)$ l. $(-x-a_4)$.

„ 174, Z. 3, v. o. st. $A_{m-2}[-(m+r-2]$ l. $A_{m-2}[-(m+r-2)]$.

Math.
& Functions.

ERSTER THEIL.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

EINLEITUNG.

1. Die höhere Mathematik oder Analysis beschäftigt sich mit der Betrachtung aller Formen, in welchen sich die zwischen Zahlengrössen stattfindenden Beziehungen darbieten.

2. So mannigfaltig diese Beziehungen auch sein können, so haben sie doch alle, in so ferne sie Gegenstand der Analysis sind, das mit einander gemein, dass unter den in dieselben eintretenden Grössen solche vorkommen, welche entweder ohne alle Einschränkung oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen jeden beliebigen Werth annehmen können; man nennt solche Grössen veränderliche oder variable, im Gegensatze zu den beständigen oder constanten Grössen, deren Werthe im Laufe der ganzen Untersuchung als unveränderlich angesehen werden. Man pflegt die veränderlichen Grössen gewöhnlich durch die letzten, die constanten durch die ersten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen.

3. Die zwischen veränderlichen und constanten Grössen stattfindenden Beziehungen erscheinen immer in Form von Gleichungen, und man sieht leicht ein, dass eine derartige Gleichung mindestens zwei variable Grössen enthalten muss. Denn setzt man einen beliebigen Ausdruck, z. B. $a + bx$, in welchem x eine veränderliche Grösse bedeutet, $= y$, so ist, da der Werth von $a + bx$ mit x sich ändert, auch y veränderlich. Da jedoch zu jedem speciellen Werthe von x aus der Gleichung $y = ax + b$ ein bestimmter Werth von y sich ergibt, so erscheint y als von x abhängig. Man unterscheidet daher zwischen unabhängig und abhängig veränderlichen Grössen; die ersteren sind jene, denen man jeden beliebigen mit ihrer Natur verträglichen Werth beilegen kann, die letzteren solche, deren Werthe durch jene der unabhängig Veränderlichen bestimmt werden. Die zwischen denselben stattfindende Gleichung drückt das Gesetz der Abhängigkeit aus. — Welche der in einer Untersuchung vorkommenden veränderlichen Grössen als

1 *

die unabhängig, welche als die abhängig Veränderlichen zu nehmen sind, bestimmt sich in jedem besonderen Falle aus der Natur der Aufgabe.

4. Um auszudrücken, dass eine veränderliche Grösse u von einer oder mehreren anderen abhängig sei, sagt man, die erstere sei eine Funktion der letzteren und bezeichnet dies durch eines der Symbole:

$$u = f(x),\quad u = F(x),\quad u = \varphi(x, y),\quad u = \psi(x, y, z) \text{ u. s. w.,}$$

indem man den in Klammern eingeschlossenen und durch Beistriche getrennten unabhängig veränderlichen Grössen einen der Buchstaben $f, F, \varphi, \psi, \ldots$ (als Funktionszeichen) vorsetzt. Dabei bedeuten diese Symbole irgend einen Ausdruck, welcher aus den Veränderlichen x, oder x, y, u. s. w. und constanten Grössen gebildet ist; z. B.:

$$y = f(x) = a + bx^2;\quad z = F(x, y) = ax + b \sin y;$$
$$u = \psi(x, y, z) = a^{x+y}(1 - \log z).$$

5. Unter Form der Funktion versteht man die Art, wie die in der Funktion vorkommenden constanten und variablen Grössen mit einander verknüpft sind. Funktionen, welche sich nur durch die, die Variablen bezeichnenden Buchstaben unterscheiden, z. B.:

$$z = f(x) = x^m(a - bx^2), \text{ und } u = f(y) = y^m(a - by^2)$$

haben einerlei Form, und werden, sobald zwei oder mehrere solche Funktionen in derselben Rechnung vorkommen, mit demselben Funktionszeichen bezeichnet. Man nennt sie ähnliche Funktionen.

Symbole, wie die folgenden:

$$f(x + y),\ f(xy),\ f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ u. dgl.}$$

stellen ebenfalls Funktionen der beiden Veränderlichen x und y vor; es kommt ihnen aber die besondere Form zu, dass die Grössen $x + y$, xy, $\frac{x}{y}$ wie eine einzige Veränderliche in dieselben eingehen; setzt man z. B. z an die Stelle von $x + y$, yx, $\frac{x}{y}, \ldots$ so nehmen dieselben die Form $f(z)$ an und erscheinen sofort als Funktionen der einen Veränderlichen z.

Bei manchen Untersuchungen ist es nöthig, die Anwesenheit constanter Grössen in einer Funktion ersichtlich zu machen; dies geschieht dadurch, dass man dieselben unter das Funktionszeichen in die Klammer aufnimmt; z. B. $y = f(x, a)$.

6. Eine Funktion u einer oder mehrerer Veränderlichen kann entweder entwickelt (gesondert, explicit) oder unentwickelt (ungesondert, implicit) gegeben sein, je nachdem die Gleichung, welche

das Gesetz der Abhängigkeit der Funktion u von den unabhängig Veränderlichen ausdrückt, in Bezug auf u aufgelöst ist, oder nicht. In den obigen Beispielen (§. 4) sind hiernach y, z, u entwickelte Funktionen beziehungsweise von x; x und y; x, y und z. Hingegen ist durch die Gleichung $y^2 - 2ay + x^2 = 0$, y als unentwickelte Funktion von x; durch die Gleichung: $u^3 - (x+y)\sin u + a^x = 0$, u als unentwickelte Funktion von x und y dargestellt. Allgemein werden unentwickelte Funktionen durch Gleichungen von der Form:

$$f(x, y) = 0, \quad F(u, x, y) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0, \text{ etc.}$$

ausgedrückt.

7. Eine Funktion heisst einwerthig, wenn sie für jeden besonderen Werth der Veränderlichen nur einen Werth anzunehmen vermag; im Gegentheile vielwerthig oder vieldeutig und insbesondere zwei-, dreiwerthig u. s. w., wenn jedem speciellen Werthe der unabhängig Veränderlichen zwei, drei, u. s. w. Werthe der Funktion entsprechen. So ist in obigem Beispiele: $y^2 - 2ay + x^2 = 0$, y eine zweiwerthige Funktion von x; denn löst man diese Gleichung für y auf, so erhält man $y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, woraus man sogleich erkennt, dass jedem Werthe von x, zwei Werthe von y: $a + \sqrt{a^2 - x^2}$ und $a - \sqrt{a^2 - x^2}$ entsprechen. Die Funktionen $\arcsin x$, $\arccos x$, etc. sind, wie aus der Trigonometrie bekannt, vieldeutig, da zu jedem Werthe eines Sinus, Cosinus, u. s. w. unendlich viele Bögen gehören.

8. Hat man die zwei Gleichungen $z = f(y)$ und $y = \varphi(x)$, so ist auch $z = f[\varphi(x)]$ und man sagt in diesem Falle, z sei eine Funktion einer Funktion. In gleicher Weise folgt aus

$$z = F(x, y), \; x = \varphi(t), \; y = \psi(t):$$
$$z = F[\varphi(t), \psi(t)] = f(t);$$

z erscheint hier als Funktion der zwei Veränderlichen x und y, welche selbst wieder Funktionen von t sind, so dass auch z eigentlich nur Funktion der einen Veränderlichen t ist.

9. Man theilt die Funktionen in algebraische und transcendente. Algebraische Funktionen heissen jene, in welchen die veränderlichen Grössen nur den (sogenannten algebraischen) Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplication, Division und Potenzirung zu constanten und rationalen Exponenten unterworfen sind; z. B.

$$y = a + bx^2; \quad \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x} - a\sqrt[3]{x^2} + y^2 + b = 0;$$
$$ax^2y^{-1} - b\sqrt{x^3} = 0;$$

alle anderen Funktionen heissen transcendente, unter welchen die Exponentialfunktion $y = a^x$, d. i. die Potenz mit veränderlichem Exponenten, die logarithmische Funktion $y = \log x$, ferner die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, etc., und deren Umkehrungen, die cyklometrischen Funktionen: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arc\,tg}\, x$, etc. für uns vorläufig die wichtigsten sind.

Man erkennt leicht, dass den algebraischen Funktionen, sie mögen was immer für eine Form haben, zuletzt die einfache Funktion $y = x^a$ zu Grunde liegt, wo a eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative, jedoch beständige und rationale Zahl bedeutet. — Nennen wir übrigens einfache Funktionen jene, welche durch eine einzige mit der Variablen vorgenommene Operation zu Stande kommen, so können wir als einfache algebraische Funktionen folgende aufführen:

$$a + x,\ \ a - x,\ \ ax,\ \ \frac{a}{x},\ \ x^a,$$

welche, wie man sieht, sämmtlich in der Form $(A + Bx^m)^n$ enthalten sind, während die oben angeführten Beispiele zusammengesetzte Funktionen darstellen. Analog hiemit haben wir als einfache transcendente Funktionen:

$$a^x,\ \log x,\ \sin x,\ \arcsin x,$$

zu welchen man, ihres häufigen Gebrauches wegen, noch $\cos x$ und $\arccos x$ zählen kann, wiewohl sich diese, so wie alle übrigen trigonometrischen Funktionen bekanntlich durch $\sin x$, die cyklometrischen durch $\arcsin x$ ausdrücken lassen.

Die Entwickelung der Eigenschaften der verschiedenen Funktionen und ihrer Beziehungen zu einander bildet den wesentlichen Inhalt der Analysis, daher auch diese häufig die Lehre von den Funktionen genannt wird.

10. Die algebraischen Funktionen werden in rationale und irrationale, ganze und gebrochene Funktionen unterschieden.

Unter einer rationalen Funktion versteht man jene, in welcher, nachdem sie möglichst reducirt worden ist, die veränderlichen Grössen unter keinem Wurzelzeichen oder, was dasselbe ist, mit keinem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommen; im Gegentheile heisst die Funktion irrational. So sind von den Funktionen:

$$y = (a + bx^2)^n,\ \ z = \frac{cxy}{x\sqrt{a} + y\sqrt{b}},\ \ y = x + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$u = \frac{x\sqrt{a} + y}{\sqrt{y}},$$

die beiden ersten rationale, die zwei letzten irrationale Funktionen.

Unter ganzen Funktionen versteht man solche, welche die veränderlichen Grössen in keinem Nenner oder, was dasselbe ist, mit keinem negativen Exponenten behaftet enthalten; ist dies hingegen der Fall, so heisst die Funktion gebrochen. Von obigen vier Funktionen sind die erste und dritte ganze, die zweite und vierte gebrochene Funktionen.

Die allgemeine Form einer ganzen rationalen algebraischen Funktion einer veränderlichen Grösse ist:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + Mx^m,$$

wo $A, B, C, \ldots. M$ constante von x unabhängige Coefficienten sind. Der Exponent der höchsten in der Funktion vorkommenden Potenz von x bestimmt den Grad der Funktion. Obige Funktion ist also vom $m$ten Grad. Die Funktion des ersten Grades $y = A + Bx$ nennt man auch häufig (aus geometrischen Gründen) lineare Funktion.

Die allgemeine Form einer gebrochenen rationalen Funktion ist:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Px^m}{a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + qx^n};$$

sie heisst echt gebrochen, wenn der Nenner von höherem Grade ist, als der Zähler, im Gegentheile unecht gebrochen.

11. Unter Dimension eines Ausdruckes, welcher aus constanten und variablen Faktoren besteht, versteht man die Summe der Exponenten der veränderlichen Faktoren. So sind die Ausdrücke ax^3, $abxy^2z$, $ax^{\frac{1}{3}}y$ beziehungsweise von den Dimensionen 3, 4, $\frac{4}{3}$. Hieraus erhellt, dass nach dem Begriffe eines Quotienten und einer Wurzelgrösse die Dimension eines Bruches gefunden wird, wenn man von der Dimensionszahl des Zählers jene des Nenners abzieht; jene einer Wurzelgrösse hingegen, wenn man die Dimensionszahl des Ausdruckes unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividirt. Der Ausdruck $\frac{axy^2}{z}$ ist hiernach von der 2ten, $\sqrt{ax^3y^3}$ von der dritten Dimension.

Dies vorausgesetzt, heisst eine Funktion zweier oder mehrerer Veränderlichen homogen, wenn alle Glieder derselben von gleicher Dimension sind; im entgegengesetzten Falle wird sie heterogen genannt. Die Dimensionszahl eines Gliedes bestimmt den Grad oder die Ordnung der homogenen Funktion. So sind:

$$z = x^2 + axy + y^2; \quad u = x + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$u = \frac{ax^3 + by^2\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{x + y + z}}$$

.omogene Funktionen beziehungsweise vom 2ten, 1ten und $\frac{5}{2}^{\text{ten}}$ Grade.

Diese Eigenschaft der Homogeneität lässt sich leicht auf einen analytischen Ausdruck bringen. Die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ ist nämlich homogen und vom n^{ten} Grade, wenn sie für jeden Werth von t der Bedingung:

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n \cdot f(x, y, z, \ldots)$$

genügt, wo t eine neue von den andern unabhängige Veränderliche ist. Wie man leicht sieht, ist die frühere Definition in dieser allgemeineren eingeschlossen. Nach letzterer erkennt man z. B., dass die Funktion $f(x, y) = \log x - \log y$ homogen vom 0ten Grade ist; denn setzt man tx, ty an die Stelle von x und y, so erhält man $f(tx, ty) = \log tx - \log ty = \log x - \log y = f(x, y) = t^0 f(x, y)$.

Periodische Funktionen werden solche genannt, welche in regelmässiger Wiederkehr immer dieselbe Reihe von Werthen durchlaufen, wenn die unabhängig Veränderliche fort und fort zunimmt, so dass allen Werthen der letzteren, welche um gleiche Intervalle von einander entfernt sind, gleiche Funktionswerthe entsprechen. Die trigonometrischen Funktionen gehören in diese Klasse; denn es ist z. B. bekanntlich

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \ldots \text{ u. s. w.*)}$$

12. Eine Funktion zweier oder mehrerer Veränderlichen heisst symmetrisch, wenn dieselbe bei beliebigen Vertauschungen der Veränderlichen unter einander keine Aenderung ihres Werthes erleidet. Z. B.

$$u = x^2 + xy + y^2; \quad u = 2xy + 2xz + 2yz;$$
$$u = x^y + y^x; \quad u = \cos x \cos y - (\sin x^2 + \sin y^2).$$

Bemerkenswerth sind insbesondere die algebraischen rationalen symmetrischen Funktionen, in Bezug auf deren Bau sich aus obigem Begriffe folgende Eigenthümlichkeiten ergeben.

1) Besteht die Funktion nur aus einem Gliede, so müssen sämmtliche Faktoren (Elemente), von einem etwa anhaftenden Coefficienten abgesehen, gleiche Exponenten haben. Z. B. $u = Ax^2y^2z^2$.

2) Besteht die symmetrische Funktion, wie gewöhnlich, aus mehreren Gliedern und ist V eines derselben, welches durch eine beliebige

*) Mit dem Buchstaben π werden wir ausschliesslich, wie dies gewöhnlich geschieht, das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser bezeichnen. Für den Halbmesser $= 1$ drückt daher $\pi = 3{,}14159265\ldots$ die Länge der halben Kreisperipherie aus, welche dem Winkel $= 180^0$ entspricht. Eben so bezeichnet $\frac{\pi}{2}$ den dem Winkel $= 90^0$ entsprechenden Bogen, 2π die ganze Peripherie $= 360^0$, u. s. w.

Vertauschung der darin vorkommenden Elemente in W übergeht, so muss das Glied W auch unter den Gliedern der symmetrischen Funktion vorkommen.

3) Alle Glieder einer s. Funktion müssen daher gleichviel Elemente enthalten, und diese in allen Gliedern mit denselben Exponenten behaftet sein.

4) Hieraus folgt sogleich, dass jede s. Funktion gegebener Elemente durch irgend eines ihrer Glieder, und jedes Glied — daher auch die ganze Funktion — durch die Exponenten der Elemente bestimmt ist. Hierauf gründet sich eine einfache Bezeichnung der symmetrischen Funktionen, wenn die Elemente bekannt sind; man schreibt nämlich bloss die Exponenten eines Gliedes, durch Beistriche getrennt, in eine eckige Klammer, wie folgende Beispiele zeigen, welche s. Funktionen der drei Grössen a, b, c darstellen.

$$[1] = a + b + c;\ [2] = a^2 + b^2 + c^2;\ [n] = a^n + b^n + c^n;$$
$$[1, 1] = ab + ac + bc;\ [2, 1] = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2;$$
$$[1, 1, 1] = abc;\ [2, 1, 1] = a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

Aus der Anzahl der Exponenten in der Klammer erkennt man die Anzahl der Grössen, welche in jedes Glied eintreten, und es erübrigt nur noch anzugeben, wie die verschiedenen Glieder gebildet werden.

Es seien $a, b, c, d, \ldots . . k, l$ die n Grössen, aus welchen die symmetrische Funktion $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_r]$ erzeugt werden soll, wo α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_r$ die Exponenten, r an der Zahl, bedeuten, welche in jedem Gliede vorkommen. Man bilde zuvörderst alle Combinationen der r^{ten} Classe ohne Wiederholung aus den n Elementen $a, b, c, \ldots k, l$; sodann alle Permutationen der r Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, und verbinde endlich jede dieser Complexionen in der Form von Exponenten mit jeder einzelnen Combination der Elemente.

Z. B. Aus den Grössen a, b, c, d die s. Funktion [3, 2, 1] zu bilden. Man findet:

Combinationen der 3ten Classe der Grössen a, b, c, d.	Permutationen der Exponenten 1, 2, 3.	
a, b, c	1, 2, 3	3, 1, 2
a, b, d	1, 3, 2	3, 2, 1
a, c, d	2, 1, 3	
b, c, d	2, 3, 1	

somit ist

$$[3, 2, 1] = ab^2c^3 + ab^3c^2 + a^2bc^3 + a^2b^3c + a^3bc^2 + a^3b^2c + ab^2d^3 + ab^3d^2 + a^2bd^3 + a^2b^3d + a^3bd^2 + a^3b^2d + ac^2d^3 + ac^3d^2 + a^2cd^3 + a^2c^3d + a^3cd^2 + a^3c^2d + bc^2d^3 + bc^3d^2 + b^2cd^3 + b^2c^3d + b^3cd^2 + b^3c^2d.$$

Wie leicht einzusehen, ist die Anzahl N aller Glieder gleich der Anzahl der Combinationen, multiplicirt mit der Anzahl der Permutationen; also für n Elemente und r Exponenten:

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}.1.2.3.4\ldots r$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1),$$

vorausgesetzt, dass die Exponenten alle verschieden sind. Befinden sich aber unter denselben mehrere Gruppen von $p, q, s, \ldots$ gleichen Zahlen, so ist bekanntlich die Anzahl aller Permutationen

$$= \frac{1.2.3.4\ldots\ldots r}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots s},$$

somit

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots s}.$$

Die Summe der Exponenten in einem Gliede bestimmt den **Grad** oder die **Ordnung** der s. Funktion. In die Klammer pflegt man die Exponenten vom grössten angefangen der Ordnung nach zu schreiben, und sagt, diejenige s. Funktion sei von einer höheren **Klasse**, welche in der Klammer einen grösseren Exponenten hat. So ist [3] von höherer Klasse als [2, 1], diese von höherer als [1, 1, 1].

Eine s. Funktion heisst zusammengesetzt, wenn sie aus mehreren Theilen besteht, die für sich symmetrisch sind. Besteht die s. Funktion aus mehreren rationalen Brüchen, so lässt sie sich, indem man dieselben auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, in einen einzigen Bruch zusammenziehen, dessen Zähler und Nenner, für sich allein betrachtet, ganze rationale s. Funktionen sind.

13. Die unabhängig veränderliche Grösse x einer Funktion $y = f(x)$ wird immer als **stetig** (continuirlich) veränderlich gedacht, d. h. so, dass dieselbe von irgend einem Werthe $x = x_0$ zu einem anderen $x = x_1$ nicht übergehen kann, ohne alle zwischen liegenden Werthe zu durchlaufen. Diese Eigenschaft der Stetigkeit liegt schon im Begriffe der unabhängig veränderlichen Grösse, als einer solchen, welche entweder ohne alle Einschränkung oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen x_0, x_1 jeden beliebigen Werth annehmen kann. Bezeichnen wir nun mit y_0 und y_1 jene Werthe der Funktion $y = f(x)$, welche den Werthen x_0 und x_1 der unabhängig Veränderlichen x entsprechen, so heisst die Funktion $y = f(x)$ innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 stetig, wenn sie, während x von x_0 in x_1 also auch y von y_0 in y_1 übergeht, bei diesem Uebergange alle zwischen y_0 und y_1 liegenden Werthe durchläuft. Die

Lehren des folgenden Kapitels werden uns ein einfaches Mittel darbieten, den Begriff der Stetigkeit der Funktion analytisch auszudrücken.

14. Um sich von dem Verlaufe einer Funktion $y = f(x)$ d. i. von der allmäligen Aenderung der Werthe, welche die Funktion y annimmt, wenn x andere und andere Werthe erhält, eine deutliche Vorstellung zu machen, könnte man zu beliebig gewählten Werthen von x:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots .$$

die zugehörigen Werthe von y:

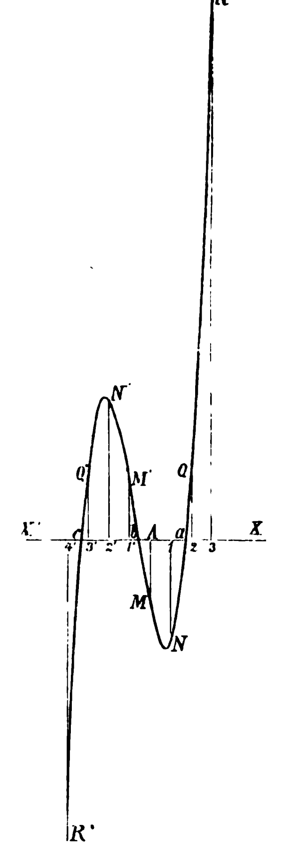
$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots .$$

aus der Gleichung

$$y = f(x) \ldots . (\alpha)$$

berechnen; wählt man dabei die Werthe von x in gleichen Abständen, so wird man aus der Uebersicht der Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots .$ eine genügende Vorstellung über den Verlauf der Funktion sich bilden können.

(Fig. 1.)



Ein viel anschaulicheres und zugleich der Natur der Sache höchst angemessenes Mittel zu diesem Zwecke bietet uns jedoch die Geometrie durch die Construction dieser Funktionswerthe dar.

Man betrachte die Zahlenwerthe von x und y als Längen gerader Linien, ziehe eine Gerade von unbestimmter Länge, XX' (Fig. 1) als Axe (die Abscissenaxe), wähle in derselben einen festen Punkt A, den Anfangspunkt, und trage hierauf nach irgend einem beliebigen Maassstabe die Werthe von x auf der Axe XX' von A aus auf, die positiven etwa in der Richtung AX, die negativen in der Richtung AX'; in den Endpunkten dieser Strecken, welche A b s c i s s e n genannt werden, errichte man Perpendikel, auf welchen sofort die zugehörigen Werthe von y, die O r d i n a t e n $y_1, y_2, y_3, \ldots$ aufgetragen werden, und zwar die positiven etwa oberhalb, die negativen unterhalb der Axe XX'. Man erhält hiedurch in der Ebene der Zeichnung eine Reihe von Punkten, deren jeder durch ein Paar zusammengehöriger Werthe von x und y bestimmt wird, welche nach einem durch die Gleichung (α)

ausgesprochenen Gesetze auf einander folgen und, durch einen continuirlichen Zug verbunden, irgend eine gerade oder krumme Linie erzeugen, welche das geometrische Bild der Funktion $f(x)$ ist, und mit einem Blicke den Lauf der Funktion übersehen lässt. Auf diese Art ist in Fig. (1) die Funktion

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3$$

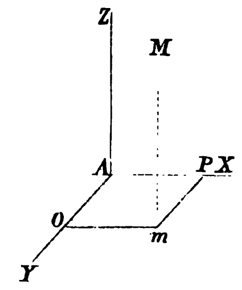
construirt, welche für

$x = 0$	$y = -\ 3 = AM$
$x = 1 = A1$	$y = -\ 5 = 1N$
$x = 2 = A2$	$y = +\ 3 = 2Q$
$x = 3 = A3$	$y = +\ 27 = 3R$
u. s. w.	u. s. w.
$x = -1 = A1'$	$y = +\ 3 = 1'M'$
$x = -2 = A2'$	$y = +\ 7 = 2'N'$
$x = -3 = A3'$	$y = +\ 3 = 3'Q'$
$x = -4 = A4'$	$y = -\ 15 = 4'R'$
u. s. w.	u. s. w.

gibt. Auf diese Art lässt sich jede Funktion einer Veränderlichen in einer Ebene construiren. Die algebraische Funktion des ersten Grades $y = ax + b$ erzeugt eine gerade Linie, wodurch sich der Name „lineare Funktion" erklärt; alle anderen Funktionen erzeugen im allgemeinen krumme Linien.

Auch Funktionen zweier Variablen, $z = f(x, y)$ lassen sich noch geometrisch darstellen; da jedoch hier drei Veränderliche zu construiren sind, so reicht hiezu die Ebene, welche nur zwei Dimensionen hat, nicht aus, sondern die Construction muss im Raume vorgenommen werden. Denken wir uns (Fig. 2) drei auf einander senkrechte Ebenen, XAY, XAZ, YAZ, welche sich in den aufeinander senkrechten Geraden (den Axen) AX, AY, AZ und in dem gemeinschaftlichen Punkte A, dem Anfangspunkte schneiden. Trägt man nun nach einem beliebigen Maassstabe zwei willkürliche Werthe von x und y, z. B. $x = a = AP$, $y = b = AQ$ auf den Axen AX und AY auf, zieht in der Ebene XAY Pm, Qm beziehungsweise zu AY und AX parallel, so bestimmt sich dadurch ein Punkt m in der genannten Ebene; in diesem Punkte errichte man eine Senkrechte auf die Ebene XAY, und trage auf derselben den den Werthen $x = a$, $y = b$ entsprechenden Werth von $z = c$, nämlich $c = f(a, b) = mM$

(Fig 2.)



auf, so ist M ein durch die Funktion $z = f(x, y)$ bestimmter Punkt im Raume. Wählt man nun für x und y andere und andere Werthe, so erhält man offenbar eine Folge von Punkten im Raume, welche eine gewisse Fläche bilden werden, deren Gestalt von der Form der Funktion $z = f(x, y)$ abhängt.

Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen lassen sich nicht mehr construiren, da der Raum nur drei Dimensionen hat.

ERSTES KAPITEL.

VON DEN UNENDLICH GROSS UND UNENDLICH KLEIN WERDENDEN GRÖSSEN UND DEN GRENZWERTHEN DER FUNKTIONEN.

15. Da eine veränderliche Grösse im Allgemeinen jedes beliebigen Werthes fähig ist, so kann man sich den Zahlenwerth derselben fort und fort wachsend vorstellen, so dass er endlich grösser wird als jede denkbare noch so grosse Zahl; man sagt in diesem Falle, die Grösse wachse unendlich oder sie werde unendlich gross. Eben so kann man sich vorstellen, dass der Zahlenwerth einer variablen Grösse fort und fort abnehme, so dass er endlich kleiner wird, als jede beliebige noch so kleine Zahl; die Grösse heisst in diesem Zustande eine unendlich abnehmende oder unendlich klein werdende Grösse. Der Kürze wegen nennt man gewöhnlich Grössen, welche im Zustande des unendlichen Wachsens oder Abnehmens begriffen sind, schlechthin unendlich grosse und unendlich kleine Grössen.

16. Diese Erklärungen führen unmittelbar zu folgenden Sätzen:

a) Die Summe mehrerer mit demselben Zeichen behafteten unendlich wachsenden Grössen wird selbst unendlich gross; die Summe zweier mit entgegengesetzten Zeichen behafteten unendlich wachsenden Grössen hingegen kann unendlich gross werden, constant bleiben, ja selbst unendlich abnehmen.

b) Die Summe einer endlichen constanten und einer unendlich wachsenden Grösse wird unendlich gross. Daraus folgt, dass eine unendliche, d. h. im Zustande des unendlichen Wachsens begriffene Grösse durch Addition oder Subtraktion einer endlichen weder vermehrt noch vermindert wird und daher in der Summe $w \pm a$ die constante endliche Grösse a gegen die unendlich wachsende w verschwindet.

c) Die Summe einer endlichen Anzahl gleich oder entgegengesetzt bezeichneter unendlich abnehmenden Grössen wird unendlich klein.

d) Das Produkt mehrerer unendlich werdenden Grössen oder einer solchen mit einer constanten Grösse wird unendlich gross; das Produkt unendlich kleiner Grössen, oder solcher mit constanten Grössen nimmt unendlich ab.

e) Da der Werth eines Bruches mit constantem Zähler immer grösser oder kleiner wird, wenn der Nenner fortwährend ab- oder zunimmt, so wird ein solcher Bruch unendlich klein oder gross, je nachdem der Nenner unendlich zu- oder abnimmt.

f) Eine Potenz mit constantem positiven Exponenten wird unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem die Wurzel unendlich gross oder unendlich klein wird; das Gegentheil findet statt, wenn der Exponent negativ ist, da $w^{-n} = \frac{1}{w^n}$.

g) Ist a^w eine Potenz mit constanter Wurzel und veränderlichem Exponenten, und $a > 1$, so wird die Potenz unendlich gross, wenn w positiv ist und unendlich zunimmt; ist hingegen der Exponent negativ, so wird $a^{-w} = \frac{1}{a^w}$ bei unendlich wachsendem w unendlich klein. Ist $a < 1$, so setze man $a = \frac{1}{b}$, wo nun $b > 1$ sein wird; hiemit wird $a^w = \frac{1}{b^w}$, welcher Ausdruck mit unendlich wachsendem w unendlich klein oder gross wird, je nachdem w positiv oder negativ ist.

h) Die Verhältnisse $w^2 : w$, $w^3 : w^2$, u. s. w. ändern sich offenbar nicht und bleiben immer gleich dem Verhältnisse $w : 1$, wie gross man auch w annehmen mag; wird daher diese Grösse gegen die Einheit unendlich gross, so muss auch w^2 im Vergleiche zu w, eben so w^3 im Vergleiche zu w^2, u. s. w. unendlich gross werden. Man nennt w^2, w^3,... unendliche Grössen der 2ten, 3ten, ... Ordnung mit Bezug auf w, als eine unendlich wachsende Grösse der 1ten Ordnung. Ist umgekehrt w eine unendlich abnehmende Grösse, so wird w^2 gegen w, w^3 gegen w^2, u. s. w. unendlich klein, da die Verhältnisse $w^2 : w$, $w^3 : w^2$, u. s. w. auch bei dem unendlichen Abnehmen von w dem Verhältnisse $w : 1$ stets gleich bleiben. Man nennt w^2, w^3, ... unendlich kleine Grössen der 2ten, 3ten, ... Ordnung, wenn man w als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung betrachtet. Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung verschwindet gegen eine unendlich kleine Grösse niedrigerer Ordnung; das umgekehrte findet bei unendlich wachsenden Grössen statt.

i) Ist

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Px + Q$$

eine ganze rationale Funktion von x, in welcher die Coefficienten A, B, C, ... P, Q von x unabhängig sind, so wird nach obigen Sätzen

$f(x)$ beim unendlichen Wachsen von x selbst unendlich gross. Man kann für x immer einen hinreichend grossen **endlichen** Werth angeben, welcher das erste Glied Ax^m numerisch grösser als die Summe aller folgenden, und somit das Zeichen des ganzen Ausdruckes von jenem des ersten Gliedes abhängig macht.

Denn es sei, ohne Rücksicht auf das Zeichen, G der numerisch grösste der Coefficienten $A, B, \ldots Q$, so geschieht der Forderung:

$$Ax^m > Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots . + Px + Q$$

offenbar Genüge, wenn wir

$$Ax^m \gtreqless Gx^{m-1} + Gx^{m-2} + \ldots + Gx + G,$$

d. i. $$Ax^m \gtreqless G(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1),$$

oder, da bekanntlich

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \text{ ist,}$$

$$Ax^m \gtreqless G\frac{x^m - 1}{x - 1}$$

setzen. Um so mehr wird dies der Fall sein, wenn wir

$$Ax^m \gtreqless \frac{Gx^m}{x - 1} \text{ d. i. } x \gtreqless \frac{G}{A} + 1$$

nehmen. Hiemit ist jedoch nicht behauptet, dass das erste Glied Ax^m in besonderen Fällen nicht auch schon für kleinere Werthe von x, als der eben ausgemittelte $\frac{G}{A} + 1$, grösser werden könne, als die Summe aller folgenden, was namentlich dann der Fall sein wird, wenn unter diesen Gliedern sich negative befinden.

k) Eben so folgt aus den früheren Sätzen, dass eine ganze rationale Funktion von der Form:

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + \ldots . + Px^{m+r}$$

beim unendlichen Abnehmen von x unendlich klein wird. Auch kann man immer für x einen so kleinen Werth angeben, welcher das erste Glied dieser Funktion oder irgend ein beliebiges grösser macht als die Summe aller folgenden. Denn die Forderung:

$$Ax^m > Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + \ldots . + Px^{m+r}$$

wird gewiss erfüllt, wenn wir x so wählen, dass:

$$Ax^m \gtreqless Gx^{m+1} + Gx^{m+2} + \ldots . + Gx^{m+r},$$

d. i. $$Ax^m \gtreqless Gx^{m+1}(1 + x + x^2 + \ldots . + x^{r-1}),$$

oder $$A \gtreqless Gx . \frac{1 - x^r}{1 - x}$$

werde, wo wieder G der numerisch grösste der Coefficienten B, C, ... P ist. Dieser Bedingung wird aber um so mehr ein Genüge geschehen, wenn wir setzen:

$$A \overline{>} \frac{Gx}{1-x} \text{ d. i. } x \overline{<} \frac{A}{A+G}.$$

Man kann daher in einem Ausdrucke obiger Form, welcher nach den steigenden Potenzen von x fortschreitet, x immer so klein wählen, dass das Zeichen der Summe aller Glieder mit dem Zeichen des ersten Gliedes übereinstimmt.

17. Bisher haben wir solche Funktionen betrachtet, welche bei der unendlichen Zu- oder Abnahme der variablen Grösse selbst unendlich gross oder klein werden, oder umgekehrt. Dies findet aber keineswegs immer Statt. Eine Funktion $y = f(x)$ kann bei unendlich gross oder klein werdendem x fort und fort wachsen oder abnehmen, ohne jedoch selbst unendlich gross oder klein zu werden, indem sie sich nämlich einer bestimmten Grenze mehr und mehr nähert, je grösser oder kleiner x wird. Ist z. B. $y = a \pm \frac{1}{x}$ und x eine unendlich wachsende Grösse, so wird offenbar $\frac{1}{x}$ immer kleiner und kleiner und der Werth von y nähert sich immer mehr und mehr der constanten Grösse a, ohne sie doch je zu erreichen. Man nennt daher die Grösse a die Grenze, welcher sich die Funktion $a \pm \frac{1}{x}$ für unendlich wachsende x ohne Ende nähert. Um eine solche Beziehung zu bezeichnen, bedient man sich des Zeichens: lim (von limes, die Grenze) und schreibt:

$$\lim \left(a \pm \frac{1}{x}\right) = a \text{ (für wachsende } x\text{)}.$$

Eine unendlich abnehmende Grösse hat offenbar die Null zur Grenze. Für eine unendlich wachsende Grösse hingegen gibt es keine Grenze, und es geschieht nur der Kürze und Bequemlichkeit des Ausdruckes wegen, wenn man auch für unendlich wachsende Grössen eine Grenze fingirt, welche durch das Zeichen ∞ vorgestellt, und geradezu eine unendlich grosse Grösse genannt wird. Ist also z. B. x eine unendlich abnehmende Grösse, so schreibt man

$$\lim \frac{1}{x} = \infty,$$

d. h. wollte man die Grenze suchen, der sich die Funktion $\frac{1}{x}$ für

unendlich abnehmende Werthe von x nähert, so müsste man über jede noch so grosse angebbare Zahl hinausgehen. Hieraus folgt, dass mit dem Zeichen ∞ nicht ein bestimmter, wenn auch noch so grosser Werth bezeichnet wird, und daher mit demselben nicht nach den Regeln der Arithmetik, wie mit einer Zahl, gerechnet werden kann.

Beispiele von Grenzwerthen finden sich schon in den Elementen. So ist der Bruch $\frac{1}{3}$ als die Grenze zu betrachten, welcher sich der Decimalbruch 0,333 ...., oder die Summe der Glieder

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \dots$$

mehr und mehr nähert, je grösser man die Anzahl der Decimalstellen oder der Glieder der Summe nimmt. Eben so ist die Peripherie eines Kreises die Grenze, welcher sich die Perimeter der um- und eingeschriebenen regulären Polygone bei unendlich wachsender Seitenanzahl unendlich nähern; u. s. w.

Die Aufgabe, die Grenze anzugeben, welcher sich eine Funktion bei der unendlichen Zu- oder Abnahme der Variablen nähert, bietet sich in der Analysis häufig dar, daher wir im Folgenden die wichtigsten hieher gehörigen allgemeinen Sätze anführen.

18. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen von x, welche sich bei unendlich abnehmendem x beziehungsweise den Grenzen a und b nähern, so dass

$$\lim \varphi(x) = a, \ \lim \psi(x) = b \tag{1}$$

ist. Bezeichnet man nun mit α und β zwei mit x gleichzeitig verschwindende Grössen, so kann man

$$\varphi(x) = a + \alpha, \ \psi(x) = b + \beta \tag{2}$$

setzen, welche Gleichungen bei dem Uebergange zur Grenze in die Gleichungen (1) übergehen, wie es sein muss.

Geht $\varphi(x)$ in eine constante Grösse c über, so folgt aus der Gleichung: $\varphi(x) = \lim \varphi(x) + \alpha$, $\lim c = c$, da in diesem Falle α, wovon die Veränderlichkeit von $\varphi(x)$ abhing, $= 0$ gesetzt werden muss; die Grenze einer constanten Grösse ist also diese Grösse selbst, wie dies an und für sich klar ist.

a) durch Addition oder Subtraktion der Glgn. (2) erhält man

$$\varphi(x) \pm \psi(x) = a \pm b + (\alpha \pm \beta),$$

folglich, wenn man zur Grenze übergeht, d. h. x (somit auch α und β) unendlich abnehmen lässt:

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x). \tag{3}$$

Diese Gleichung, welche sich leicht durch Worte ausdrücken lässt, kann, wie leicht einzusehen, auf eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen ausgedehnt werden, gilt aber nicht mehr allgemein, wenn die Anzahl der Bestandtheile unendlich wird, da es sehr wohl sein kann, dass die Summe einer unendlichen Anzahl unendlich abnehmender Grössen sich einer von 0 verschiedenen Grenze nähert.

b) Multlipliciren wir die Glgn. (2), so kommt:

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

somit, da nach §. 16. *d*, $\lim(a\beta + b\alpha + \alpha\beta) = 0$ ist,

$$\lim[\varphi(x) \cdot \psi(x)] = ab, \text{ d. i. [Gl. (1)]:}$$

$$\lim[\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim\varphi(x) \cdot \lim\psi(x). \tag{4}$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz gilt ebenfalls für jede beliebige endliche Anzahl Faktoren, nicht aber allgemein für eine unendliche.

c) Durch Division der Glgn. (2) ergibt sich:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Geht man nun auf die Grenzen über, so nähert sich der Zähler des Bruches $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ der Nulle, der Nenner der Grösse b^2, so dass man also hat:

$$\lim\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)} = \frac{0}{b^2} = 0, \text{ somit:}$$

$$\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\varphi(x)}{\lim\psi(x)}. \tag{5}$$

d) Ist *a* eine unveränderliche und *x* eine unendlich klein werdende Grösse, so ist

$$\lim(a^x) = 1; \tag{6}$$

denn bezeichnet α eine positive oder negative Grösse, so kann man immer setzen:

$$a^x = 1 + \alpha, \ (n)$$

da für jeden Werth von x diese Gleichung durch gehörige Wahl von α rfüllt werden kann. Mittelst der Substitution $x = \frac{1}{m}$ verwandelt sich lieselbe in

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha \text{ oder } a = (1+\alpha)^m;$$

a nun bei dem unendlichen Abnehmen von x, m unendlich gross wird, muss in Folge der letzten Gleichung α mit x gleichzeitig unendlich

klein werden, da sonst der Ausdruck $(1 + \alpha)^m$ [nach §. 16, g)] unendlich wachsen würde und der constanten Zahl a nicht gleich sein könnte. Wird aber α zugleich mit x unendlich klein, so folgt aus (n) : $\lim (a^x) = \lim (1 + \alpha) = 1$.

e) Es ist

$$\lim [\varphi(x)^m] = [\lim \varphi(x)]^m. \tag{7}$$

Die erste der Glgn. (2) gibt, zur m^{ten} Potenz erhoben:

$$\varphi(x)^m = (a + \alpha)^m.$$

Nimmt man von beiden Theilen dieser Gleichung die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme, dessen Basis B ist, so erhält man:

$$\log [\varphi(x)^m] = m \log (a + \alpha);$$

nun ist offenbar $\lim [m \log (a + \alpha)] = m \log a$; man kann daher $m \log (a + \alpha) = m \log a + \delta$ setzen, wo δ eine mit x und α verschwindende Grösse ist; somit hat man:

$$\log [\varphi(x)^m] = m \log a + \delta,$$

oder

$$\varphi(x)^m = B^{m \log a + \delta} = B^{m \log a} . B^\delta$$
$$= B^{\log (a^m)} . B^\delta = a^m . B^\delta.$$

Geht man nun beiderseits auf die Grenzen über, so erhält man, wegen $\lim a^m . B^\delta = \lim a^m . \lim B^\delta = a^m . 1$, und $a = \lim \varphi(x)$:

$$\lim [\varphi(x)^m] = [\lim \varphi(x)]^m.$$

f) Eben so leicht beweist man, dass

$$\lim [A^{\varphi(x)}] = A^{\lim \varphi(x)}; \tag{8}$$

denn in Folge der ersten der Glgn. (2) ist

$$A^{\varphi(x)} = A^{a + \alpha} = A^a . A^\alpha,$$

woraus, da $\lim A^\alpha = 1$, durch den Uebergang zur Grenze die Gl. (8) folgt.

g) Es ist

$$\lim [\varphi(x)^{\psi(x)}] = [\lim \varphi(x)]^{\lim \psi(x)}; \tag{9}$$

denn behält man die Bezeichnung der Glgn. (1) und (2) bei, so hat man

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a + \alpha)^{b + \beta} = (a + \alpha)^b . (a + \alpha)^\beta;$$

beim Uebergang zur Grenze werden x, α und β gleichzeitig unendlich klein, somit nach früheren Sätzen:

$$\lim [\varphi(x)^{\psi(x)}] = \lim (a + \alpha)^b . \lim (a + \alpha)^\beta = a^b . 1 = a^b$$
$$= [\lim \varphi(x)]^{\lim \psi(x)}.$$

h) Liegt der Werth der Funktion $f(x)$ zwischen den Werthen der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so dass also

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$$

ist, und nähern sich die beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bei unendlich abnehmendem x beide derselben Grenze a, so ist auch

$$\lim f(x) = a.$$

Denn bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der drei Funktionen kann man setzen:

$$f(x) = \varphi(x) + \varrho\,[\psi(x) - \varphi(x)],$$

wo ϱ irgend einen positiven echten Bruch bedeutet, welche Gleichung bei dem Uebergang zur Grenze, da $\lim \psi(x) = \lim \varphi(x) = a$, die Gleichung $\lim f(x) = a$ darbietet.

19. Mit Hilfe des Begriffes der unendlich kleinen Grössen lässt sich nun auch der Begriff einer stetigen Funktion auf folgende Weise darstellen. Sei $y = f(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x, und lassen wir, von irgend einem bestimmten zwischen den Grenzen x_0 und x_1 liegenden Werth von x ausgehend, diese Variable um die unendlich kleine Grösse δ wachsen, so nimmt die Funktion selbst um die Differenz:

$$f(x + \delta) - f(x)$$

zu, und die Funktion wird von $x = x_0$ bis $x = x_1$ stetig sein, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth von x, obige Differenz mit δ unendlich klein wird.

Für die Funktion $y = f(x) = \frac{a}{x}$ erhält man z. B.:

$$f(x + \delta) - f(x) = \frac{a}{x + \delta} - \frac{a}{x} = -\frac{a\delta}{x(x + \delta)},$$

welcher Ausdruck für jeden Werth von x mit δ unendlich klein wird, ausgenommen für den Werth $x = 0$, für welchen derselbe unendlich gross wird. Diese Funktion ist daher stetig von $x = -\infty$ bis $x = 0$, und von $x = 0$ bis $x = +\infty$, erleidet aber für $x = 0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, indem sie für diesen Werth von x unendlich gross wird.

Man sagt: eine Funktion $y = f(x)$ ist in der Nähe eines besonderen Werthes $x = a$ stetig, wenn sie es zwischen zwei diesen Werth a einschliessenden Grenzen ist, wie enge man auch diese Grenzen zusammenziehen mag.

Eigentlich unstetige Funktionen wären solche, bei welchen sich kein Werth der unabhängig veränderlichen Grösse angeben lässt, in dessen Nähe die Funktion stetig ist. Solche Funktionen lassen sich zwar bilden (z. B. $y = (-a)^x$, wenn a wesentlich positiv), kommen jedoch in den Anwendungen der Mathematik auf Naturerscheinungen nicht vor. Im Gegentheile haben die Funktionen im Allgemeinen die

Eigenschaft, in ihrem ganzen Verlaufe stetig zu bleiben, und nur gewisse Funktionen erleiden für einzelne besondere Werthe der Veränderlichen eine Unterbrechung der Stetigkeit, welche fasst immer darin besteht, dass sie für diese besonderen Werthe unendlich werden.

ZWEITES KAPITEL.

VON DEN UNENDLICHEN REIHEN IM ALLGEMEINEN.

20. Eine Folge von Grössen, welche hinsichtlich ihres arithmetischen Baues nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, wird eine Reihe genannt. Die einzelnen Grössen selbst heissen Glieder der Reihe.

Um allgemein irgend eine Reihe darzustellen, bezeichnet man zweckmässig sämmtliche Glieder durch einen und denselben Buchstaben und unterscheidet die einzelnen Glieder durch diesem Buchstaben angehängte Stellenzeiger, durch welche zugleich der Ort des Gliedes in der Reihe bestimmt wird. Hiernach stellt die Folge der Symbole.

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots\ldots u_n,\ u_{n+1}, \ldots\ldots$$

jede beliebige Reihe vor. Nach demselben Gesetze, nach welchem die Glieder der Reihe in der Richtung von u_1, gegen u_2, $u_3, \ldots\ldots$ fortschreiten, kann man sich aber die Reihe auch nach entgegengesetzter Richtung fortgesetzt denken, wodurch Glieder entstehen, die folgerichtig mit u_0, u_{-1}, $u_{-2}, \ldots\ldots$ zu bezeichnen sind.

Im allgemeinen ist jede Reihe eine unendliche, d. h. mit unbegrenzter Anzahl der Glieder, da nichts hindert, mit der Bildung der Glieder nach dem ausgesprochenen Gesetze ins Unendliche fortzufahren. In besonderen Fällen, oder wenn die Natur der Aufgabe nur die Betrachtung einer endlichen Anzahl von Gliedern erfordert, entstehen aus den unendlichen Reihen endliche; Beispiele von solchen sind die aus den Elementen bekannte arithmetische und geometrische Progression.

21. Eine Reihe ist als bekannt anzusehen, sobald das Bildungsgesetz derselben gegeben ist. Dieses kann auf zweifache Weise dargestellt werden. Entweder ist irgend ein Glied der Reihe z. B. u_n als Funktion seines Stellenzeigers gegeben, so dass man hat:

$$u_n = f(n),$$

oder als Funktion eines oder mehrerer der unmittelbar vorausgehenden Glieder, also:

$$u_n = F(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots);$$

in beiden Fällen nennt man den Ausdruck von u_n das allgemeine Glied der Reihe; im ersten Falle sagt man, es sei in independenter, im zweiten, es sei in rekurrirender Form oder durch Rekursion gegeben. So ist für die geometrische Progression:

$$a, ax, ax^2, ax^3, \ldots$$

$u_n = ax^{n-1}$ die independente, $u_n = u_{n-1} \,.\, x$, oder $u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}}$ die rekurrirende Form des allgemeinen Gliedes. Wie man sieht, erfordert die Berechnung irgend eines Gliedes der Reihe mittelst der rekurrirenden Form des allgemeinen Gliedes die Kenntniss aller vorausgehenden Glieder, also zuletzt die Kenntniss so vieler Anfangsglieder, als die Rekursion überhaupt Glieder in Anspruch nimmt; während die independente Form jedes beliebige Glied der Reihe unabhängig von allen übrigen darbietet. Statt der in der rekurrirenden Form von u_n erscheinenden vorausgehenden Glieder u_{n-1}, etc. enthält die independente Form gewisse Constanten, welche in jener fehlen.

Aus dem independenten Ausdruck des allgemeinen Gliedes lässt sich die rekurrirende Form immer mit Leichtigkeit finden, indem man in jenem $n-1$, $n-2$, etc. statt n substituirt, und aus den so erhaltenen Gleichungen eine oder mehrere Constanten eliminirt. So hat man für die obige geometrische Reihe:

$$u_n = ax^{n-1},\ u_{n-1} = ax^{n-2},\ u_{n-2} = ax^{n-3};$$

die Elimination von a aus den zwei ersten Gleichungen liefert sofort die erste, die Elimination von a und x aus allen dreien die zweite der schon oben angeführten rekurrirenden Formen des allgemeinen Gliedes.

22. Addirt man nach und nach 2, 3, 4, ... n Glieder der unendlichen Reihe

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n \ldots,$$

so erhält man die Summen von 2, 3, 4, ... n Gliedern, welche wir mit S_2, S_3, S_4, ... S_n bezeichnen wollen, so dass also

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n.$$

Eine Funktion des allgemeinen Stellenzeigers n, welche für jeden beliebigen Werth desselben die Summe von n Gliedern der Reihe angibt, heisst das Summenglied, das summatorische Glied oder die Summenformel der Reihe. So hat man für die geometrische Progression, wie aus den Elementen bekannt ist:

$$S_n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-1} = \frac{a(x^n - 1)}{x - 1};$$

für die arithmetische Progression:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots$$
$$+ [a + (n - 1)d] = n[a + \tfrac{1}{2}(n - 1)d].$$

Die Aufgabe, die Summenformel einer vorgelegten Reihe zu finden, nennt man die Summirung der Reihe; sie ist oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Ist hingegen das Summenglied einer Reihe bekannt, so ist hierdurch auch die Reihe selbst gegeben. Denn es ist:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$
$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1},$$

somit durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Setzt man also in der Summenformel S_n, $n - 1$ an die Stelle von n, und subtrahirt den so erhaltenen Ausdruck von S_n, so ist die Differenz das allgemeine Glied, aus welchem die Reihe leicht construirt werden kann. Dieses Verfahren ist jedoch an die Bedingung gebunden, dass für $n = 1$, $u_n = S_n$, d. i. $u_1 = S_1$ werde.

Sucht man z. B. die Reihe, deren Summenglied $S_n = \frac{n}{n+1}$, so findet man: $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$, und für die zugehörige Reihe, indem man in dem gefundenen Ausdrucke von u_n für n der Reihe nach 1, 2, 3, ... substituirt:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$$

23. Die Summenformel liefert, wie man sieht, die Summe von n Anfangsgliedern der Reihe, wo n eine beliebige aber endliche ganze Zahl bedeutet. Hieran schliesst sich ganz natürlich die Frage nach der Summe einer unendlichen Reihe, d. h. nach derjenigen Summe, die man erhalten würde, wenn man sämmtliche, unendlich viele Glieder der Reihe addiren könnte. Es handelt sich hier zunächst darum, den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe festzustellen.

So wie nun die unendliche Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

aus der endlichen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$$

dadurch entsteht, dass wir die Gliederzahl n ins Unendliche zunehmen lassen, so muss offenbar auch die Summe S der ersteren aus der

Summe S_n der endlichen Reihe dadurch hervorgehen, dass wir in letzterer n unendlich wachsen lassen. Bezeichnen wir daher, gemäss den Lehren des vorhergehenden Kapitels, mit $\lim S_n$ das, was aus S_n wird, wenn n unendlich zunimmt, so haben wir:

$$S = \lim S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + \ldots \text{ in inf.}$$

Unter der Summe einer unendlichen Reihe verstehen wir daher die Grenze, welcher sich die Summe von n Gliedern bei dem unendlichen Wachsen von n mehr und mehr nähert.

Es entsteht nun sogleich die Frage, ob ein solcher Grenzwerth für jede unendliche Reihe existiren müsse? Dies ist offenbar nicht der Fall. So haben wir oben für die arithmetische Reihe $S_n = n[a + \frac{1}{2}(n-1)d]$ gehabt, ein Ausdruck, welcher mit n selbst unendlich gross wird, also keiner bestimmten Grenze sich nähert; eine unendliche arithmetische Reihe hat daher auch keine Summe. Die unendliche Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (\alpha)$$

hingegen ist summirbar, und zwar ist ihre Summe $= 1$; denn für diese Reihe ist $S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, somit für $n = \infty$, $\lim S_n = 1$. In der That findet man successive $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$, u. s. w.; Werthe, welche sich immer mehr und mehr der Einheit nähern, je mehr Glieder man addirt.

Endlich kann der Fall eintreten, dass die Summe S_n, je nach der Beschaffenheit der Zahl n, verschiedene Werthe annimmt, wie dies z. B. bei der Reihe:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{13}{12} - \frac{19}{20} + \frac{31}{30} - \frac{41}{42} + \ldots + \frac{1 + (-1)^{n-1}.n(n+1)}{n(n+1)} + \ldots \quad (\beta)$$

stattfindet, welche aus der Reihe (α) entsteht, wenn man zu den aufeinanderfolgenden Gliedern abwechselnd $+1$ und -1 addirt, und für welche die Summe S_n bei dem unendlichen Wachsen von n sich den Werthen 1 oder 2 nähert, je nachdem n gerade oder ungerade, weil im ersten Falle die hinzugefügten Einheiten sich paarweise aufheben, im letzteren eine positive Einheit übrigbleibt.

24. Hiernach zerfallen die unendlichen Reihen in drei Classen:

1) Reihen, deren Summe eine bestimmte endliche Grösse ist; man nennt sie convergente oder convergirende Reihen. Solche Reihen



sind demnach immer summirbar, indem man sich dem wahren Werthe ihrer Summe um so mehr nähert, je mehr Glieder man zusammen addirt, so dass der Fehler, welchen man begeht, indem man die Summe einer gewissen endlichen Anzahl von Anfangsgliedern der Reihe für den wahren Werth der Summe nimmt, durch Addition von hinreichend vielen Gliedern kleiner gemacht werden kann, als jede beliebige noch so kleine Grösse.

2) Reihen, bei welchen die Summe von n Anfangsgliedern beim unendlichen Wachsen von n über jeden angebbaren Werth hinaus zunimmt; man nennt dieselben divergent.

3) Reihen, deren Summe zwischen mehreren bestimmten Werthen schwankt, daher dieselben oscillirende Reihen genannt werden. Man sieht übrigens leicht ein, dass dieser Fall nur bei Reihen mit positiven und negativen Gliedern eintreten kann, weil, wenn sämmtliche Glieder gleiches Zeichen haben, die Summe nicht abwechselnd ab- und zunehmen kann.

Da die Summe einer convergirenden Reihe mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit angegeben werden kann, so ist eine unbekannte Grösse oder Funktion als bekannt anzusehen, sobald es gelingt, sie durch eine convergirende Reihe darzustellen. Viele Funktionen, z. B. die transcendenten, lassen sich nur durch unendliche Reihen ausdrücken; häufig werden auch Funktionen, die in geschlossener Form vorliegen, der Bequemlichkeit der Berechnung wegen in unendliche Reihen aufgelöst. Dadurch kommt man auf Gleichungen von der Form

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Ist nun die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen eine convergirende, so hat sie eine Summe, und diese Summe ist eben die Funktion U, deren Werth durch Addition einer hinreichenden Anzahl von Gliedern mit jedem beliebigen Grade der Schärfe gefunden werden kann. Divergirt hingegen die Reihe, oder oscillirt dieselbe, so hat sie keine bestimmte Summe, und kann daher auch der endlichen bestimmten Grösse U dem Werthe nach nicht gleich gesetzt werden. Solche Reihen sind daher zur Berechnung von Grössen oder Funktionen nicht brauchbar, sondern nur als Umformungen derselben zu betrachten, welche gewissen allgemeinen analytischen Bedingungen Genüge leisten. Hieraus geht von selbst hervor, wie wichtig es sei, beurtheilen zu können, ob eine vorgelegte Reihe convergire oder divergire. Die folgenden Untersuchungen werden hiezu für die meisten Fälle ausreichende Mittel darbieten.

Uebrigens mag noch bemerkt werden, dass bei der Untersuchung einer Reihe in Bezug auf ihre Convergenz oder Divergenz, wenn die-

selbe positive und negative Glieder enthält, weder eine Aenderung an der gegebenen Ordnung ihrer Glieder, noch eine Vereinigung von Gliedern mit verschiedenen Zeichen vorgenommen werden darf, weil hiedurch die Beschaffenheit der Reihe sich ändern kann. Zieht man z. B. in der obigen oscillirenden Reihe (β) je zwei aufeinanderfolgende Glieder in eines zusammen, so entsteht die Reihe:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}+\ldots+\frac{2}{4n^2-1}+\ldots,$$

welche convergirt. Nur wenn die Convergenz der Reihe schon erwiesen ist, kann man aufeinanderfolgende mit verschiedenen Zeichen behaftete Glieder in beliebiger Anzahl zusammenziehen, weil, wenn die Summe der unendlichen Reihe einen bestimmten Werth hat, man sich diesem Werthe bei der Summirung einer beliebigen Anzahl von Anfangsgliedern offenbar unbegrenzt nähern muss, gleichgiltig, ob man diese Glieder einzeln oder gruppenweise addirt. Eben so kann, wenn eine convergirende Reihe nur positive Glieder enthält, durch Versetzung der Glieder — vorausgesetzt, dass hiebei Glieder, welche einen endlichen Werth haben, in einer endlichen Entfernung vom Anfangsgliede bleiben — weder die Convergenz der Reihe aufgehoben, noch der Werth der Summe geändert werden, weil man sich diesem Werthe gewiss um so mehr nähert, je mehr Glieder man addirt, in welcher Ordnung man auch die Addition vornehmen mag.

VON DEN KENNZEICHEN DER CONVERGENZ UND DIVERGENZ UNENDLICHER REIHEN.

25. Schon aus dem Begriffe der Convergenz folgt, dass die Glieder einer convergirenden Reihe immer kleiner und kleiner und zuletzt unendlich klein werden müssen. Soll nämlich die Summe S_n bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze S, welche die Summe der unendlichen Reihe selbst ist, immer mehr und mehr sich nähern, so muss offenbar die Differenz

$$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \quad (1)$$

bei der unendlichen Zunahme von n unendlich klein werden, was nur dann sein kann, wenn die Glieder $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ selbst unendlich klein werden. Da diese Eigenschaft die nothwendige allgemeine Bedingung der Convergenz ist, so können wir bei den nachfolgenden Betrachtungen die vorliegende Reihe immer als eine solche voraussetzen, deren späteste Glieder unendlich klein werden. Solche Reihen sollen in der Folge kurz fallende Reihen genannt werden. Sie sind jedoch wohl von

jenen Reihen zu unterscheiden, deren Glieder gleichfalls beständig abnehmen, ohne jedoch unendlich klein zu werden, indem sie sich nämlich fortwährend einer bestimmten von Null verschiedenen Grenze nähern; derartige Reihen sind selbstverständlich divergent.

Dass übrigens diese Eigenschaft allein zur Convergenz nicht hinreiche, ersieht man schon aus dem obigen Ausdrucke (1), da man offenbar a priori nicht behaupten kann, dass die Summe von unendlich vielen Gliedern unendlich klein werde, wenn dies auch mit jedem einzelnen Gliede der Fall ist. Vielmehr ist es zur Convergenz der Reihe unerlässlich, dass die Summe

$$E_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \text{ in inf.},$$

welche wir die zum Zeiger $n+1$ gehörige Ergänzung der Reihe, oder die Summe der spätesten Glieder nennen und mit E_{n+1} bezeichnen werden, beim unendlichen Wachsen von n selbst unendlich klein werde. Die Bedingung der Convergenz einer unendlichen Reihe lässt sich daher auch so aussprechen: die Summe ihrer spätesten Glieder muss unendlich klein werden.

26. Um daher von einer unendlichen Reihe behaupten zu können, dass sie convergire, muss man beweisen, entweder, dass die Summe von n Anfangsgliedern beim fortwährenden Wachsen von n sich einer bestimmten Grenze nähere, oder, dass die Summe der spätesten Glieder $= 0$ sei.

Der erstere Weg lässt sich natürlich nur bei solchen Reihen betreten, deren Summenformel man kennt, was nur selten der Fall ist. Die geometrische Reihe bietet hierzu ein Beispiel dar. Für diese ist bekanntlich:

$$S_n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots + ax^{n-2} + ax^{n-1} = \frac{a(x^n - 1)}{x - 1},$$

welche Summe man auch unter den Formen:

$$S_n = \frac{ax^n}{x-1} - \frac{a}{x-1} \ldots (1), \quad S_n = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x} \ldots (2)$$

darstellen kann. Ist nun, ohne Rücksicht auf das Zeichen, der Zahlenwerth von $x < 1$, so wird x^n, somit auch $\frac{ax^n}{1-x}$ beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein [§. 16. g] und die Summe S_n nähert sich daher, wie aus (2) erhellt, immer mehr und mehr der bestimmten Grenze $\frac{a}{1-x}$; in diesem Falle ist daher die geometrische Reihe convergent und ihre Summe $S = \frac{a}{1-x}$.

Ist hingegen dem Zahlenwerthe nach $x > 1$, so wird $\frac{ax^n}{x-1}$, somit nach (1), da $\frac{a}{x-1}$ von n unabhängig also unveränderlich ist, auch S_n bei unendlicher Zunahme von n unendlich gross und die Reihe divergirt.

Für $x = +1$ geht obige Reihe über in:

$$a + a + a + \ldots,$$

welche Summe offenbar unendlich gross wird. Für $x = -1$ endlich erhält man die Reihe:

$$a - a + a - a + a - \ldots,$$

welche wegen des Schwankens ihrer Summe zwischen 0 und $+a$ oscillirt und daher gleichfalls keine bestimmte Summe hat.

Eine unendliche geometrische Reihe ist daher nur dann convergent, wenn ihr Quotient kleiner ist als die Einheit.

27. Zur Erläuterung der zweiten oben angedeuteten Beweisart wählen wir die sogenannte natürliche harmonische Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots,$$

welche Reihe wegen $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ offenbar eine fallende ist. Es ist:

$$E_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots,$$

also offenbar

$$E_{n+1} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

somit um so mehr

$$E_{n+1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

da der Bruch $\frac{1}{2n}$ kleiner ist, als jeder der Brüche $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, u. s. w. Die Anzahl der Brüche rechts vom Zeichen $>$ ist aber $= n$, somit

$$E_{n+1} > n \cdot \frac{1}{2n}, \text{ d. i. } E_{n+1} > \frac{1}{2}.$$

Die Summe der spätesten Glieder dieser Reihe wird also nicht unendlich klein, sondern bleibt immer grösser als $\frac{1}{2}$, wie gross man auch n

nehmen mag, woraus die Divergenz dieser Reihe folgt. Die harmonische Reihe bietet uns sonach ein Beispiel, dass das Fallen einer Reihe die Convergenz derselben nicht nothwendig nach sich ziehe.

28. Der eben betretene Weg, nämlich die Betrachtung des Ergänzungsgliedes, führt auch noch zu folgendem allgemeinen Lehrsatze: Jede fallende Reihe, deren Glieder, wenigstens von einer bestimmten Stelle an, das Zeichen regelmässig wechseln, ist convergent.

Denn es sei:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \mp u_n \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm \dots$$

eine fallende Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel, so ist:

$$E_{n+1} = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm u_{n+5} \mp \dots$$
$$= \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} - \dots],$$

welche Reihe von Gliedern man auch unter folgenden Formen schreiben kann:

$$E_{n+1} = \pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots], \text{ und}$$
$$E_{n+1} = \pm [(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + (u_{n+5} - u_{n+6}) + \dots].$$

Da nun die Reihe, der Voraussetzung nach, eine fallende ist, so sind zuvörderst die in den runden Klammern stehenden Differenzen sämmtlich positiv, daher ist nothwendig dem numerischen Werthe nach:

$$u_{n+1} > E_{n+1} > (u_{n+1} - u_{n+2});$$

in Folge der erwähnten Voraussetzung ist aber $\lim u_{n+1} = 0$, ebenso $\lim (u_{n+1} - u_{n+2}) = 0$, woraus [§. 18. *h*] $\lim E_{n+1} = 0$ und hiermit die Convergenz der Reihe folgt.

Der Beweis wird auf ähnliche Weise geführt, wenn mehrere positive mit einer gleichen Anzahl negativer Glieder regelmässig wechseln.

So convergirt die fallende Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$ während wir dieselbe, wenn die Glieder sämmtlich dasselbe Zeichen haben, im vorigen §. als divergirend erkannt haben.

29. Da nach dem eben bewiesenen Satze fallende Reihen mit regelmässigem Zeichenwechsel immer convergiren, so können wir uns im Folgenden auf solche beschränken, deren Glieder mit gleichem Zeichen behaftet sind. Durch die Vergleichung solcher Reihen mit anderen, deren Convergenz oder Divergenz bereits erkannt ist, gelangt man zu allgemeinen Kennzeichen der Convergenz, indem man dabei von folgendem aus dem Begriffe der Convergenz fliessenden Satze ausgeht:



a) **Eine Reihe, deren Glieder, wenigstens von einer gewissen Stelle an, sämmtlich kleiner sind, als die correspondirenden, mit gleichem Zeichen versehenen Glieder einer convergirenden Reihe, convergirt ebenfalls; und eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle an gleiches Zeichen haben und grösser sind, als die correspondirenden Glieder einer divergirenden Reihe divergirt.**

Es seien nämlich die beiden Reihen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \quad (1)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots \quad (2)$$

und

$$E_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots .$$

$$E'_{n+1} = t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots .$$

Ist nun $u_{n+1} < t_{n+1}$, $u_{n+2} < t_{n+2}$, $u_{n+3} < t_{n+3}$, u. s. w. so ist, wenn die Glieder der Reihe (2) durchaus gleiches Zeichen haben, nothwendig $E_{n+1} < E'_{n+1}$, gleichgiltig, ob die Glieder der Reihe (1) gleiches Zeichen haben oder nicht, somit, wenn die Reihe (2) convergirt, wegen $\lim E'_{n+1} = 0$, auch $\lim E_{n+1} = 0$, folglich auch die erste Reihe convergent. Ist im Gegentheile $u_{n+1} > t_{n+1}$, $u_{n+2} > t_{n+2}$, $u_{n+3} > t_{n+3}$ u. s. w. und die Reihe (2) divergent, so ist, wegen der vorausgesetzten gleichen Bezeichnung der Glieder der Reihe (1), nothwendig $E_{n+1} > E'_{n+1}$, somit, weil $\lim E'_{n+1} > 0$, auch $\lim E_{n+1} > 0$, daher auch die Reihe (1) divergent.

Man kann diesen Satz auch noch auf folgende, für die Anwendung nicht selten bequemere Weise ausdrücken:

b) **Die Reihe (1) convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe (2), je nachdem von einer bestimmten Stelle an**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n}, \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

bleibt.

Denn im ersteren Falle ist:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \frac{t_{n+3}}{t_{n+2}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Multiplicirt man die zwei ersten dieser Ungleichungen miteinander, sodann das Produkt derselben mit der dritten, u. s. w., so erhält man successive:

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} < \frac{t_{n+2}}{t_n}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_n} < \frac{t_{n+3}}{t_n}, \quad \frac{u_{n+4}}{u_n} < \frac{t_{n+4}}{t_n}, \quad \text{u. s. w.,}$$

und durch Addition dieser Ungleichungen:

$$\frac{u_{n+2}+u_{n+3}+u_{n+4}+\cdots}{u_n} < \frac{t_{n+2}+t_{n+3}+t_{n+4}+\cdots}{t_n},$$

oder

$$u_{n+2}+u_{n+3}+u_{n+4}+\cdots < \frac{u_n}{t_n}(t_{n+2}+t_{n+3}+t_{n+4}+\cdots).$$

Ist nun die Reihe (2) convergent, so hat die Summe $t_{n+2} + t_{n+3} + t_{n+4} + \ldots$ einen bestimmten endlichen Werth; dies muss daher um so mehr bei der kleineren Summe: $u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots$ der Fall sein, somit die Reihe (1) gleichfalls convergiren.

In gleicher Art wird der Beweis für den zweiten Fall geführt.

30. Setzen wir an die Stelle der Reihe (2) eine geometrische Reihe:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$$

deren Convergenz nach §. 26 an die Bedingung: $x < 1$ gebunden ist, und vergleichen wir damit die Reihe (1), so ist $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{ax^n}{ax^{n-1}} = x$; die Reihe (1) wird somit convergiren, wenn, von irgend einer Stelle angefangen, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < x$ und $x < 1$, sie wird divergiren, wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} > x$ und $x > 1$ ist; Bedingungen, welche sich bequemer durch folgenden Satz ausdrücken lassen:

Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

convergirt, wenn bei dem unendlichen Wachsen von n $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ist; sie divergirt, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, wobei wieder, wie bei der geometrischen Reihe nur der Zahlenwerth von $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, in Betracht kommt.

Denn wenn der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zum Behufe der Convergenz von irgend einem Werthe des Stellenzeigers $n = m$ angefangen kleiner sein und auch für alle folgenden Werthe $n = m + 1$, $m + 2$, u. s. w. in inf. kleiner bleiben soll, als die Einheit, so muss er sich offenbar bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze nähern, die kleiner ist als 1. Ist hingegen $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, so muss nothwendig der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ früher oder später grösser werden und bleiben als die Einheit und somit die Reihe divergiren.

Beisp. 1. Die Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots.$$

convergirt, denn es ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}:\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}=\frac{1}{n},\text{ somit:}$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{1}{n}=0<1.$$

2) Die Reihe

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^2}+\frac{1.3.5}{2\ 4.6}\cdot\frac{1}{7.2^3}+\ldots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots2(n-1)}\cdot\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}+\ldots$$

convergirt; denn man findet:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2-n+\frac{1}{4}}{n^2+\frac{1}{2}n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}{1+\frac{1}{2n}},$$

ein Ausdruck, welcher, beim unendlichen Zunehmen von n, $\frac{1}{2}$ zur Grenze hat.

Dieses Kennzeichen, in sehr vielen Fällen anwendbar, wird unbrauchbar, wenn $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist. Dann führt bisweilen folgender Satz zum Ziele.

31. Die Reihe

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\ldots \tag{1}$$

convergirt oder divergirt gleichzeitig mit der daraus abgeleiteten Reihe:

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+16u_{16}+\ldots \tag{2}$$

Der Beweis ist folgender. Da wir die Reihe (1) als fallend voraussetzen, so ist

$$\begin{aligned}u_1&=u_1\\2u_2&>u_2+u_3\\4u_4&>u_4+u_5+u_6+u_7\\8u_8&>u_8+u_9+\ldots.+u_{15}\\16u_{16}&>u_{16}+u_{17}+\ldots.+u_{31}\end{aligned}$$

u. s. w.

Durch Addition dieser Relationen erhalten wir:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \quad (\alpha);$$

es ist daher die Summe der Reihe (1) kleiner als jene der abgeleiteten (2); ist also die letztere eine bestimmte endliche Grösse, d. h. convergirt die Reihe (2), so muss die Summe der Reihe (1) ebenfalls eine bestimmte endliche Grösse sein, und somit diese Reihe ebenfalls convergiren. Umgekehrt, wenn die Reihe (1) divergirt, so wird auch die abgeleitete Reihe (2) divergent sein, da in Folge der Relation (α) die Summe der letzteren zugleich mit jener der Reihe (1) unendlich wird. — Es ist aber auch:

$$\begin{aligned} u_1 &< 2u_1 \\ 2u_2 &= 2u_2 \\ 4u_4 &< 2u_3 + 2u_4 \\ 8u_8 &< 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8 \\ 16u_{16} &< 2u_9 + 2u_{10} + \ldots + 2u_{16} \end{aligned}$$

u. s. w.,

somit:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots),$$

woraus man, ähnlich wie oben, schliesst, dass, wenn die Reihe (1) convergirt, auch die abgeleitete (2) convergent ist und dass umgekehrt aus der Divergenz der abgeleiteten Reihe die Divergenz der Reihe (1) folgt. Somit sind immer beide Reihen gleichzeitig convergent oder divergent.

Beisp. 1) Sei die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \ldots$$

gegeben, so ist die daraus abgeleitete Reihe:

$$1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \frac{8}{8^r} + \frac{16}{16^r} + \ldots$$

in welcher man sogleich eine geometrische Reihe erkennt, deren Exponent $= \frac{2}{2^r}$ ist. Soll diese convergiren, so muss $\frac{2}{2^r} < 1$ d. i. $r > 1$ sein; unter derselben Bedingung convergirt daher auch die vorgelegte Reihe; für jeden anderen Werth von $r \leqq 1$ divergirt sie; für $r = 1$ geht sie in die natürliche harmonische über, deren Divergenz schon früher auf anderem Wege bewiesen wurde.

2) Die gegebene Reihe sei:

$$1 + \frac{1}{2(\log 2)^m} + \frac{1}{3(\log 3)^m} + \frac{1}{4(\log 4)^m} + \ldots,$$

so ist die abgeleitete Reihe:

$$1 + \frac{1}{(\log 2)^m} + \frac{1}{(\log 4)^m} + \frac{1}{(\log 8)^m} + \ldots,$$

welche man, da $(\log 2^q)^m = q^m (\log 2)^m$ ist, leicht auf die Form:

$$1 + \frac{1}{(\log 2)^m}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots\right)$$

bringt; da nun die Reihe in der Klammer für $m > 1$ convergirt, so gilt dies auch von der vorgelegten Reihe. Für $m \leqq 1$ ist dieselbe divergent.

3) Untersuchen wir noch die Reihe:

$$1 + \left(\frac{\log 2}{2}\right)^a + \left(\frac{\log 3}{3}\right)^a + \left(\frac{\log 4}{4}\right)^a + \ldots,$$

so erhalten wir als abgeleitete Reihe:

$$1 + 2\left(\frac{\log 2}{2}\right)^a + 4\left(\frac{\log 4}{4}\right)^a + 8\left(\frac{\log 8}{8}\right)^a + \ldots,$$

welche wieder leicht auf die Form:

$$1 + \frac{(\log 2)^a}{2^{a-1}}\left[1 + \frac{2^a}{2^{a-1}} + \frac{3^a}{2^{2(a-1)}} + \ldots + \frac{n^a}{2^{(n-1)(a-1)}} + \ldots\right]$$

gebracht werden kann. Für die eingeklammerte Reihe hat man nun:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^a}{2^{n(a-1)}} : \frac{n^a}{2^{(n-1)(a-1)}} = \frac{1}{2^{a-1}} \cdot \frac{(n+1)^a}{n^a} = \frac{1}{2^{a-1}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a,$$

und es ist:

$$\lim \frac{1}{2^{a-1}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = \frac{1}{2^{a-1}};$$

dieser Grenzwerth ist kleiner oder grösser als 1, je nachdem a grösser oder kleiner als 1; die abgeleitete Reihe, und mit ihr die vorgelegte, convergiren daher, wenn $a > 1$; sie divergiren für $a < 1$. Für $a = 1$ findet gleichfalls Divergenz statt, da für diesen Werth die abgeleitete Reihe in die steigende Reihe: $1 + 2 + 3 + \ldots$, deren späteste Glieder unendlich gross werden, übergeht.

32. Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ convergirt, wenn für einen beliebigen Werth von $r > 1$, der Ausdruck $n^r u_n < h$ ist; sie divergirt, wenn, für $r \leqq 1$, der Ausdruck $n^r u_n > h$ ist, wobei h irgend einen angebbaren Werth bedeutet.

Denn im ersteren Falle ist:

$$u_n < \frac{h}{n^r}, \quad u_{n+1} < \frac{h}{(n+1)^r}, \quad u_{n+2} < \frac{h}{(n+2)^r}, \text{ u. s. w.};$$

folglich:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < h\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{(n+1)^r} + \frac{1}{(n+2)^r} + \ldots\right);$$

allein die eingeklammerte Reihe ist die auf das $(n-1)^{\text{te}}$ Glied folgende Ergänzung der Reihe $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots$, und convergirt, wenn $r > 1$ [§ 31, Beisp. 1)]; um so mehr muss dies bei der linksstehenden Reihe $u_n + u_{n+1} + \ldots$ der Fall sein, gleichgiltig, welchen bestimmten Werth auch h haben mag, da ihre Summe kleiner ist.

Im zweiten Falle ist:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots > h\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{(n+1)^r} + \frac{1}{(n+2)^r} + \ldots\right);$$

die eingeklammerte Reihe divergirt aber, wenn $r \overline{\overline{<}} 1$ und ihre Summe wird mit wachsendem n unendlich gross; um so mehr wird die Reihe linker Hand, deren Summe grösser ist, divergiren.

Beisp. Die vorgelegte Reihe sei:

$$2^\alpha + \frac{3^\alpha}{2^{\alpha+\beta}} + \frac{4^\alpha}{3^{\alpha+\beta}} + \frac{5^\alpha}{4^{\alpha+\beta}} + \ldots + \frac{(n+1)^\alpha}{n^{\alpha+\beta}} + \ldots,$$

unter α und β positive Zahlen verstanden, so wird:

$$n^r . u_n = n^r . \frac{(n+1)^\alpha}{n^{\alpha+\beta}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^{\beta-r}}.$$

Da nun jedenfalls $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha > 1$, so ist $n^r . u_n > \frac{1}{n^{\beta-r}}$; setzt man also $r = \beta$, so wird $n^r . u_n > 1$ und die Reihe divergirt daher, wenn $\beta = r \overline{\overline{<}} 1$.

Anderseits ist, von dem Werthe $n = 2$ an, stets $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha < 2^\alpha$, somit $n^r . u_n < \frac{2^\alpha}{n^{\beta-r}}$; setzt man wieder $r = \beta$, so wird $n^r . u_n < 2^\alpha$, folglich, wenn noch $\beta = r > 1$, die Reihe convergiren.

33. Aus dem im vorhergehenden §. entwickelten Kennzeichen ergeben sich als specielle Fälle noch folgende Sätze:

a) Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ convergirt, wenn, für einen beliebigen Werth von $r > 1$, der Ausdruck: $n^r . u_n$ beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein, also $\lim n^r . u_n = 0$ wird.

Denn in diesem Falle wird offenbar der Ausdruck $n^r . u_n$ stets kleiner sein, als irgend ein bestimmter Werth h, und somit die Reihe, unter der Voraussetzung $r > 1$, convergiren.

Der Satz darf jedoch, wie aus dem vorhergehenden §. erhellt, nicht umgekehrt werden.

b) Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ divergirt, wenn $\lim n.u_n = h$ ist, und h einen von Null verschiedenen Werth hat.

Da nämlich die Reihe, wenn sie convergiren soll, nothwendig eine fallende sein muss, so hat man:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{2n} > n . u_{2n}, \text{ d. i. } > \tfrac{1}{2}(2n . u_{2n}).$$

Ist daher, wie vorausgesetzt wurde, $\lim (2n . u_{2n}) = h > 0$, so bleibt die Summe von n Gliedern, wie gross man auch n nehmen mag, und um so mehr die Summe der spätesten Glieder, stets $> \frac{1}{2} h$, woraus die Divergenz der Reihe folgt.

So ist z. B. für die harmonische Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \lim n . u_n = \lim \left(n . \frac{1}{n}\right) = 1$; die Reihe ist daher divergent, wie bereits früher auf anderem Wege gefunden wurde.

Auch dieser Satz lässt sich nicht umkehren, indem sehr wohl $\lim n . u_n = 0$ sein und dennoch die Reihe divergiren kann. Zwar wird in diesem Falle, da

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{2n} < n . u_{n+1} < n . u_n$$

ist, die Summe dieser aus n Gliedern bestehenden Reihe beim unendlichen Wachsen von n sich unbegrenzt der Nulle nähern; da jedoch die Reihe aus unendlich vielen solchen Gruppen besteht, so kann ihre Summe gleichwohl über alle Grenzen hinaus wachsen. Ein Beispiel bietet die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \ldots,$$

für welche $\lim n . u_n = \lim \left(n . \frac{1}{n \log n}\right) = \lim \frac{1}{\log n} = 0$ ist, und deren Divergenz bereits früher [§. 31, Beisp. 2)] erwiesen wurde.

34. Das in §. 30 entwickelte Kennzeichen reicht, wie schon bemerkt, in dem Falle nicht aus, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist, was nicht selten und namentlich immer eintritt, wenn der Quotient $u_{n+1} : u_n$ die Form

$$\frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h}$$

annimmt. Führt nun in einem solchen Falle der in §. 31 entwickelte Satz nicht zum Ziele, so bedarf man anderer Hilfsmittel, die wir im Folgenden nach Gauss entwickeln wollen.

Es sei demnach die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \tag{1}$$

so beschaffen, dass der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h} = \frac{P}{p} \tag{2}$$

ist, wobei die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_h, a_1, a_2, \ldots a_h$ von n unabhängig sind, und der Kürze wegen

$$n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h = P \tag{3}$$

$$n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h = p \tag{4}$$

gesetzt werden mag, so gelten folgende Sätze:

1) Ist die Differenz $A_1 - a_1 > 0$, also positiv, so ist die Reihe (1) eine steigende, und die spätesten Glieder werden unendlich gross.

α) Ziehen wir (4) von (3) ab, so kommt:

$$P - p = (A_1 - a_1) n^{h-1} + (A_2 - a_2) n^{h-2} + \ldots + \\ + (A_g - a_g) n^{h-g} + \ldots + (A_h - a_h). \tag{5}$$

Da der Voraussetzung nach $(A_1 - a_1)$ positiv ist, so wird früher oder später, wenn nur n hinreichend gross genommen wird, der ganze zweite Theil dieser Gleichung positiv, weil das erste Glied $(A_1 - a_1) n^{h-1}$ positiv ist, und [§. 16, i] endlich grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder. Dann ist aber auch $P - p$ positiv, also $P > p$, d. h. nach (2): $u_{n+1} > u_n$, die Reihe (1) somit eine steigende.

β) Vergleichen wie ferner die Reihe (1) mit folgender:

$$u_1^k + \frac{u_2^k}{2} + \frac{u_3^k}{3} + \frac{u_4^k}{4} + \ldots + \frac{u_n^k}{n} + \ldots \tag{6}$$

welche der Kürze wegen mit

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n + \ldots$$

bezeichnet werden möge, und wo k eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann nun, unter der Voraussetzung, dass $A_1 - a_1$ positiv, k immer so wählen, dass die Reihe (6) eine steigende wird. Denn man hat mit Rücksicht auf (6) und (2):

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{u_{n+1}^k}{n+1} : \frac{u_n^k}{n} = \frac{n.u_{n+1}^k}{(n+1)u_n^k} =$$

$$= \frac{n(n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)^k}{(n+1)(n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h)^k}.$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze, der für ganze und positive Werthe des Exponenten aus den Elementen bekannt ist:

$$(n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)^k$$
$$= \{n^h + (A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)\}^k$$
$$= n^{hk} + kn^{h(k-1)}(A_1 n^{h-1} + \ldots + A_h) + \ldots$$

somit, wenn man bei den zwei ersten Gliedern stehen bleibt und endlich mit n multiplicirt, der Zähler des obigen Bruches

$$= n^{hk+1} + kA_1 n^{hk} + \ldots$$

Entwickelt man auf gleiche Weise den Nenner, so findet man:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{hk+1} + kA_1 n^{hk} + \ldots}{n^{hk+1} + (a_1 k + 1) n^{hk} + \ldots};$$

nach (α) ist aber die Reihe (6) eine steigende, wenn in dem Quotienten $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ die Differenz: $kA_1 - (ka_1 + 1) = k(A_1 - a_1) - 1$, positiv ist. Da nun $A_1 - a_1$ positiv vorausgesetzt wurde, so kann man k immer so wählen, dass $k(A_1 - a_1) - 1$ positiv, somit die Reihe (6) steigend ist. Sollen aber die Glieder der Reihe (6) immer grösser werden, so muss im n^{ten} Gliede $\frac{u_n^k}{n}$ beim unendlichen Wachsen des Nenners n nothwendig auch der Zähler u_n^k somit auch $\sqrt[k]{u_n^k} = u_n$ unendlich gross werden, d. h. die spätesten Glieder der Reihe (1) müssen unendlich gross werden.

2) Ist die Differenz $A_1 - a_1 < 0$, also negativ, so ist die Reihe (1) eine fallende, und die spätesten Glieder werden unendlich klein.

γ) Der erste Theil dieses Satzes erhellt sogleich wieder aus Gl. (5), deren zweiter Theil früher oder später das Zeichen des ersten Gliedes $(A_1 - a_1)\, n^{h-1}$ annimmt, also negativ wird; daraus folgt $P < p$, d. i. $u_{n+1} < u_n$; d. h. die Glieder der Reihe (1) nehmen fort und fort ab.

δ) Vergleichen wir ferner die Reihe (1) mit folgender:

$$u_1^k + 2u_2^k + 3u_3^k + 4u_4^k + \ldots + nu_n^k + (n+1)\, u_{n+1}^k + \ldots \qquad (7)$$

deren Glieder wir wieder mit $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n, \ldots$ bezeichnen wollen und wo k eine positive ganze Zahl ist. Es ist nun wieder leicht zu zeigen, dass man k immer so wählen kann, dass die Reihe (7) eine fallende werde. Denn für diese Reihe finden wir:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)u_{n+1}^k}{n\,.\,u_n^k} = \frac{n^{hk+1} + (A_1 k + 1)n^{hk} + \dots}{n^{hk+1} + a_1 k\,.\,n^{hk} + \dots};$$

es hängt somit das Steigen oder Fallen der Reihe (7) von der Differenz

$$A_1 k + 1 - a_1 k = 1 - k(a_1 - A_1)$$

ab, und man kann, da $a_1 - A_1$ der Voraussetzung nach positiv ist, k immer so wählen, dass diese Differenz negativ, somit die Reihe (7) nach γ) eine fallende werde. Sollen aber die Glieder dieser Reihe $U_n = nu_n^k$ immer kleiner werden, — gleichgiltig, ob sie dabei unendlich klein werden oder sich einer bestimmten Grenze nähern, so muss nothwendig, wegen des unendlichen Zunehmens des einen Faktors n, der andere u_n^k, folglich auch $\sqrt[k]{u_n^k} = u_n$ unendlich klein werden. Ist demnach $A_1 - a_1 < 0$, so werden die spätesten Glieder der Reihe unendlich klein.

3) Ist die Differenz $A_1 - a_1 = 0$, so nähern sich die Glieder der Reihe (1) beim unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze, und zwar steigend oder fallend, je nachdem die erste nicht verschwindende Differenz zweier gleichnamigen Coefficienten im Zähler und Nenner des Quotienten (2), z. B. $A_g - a_g$ positiv oder negativ ist.

Sei demnach $A_1 - a_1 = 0$, $A_2 - a_2 = 0$, u. s. w. und $A_g - a_g$ die erste nicht verschwindende Differenz, so wird aus (5):

$$P - p = (A_g - a_g)n^{h-g} + \dots + (A_h - a_h),$$

und es folgt nun ganz auf dieselbe Weise, wie wir unter α) und γ) geschlossen haben, dass die Reihe (1) steigend oder fallend sei, je nachdem die Differenz $A_g - a_g$ positiv oder negativ ist. Dass aber in unserem jetzigen Falle, wo $A_1 - a_1 = 0$ vorausgesetzt wurde, die spätesten Glieder nicht unendlich gross oder beziehungsweise unendlich klein werden, sondern einer bestimmten Grenze sich immer mehr und mehr nähern, erhellt aus folgenden Betrachtungen:

Sei zuerst $A_g - a_g > 0$, also die Reihe (1) steigend und vergleichen wir dieselbe mit folgender:

$$\infty,\ \left(\frac{2}{1}\right)^k u_2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^k u_3,\ \left(\frac{4}{3}\right)^k u_4,\ \dots \left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n,\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^k u_{n+1},\ \dots (8)$$

so haben wir, wenn die Glieder derselben mit U_n bezeichnet werden,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n^2-1)^k\,.\,u_{n+1}}{n^{2k}\,.\,u_n} = \frac{(n^2-1)^k\,(n^h + A_1 n^{h-1} + \dots + A_h)}{n^{2k}\,(n^h + a_1 n^{h-1} + \dots + a_h)},$$

somit, wegen:

$$(n^2 - 1)^k = n^{2k} - kn^{2k-2} + \frac{k(k-1)}{1.2} n^{2k-4} - \ldots,$$

nach verrichteter Multiplikation im Zähler und Nenner:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k+h} + A_1 n^{2k+h-1} + (A_2 - k) n^{2k+h-2} + \ldots}{n^{2k+h} + a_1 n^{2k+h-1} + a_2 n^{2k+h-2} + \ldots}.$$

Da nun $A_1 - a_1 = 0$, so hängt das Steigen oder Fallen der Reihe (8) von der ersten nicht verschwindenden Differenz gleichnamiger Coefficienten ab; diese ist hier:

$$A_2 - k - a_2 = (A_2 - a_2) - k,$$

und man kann k offenbar immer so gross wählen, dass diese Differenz negativ, und dadurch die Reihe (8) eine fallende wird.*) Nun ist aber, da n eine positive ganze Zahl, immer $\left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n > u_n$, d. h. die Glieder der fallenden Reihe (8) sind fort und fort grösser als die correspondirenden der steigenden Reihe (1), woraus folgt, dass die Glieder der ersteren nicht unendlich klein, die der letzteren nicht unendlich gross werden können und daher einer und derselben bestimmten Grenze sich nähern müssen.

Sei ferner $A_g - a_g < 0$, somit die Reihe (1) eine fallende und vergleichen wir dieselbe mit der Reihe:

$$0, \left(\frac{1}{2}\right)^k u_2, \left(\frac{2}{3}\right)^k u_3, \left(\frac{3}{4}\right)^k u_4, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^k u_n, \left(\frac{n}{n+1}\right)^k u_{n+1} \ldots \quad (9)$$

Für diese Reihe wird

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k} . u_{n+1}}{(n^2 - 1)^k . u_n} = \frac{n^{2k} (n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)}{(n^2 - 1)^k (n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h)},$$

und nach gehöriger Entwickelung:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k+h} + A_1 n^{2k+h-1} + A_2 n^{2k+h-2} + \ldots}{n^{2k+h} + a_1 n^{2k+h-1} + (a_2 - k) n^{2k+h-2} + \ldots}.$$

Das Steigen oder Fallen der Reihe (9) hängt nun, da $A_1 - a_1 = 0$, von der Differenz $(A_2 - a_2) + k$ ab, und man kann offenbar k immer so gross wählen, dass diese Differenz positiv wird. Dann ist aber die Reihe (9) eine steigende, und da $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k . u_n$ immer $< u_n$, die Glieder dieser steigenden Reihe somit immer kleiner sind als die correspondirenden Glieder der fallenden Reihe (1), so schliesst man wieder,

---

*) Ist, wie oben vorausgesetzt wurde, $A_2 - a_2 = 0$, so genügt jeder positive Werth von k dieser Bedingung.

wie im vorigen Falle, dass die Glieder beider Reihen sich einer und derselben bestimmten Grenze nähern müssen.

4) Die bisherigen Untersuchungen geben über das Steigen oder Fallen der Reihe (1) zuverlässige Auskunft, und man sieht, dass die Reihe nur dann convergiren könne, wenn $A_1 - a_1 < 0$, oder negativ ist, weil nur in diesem Falle die spätesten Glieder unendlich klein werden. Ueberdies wird zur Convergenz der Reihe (1) noch erfordert, dass $a_1 - A_1 > +1$ sei.

Um dies nachzuweisen, vergleichen wir die Reihe (1) mit der Reihe:

$$u_1,\ 2^k u_2,\ 3^k u_3,\ 4^k u_4,\ \ldots n^k u_n,\ (n+1)^k u_{n+1}\ \ldots, \qquad (10)$$

deren Glieder wieder mit U_n bezeichnet werden mögen, so haben wir:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^k . u_{n+1}}{n^k . u_n} = \frac{(n+1)^k (n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)}{n^k (n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h)},$$

d. i. gehörig entwickelt:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{h+k} + (A_1 + k) n^{h+k-1} + \ldots}{n^{h+k} + a_1 n^{h+k-1} + \ldots}.$$

Ist nun $a_1 - A_1 > 1$, so kann man immer $k > 1$ und so wählen, dass die Differenz $A_1 + k - a_1 = k - (a_1 - A_1)$ negativ werde; dann werden aber, vermöge 2), die Glieder der Reihe (10) beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein, so dass $\lim n^k . u_n = 0$, während $k > 1$, woraus nach §. 33, *a*) die Convergenz der Reihe (1) folgt.

Ist jedoch $a_1 - A_1 \leqq 1$, und man setzt $k = 1$, so wird die Differenz $k - (a_1 - A_1)$ entweder $= 0$ oder > 0; im ersten Falle nähert sich nach 3) die Grösse $n . u_n$ einer bestimmten von Null verschiedenen Grenze, im letzteren wird dieselbe nach 1) mit wachsendem n unendlich gross; in beiden Fällen hat also $\lim n . u_n$ einen von Null verschiedenen Werth, womit nach §. 33, *b*) die Divergenz der Reihe (1) erwiesen ist.

Die Convergenz der Reihe (1) ist demnach an die Bedingung $a_1 - A_1 > +1$ gebunden.

35. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

1) Die Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

divergirt; denn es ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}},\ \text{somit}\ A_1 - a_1 = -1,\ a_1 - A_1 = +1;$$

die Reihe ist also zwar eine fallende, deren späteste Glieder unendlich klein werden, weil $A_1 - a_1 < 0$, wie man dies auch unmittelbar erkennt; sie divergirt aber, weil $a_1 - A_1$ die Einheit nicht übersteigt.

2) Für die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

findet man:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2}n};$$

da nun $a_1 - A_1 = +\frac{3}{2} > 1$, so ist die Reihe convergent.

3) Betrachten wir die Reihe der Binomialcoefficienten:

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \ldots, \tag{a}$$

in welcher, damit die Reihe nicht abbreche, m keine positive ganze Zahl bedeuten soll. Man findet:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = -\frac{n-m}{n+1};$$

das negative Zeichen des Quotienten deutet an, dass die Zeichen der Glieder der Reihe früher oder später (und zwar sobald $n > m$ geworden ist) zu wechseln beginnen, daher zur Convergenz nur noch das unendliche Abnehmen der Glieder erfordert wird. Dies findet statt, wenn $A_1 - a_1 = -m - 1$ negativ ist, was dann der Fall sein wird, wenn m keine negative die Einheit übersteigende Zahl ist.

Für die Reihe:

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} \mp \ldots \tag{b}$$

wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1},$$

woraus erhellt, dass der im Anfange stattfindende Zeichenwechsel, sobald $n > m$ geworden, aufhört; zur Convergenz der Reihe wird daher erfordert, dass $a_1 - A_1 = 1 + m > +1$ sei: diese Reihe convergirt daher für jeden positiven Werth von m.

4) Untersuchen wir noch die Reihe:

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\;.\;2\;.\;\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\ldots,\qquad (c)$$

wobei wir voraussetzen, dass α, β, γ keine ganzen negativen Zahlen und von 0 verschieden seien, damit die Reihe weder abbreche, noch durch Glieder, deren Nenner $=0$ werden, eine Störung erleide. Man hat:

$$u_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;(n-1)\;.\;\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)},$$

folglich:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}=\frac{n^2+(\alpha+\beta-2)n+(\alpha-1)(\beta-1)}{n^2+(\gamma-1)n}.$$

Hier ist $A_1=\alpha+\beta-2$, $a_1=\gamma-1$, also $A_1-a_1=\alpha+\beta-\gamma-1$; die Glieder der Reihe werden also unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem $\alpha+\beta-\gamma-1$ positiv oder negativ; sie nähern sich fortwährend einer bestimmten Grenze, wenn $\alpha+\beta-\gamma-1=0$, und zwar steigend oder fallend, je nachdem $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-\gamma$ positiv oder negativ ist. Die Reihe convergirt aber nur dann, wenn $a_1-A_1>1$, d. i. $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ist.

Für $\beta=1$ verwandelt sich die obige Reihe in folgende:

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\ldots,\qquad (d)$$

deren Glieder unendlich zu- oder abnehmen, je nachdem $\alpha-\gamma$ positiv oder negativ ist, und deren Convergenz an die Bedingung $\gamma-\alpha>1$ geknüpft ist.

36. Mit Hilfe der so eben untersuchten Reihe (d) [§. 35] beweist man noch leicht die folgende Regel:

Die Reihe $u_1+u_2+u_3+\ldots.$ convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth:

$$\lim n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=h$$

grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Es sei zunächst $h>1$, und θ eine zwischen 1 und h liegende Zahl, so muss von irgend einem bestimmten Werthe von $n=k$ angefangen, das Produkt $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ grösser als θ bleiben, weil es sich der Voraussetzung zufolge der Grenze $h>\theta$ unendlich nähert. Es ist daher:

$$k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)>\theta,\;(k+1)\left(1-\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}\right)>\theta,\;(k+2)\left(1-\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}\right)>\theta,$$

u. s. w.

Hieraus folgt:

$$u_{k+1} < \frac{k-\theta}{k} u_k; \quad u_{k+2} < \frac{k+1-\theta}{k+1} u_{k+1} < \frac{k-\theta}{k} \cdot \frac{k+1-\theta}{k+1} u_k;$$

$$u_{k+3} < \frac{k+2-\theta}{k+2} u_{k+2} < \frac{k-\theta}{k} \cdot \frac{k+1-\theta}{k+1} \cdot \frac{k+2-\theta}{k+2} u_k; \text{ u. s. w.}$$

Addirt man diese Ungleichungen, mit Hinzufügung der Gleichung $u_k = u_k$, so kommt:

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \ldots <$$

$$u_k\left[1 + \frac{k-\theta}{k} + \frac{(k-\theta)(k-\theta+1)}{k(k+1)} + \frac{(k-\theta)(k-\theta+1)(k-\theta+2)}{k(k+1)(k+2)} + \ldots\right];$$

die Reihe in den Klammern geht aber aus der Reihe (d) [§. 35] hervor, wenn man $\alpha = k - \theta$, und $\gamma = k$ setzt, und convergirt, weil $\gamma - \alpha = \theta$ grösser als 1; mithin ist auch die Reihe linker Hand eine convergirende.

Ist $h < 1$ *), und θ eine zwischen h und 1 liegende Zahl, so muss wieder von einem bestimmten Werthe von $n = k$ angefangen das Produkt $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ kleiner als θ bleiben, und man erhält nun:

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \ldots > u_k \cdot R,$$

wo mit R die oben in den eckigen Klammern stehende Reihe bezeichnet ist. Diese Reihe ist aber nunmehr divergent, weil $\theta < 1$, also divergirt auch die Reihe $u_k + u_{k+1} + \ldots$.

Für $h = 1$ lässt dieses Kennzeichen die Beschaffenheit der Reihe unentschieden; meistens ist dann $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ von der Einheit verschieden, so dass das in §. 30 entwickelte Kennzeichen zum Ziele führt, und umgekehrt.

So ergibt sich z. B. durch Anwendung des obigen Kennzeichens unmittelbar die Gauss'sche Regel für die Convergenz einer Reihe, für welche

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots};$$

denn man findet sofort:

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{(a_1 - A_1)n^h + (a_2 - A_2)n^{h-1} + \ldots}{n^h + a_1 n^{h-1} + \ldots} =$$

$$= \frac{(a_1 - A_1) + (a_2 - A_2)\frac{1}{n} + \ldots}{1 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + \ldots},$$

*) Da die Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$, wenn sie convergiren soll, eine fallende sein muss, so ist $u_{n+1} < u_n$ und es kann daher h nicht negativ sein.

ein Ausdruck, dessen Grenzwerth $= a_1 - A_1$ ist; die Reihe convergirt also, wenn $a_1 - A_1 > 1$.

37. Wir haben schon im §. 24 bemerkt, dass bei Reihen mit positiven und negativen Gliedern die Ordnung der Glieder nicht ohne weiteres verändert werden darf, weil hiedurch die Beschaffenheit der Reihe sich ändern und die etwa früher vorhandene Convergenz verloren gehen, oder wohl auch, wenn dies nicht geschieht, die Summe der Reihe eine andere werden kann.

Betrachten wir z. B. die bekanntlich convergirende Reihe:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots, \quad (1)$$

und bilden aus derselben die Reihe:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots, \quad (2)$$

indem wir auf je zwei positive Glieder ein negatives folgen lassen, so ist wohl auch die Reihe (2) convergent, ihre Summe S' jedoch von S verschieden.

Denn setzen wir:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$S'_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n},$$

so werden sich, da beide Summen bis zu dem negativen Gliede $-\frac{1}{2n}$ fortschreiten, in der Differenz $S'_n - S_n$ sämmtliche negative Glieder aufheben, eben so die positiven bis zu jenem $\frac{1}{2n-1}$ inclusive, so dass:

$$S'_n - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \ldots + \frac{1}{4n-1}.$$

Hieraus folgt beim unendlichen Wachsen von n:

$$S' - S = \lim\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right).$$

Die eingeklammerte Reihe enthält n Glieder und ihr Werth liegt nothwendig zwischen den Grenzen $n \cdot \frac{1}{4n-1}$ und $n \cdot \frac{1}{2n+1}$, also um so mehr zwischen den Grenzen $n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$ und $n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, wie gross man auch n nehmen mag. Bezeichnet man diesen Grenzwerth

mit k, wo also k eine zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegende Zahl bedeutet, so ist:

$$S' = S + k,$$

woraus folgt, dass die Reihe (2) zwar convergirt, wie die (1), ihre Summe aber eine andere ist.

Der Werth von k lässt sich leicht bestimmen. Da wir nunmehr der Convergenz beider Reihen versichert sind, so steht nach dem am Schlusse des §. 24 Gesagten nichts im Wege, die Glieder in Gruppen zu vereinigen und zu setzen:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{(4n-2)} + \frac{1}{(4n-1)} - \frac{1}{4n}\right) + \dots$$

$$S' = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

Hieraus folgt:

$$S' - S =$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{2} S.$$

Es ist demnach $S' = \frac{3}{2} S$.

Ein anderes Beispiel bietet die Reihe:

$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots, \qquad (3)$$

welche, zufolge §. 28 convergirt. Versetzen wir wieder die Glieder wie im vorhergehenden Beispiele, so erhält man die Reihe:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots. \qquad (4)$$

von deren Divergenz man sich leicht auf folgende Weise überzeugt. Bezeichnen wir wieder mit S_n und S'_n die Summe der Anfangsglieder beider Reihen bis einschliesslich zum Gliede $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$, so erhalten wir auf gleiche Weise wie oben:

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Diese Summe besteht aus n Gliedern und ist nothwendig grösser als $n \cdot \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$, also um so mehr grösser als $\frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$, welcher Ausdruck mit n unendlich gross wird. Man hat also $\lim S'_n = S + \infty$ woraus die Divergenz der Reihe (4) folgt.

Durch Verallgemeinerung des in diesen Beispielen angewendeten Verfahrens lassen sich nun leicht allgemeine Sätze über die Beschaffenheit der Reihen gewinnen, welche aus anderen durch Aenderung in der Ordnung der Glieder entstanden sind.

Es sei:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{A}$$

eine convergirende Reihe mit positiven und negativen Gliedern, aus welcher durch Versetzung der Glieder nach einem bestimmten Gesetze die Reihe:

$$S' = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{B}$$

gebildet werden möge. Endlich sei:

$$\Sigma = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_n + \ldots \tag{C}$$

die aus (A) entstehende Reihe, indem man alle Glieder positiv nimmt. Die Reihen (A) und (C) unterscheiden sich also nur durch das Zeichen einzelner Glieder, so dass, vom Zeichen abgesehen, allgemein $u_n = t_n$. Mit S, S', Σ mögen die Summen der drei Reihen bezeichnet werden, wenn dieselben convergiren. Es können nun zwei Fälle eintreten:

1) Die Reihe (C) sei convergent. Dann convergirt nothwendig auch die Reihe (B), wenn man alle Glieder positiv nimmt [§. 24], um so mehr daher bei dem stattfindenden Zeichenwechsel. Die Summen Σ, S, S' haben daher bestimmte endliche Werthe.

Es seien nun Σ_n und E_{n+1} die Summe von n Anfangsgliedern und die zugehörige Ergänzung der Reihe (C), so ist

$$\Sigma_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n, \quad E_{n+1} = t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots,$$
$$\lim \Sigma_n = \Sigma, \qquad \lim E_{n+1} = 0.$$

Ebenso sei S_n die Summe von n Anfangsgliedern der Reihe (A), also:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad \lim S_n = S.$$

Setzen wir, was immer möglich, die Reihe (B) so weit fort, dass unter ihren $n + k$ ersten Gliedern sich die n ersten Glieder $u_1, u_2, \ldots u_n$ der Reihe (A) befinden, und nennen S'_{n+k} die Summe dieser $n + k$ ersten Glieder der Reihe (B) so ist:

$$S'_{n+k} = S_n + \sigma,$$

wo S_n die Summe der den beiden endlichen Reihen gemeinschaftlichen, σ die Summe der übrigen k Glieder ist. Lässt man n unendlich gross werden, so folgt aus dieser Gleichung: $\lim S'_{n+k} = \lim S_n + \lim \sigma$, d. i. $S' = S + \lim \sigma$. Da aber die ersten n Glieder $u_1, u_2, \ldots u_n$, und nur diese, auch in der Summe Σ_n enthalten sind, so muss σ, wenn man nöthigen Falles alle Glieder positiv macht, nothwendig einen Theil der Ergänzung E_{n+1} bilden und somit, da $\lim E_{n+1} = 0$, um so mehr $\lim \sigma = 0$, also $S' = S$ sein. Hieraus folgt der Satz:

Der Werth der Summe einer convergirenden Reihe, welche positive und negative Glieder enthält, ist von der Ordnung der Glieder unabhängig, sobald die Reihe convergent bleibt, wenn man alle Glieder mit positiven Zeichen nimmt.

Die beiden Reihen (1) und (3) in den obigen Beispielen genügen dieser Bedingung nicht, indem sie, wenn man allen Gliedern das positive Zeichen gibt, sich in Reihen verwandeln, deren Divergenz für die erstere in §. 27 nachgewiesen wurde, für die letztere mittelst des im §. 31 vorgetragenen Kennzeichens leicht erkannt wird.

2) Die Reihe (C) ist divergent. Setzen wir die Reihe (B) so weit fort, dass darin alle negativen Glieder vorkommen, welche in den k ersten Gliedern der Reihe (A) enthalten sind, und keine anderen negativen Glieder; sind nun hiezu $k \pm l$ Glieder der Reihe (B) erforderlich, so werden sich die Summen S_k und $S'_{k\pm l}$ nur dadurch unterscheiden, dass in der einen eine Anzahl positiver Glieder fehlt, welche in der anderen enthalten sind. Nennen wir daher die Summe der letzteren σ, so ist:

$$S'_{k\pm l} = S_k \pm \sigma.$$

Lassen wir nun k unendlich gross werden, so sind drei Fälle möglich:

a) Ist $\lim \sigma = 0$, so wird $\lim S'_{k\pm l} = \lim S_k$, somit, da der Voraussetzung zufolge $\lim S_k = S$ eine bestimmte endliche Grösse ist, auch

$S' = S$; die Reihe (B) ist daher convergent und ihre Summe gleich jener von (A).

b) Ist $\lim \sigma = h$ ein endlicher bestimmter Werth, so wird $S' = S + h$; die Reihe (B) convergirt daher gleichfalls, sie hat jedoch eine andere Summe, als die Reihe (A).

c) Ist $\lim \sigma = \infty$, so wird $S' = S + \infty$, und die Reihe (B) ist divergent.

Die beiden letzteren Fälle sind durch die zwei obigen Beispiele vertreten; um auch den ersten Fall zu erläutern, bilden wir wieder aus der Reihe (1), welche durch Beseitigung des Zeichenwechsels divergent wird, die Reihe:

$$-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \ldots, \quad (5)$$

indem wir immer je zwei aufeinanderfolgende Glieder versetzen, so wird für $k = 2n$:

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$S'_{k \pm l} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n},$$

folglich $S'_{k \pm l} - S_k = -\sigma = -\frac{1}{2n-1}$, und $\lim \sigma = 0$. Die Reihe (5) ist daher convergent und hat mit (1) die gleiche Summe.

38. Von besonderer Wichtigkeit sind in der Analysis jene unendlichen Reihen, deren Glieder nach den steigenden mit positiven ganzen Exponenten versehenen Potenzen einer Variablen x fortschreiten, also von der Form:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots \quad (1)$$

sind, wobei die von x unabhängigen Coefficienten a_0, a_1, a_2, u. s. f. wieder für sich eine Reihe darstellen.

Da x eine veränderliche Grösse vorstellt, so kann nur die Frage sein, für welche Werthe von x die Reihe (1) convergire. Hiezu wird nach dem in §. 30 entwickelten Kennzeichen erfordert, dass

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} = \lim x . \frac{a_{n+1}}{a_n} = x . \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

somit, wenn wir der Kürze wegen $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ setzen,

$$x < \frac{1}{A}$$

sei. Die Reihe (1) convergirt daher für alle Werthe von x, welche numerisch kleiner sind als $\frac{1}{A}$, d. h. welche zwischen den Grenzen $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$ liegen. Für alle ausserhalb derselben liegenden Werthe von x divergirt sie. Das Verhalten der Reihe, wenn man darin $x = \pm\frac{1}{A}$ substituirt, muss nach den früher entwickelten Vorschriften besonders untersucht werden.

Wie man sieht, können daher solche Reihen immer convergent gemacht werden, indem man x hinreichend klein nimmt; vorausgesetzt, dass der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ beim unendlichen Wachsen von n nicht unendlich wird, wie dies z. B. bei der Reihe: $1 + 1.2x + 1.2.3x^2 + 1.2.3.4.x^3 + \ldots$ der Fall wäre.

Beisp. 1) Für die Reihe:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots.n} + \ldots$$

ist $A = \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\frac{1}{n+1} = 0$; die Reihe convergirt daher für alle Werthe von x, welche zwischen $-\frac{1}{0}$ und $+\frac{1}{0}$, d. h. zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen; also für jeden beliebigen positiven oder negativen Werth von x.

2) Für die Reihe:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

hat man $A = \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\frac{n}{n+1} = 1$; daher convergirt sie für alle Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = 1$ geht die Reihe in die divergirende natürliche harmonische über; für $x = -1$ in die wegen des unendlichen Abnehmens der Glieder und des Zeichenwechsels convergirende Reihe: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

3) Für die Reihe:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2.}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

ndet man $A = \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left(-\frac{n-m}{n+1}\right) = -1$; diese Reihe con-

vergirt daher ebenfalls nur für Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = \pm 1$ selbst haben wir das Verhalten dieser Reihe in §. 35 untersucht.

39. Wenn zwei Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{2}$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren, so ist auch die durch Addition oder Subtraktion dieser Reihen enststehende neue Reihe für denselben Werth von x convergent.

Denn es sei:

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$T_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

somit:

$$S_n \pm T_n = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) x + (a_2 \pm b_2) x^2 + \ldots$$
$$+ (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1};$$

bezeichnen wir nun mit S und T die Summen der beiden unendlichen Reihen (1) und (2), so dass also $S = \lim S_n$, $T = \lim T_n$, so geht die letzte Gleichung, wenn man in derselben n unendlich wachsen lässt, wegen $\lim (S_n \pm T_n) = \lim S_n \pm \lim T_n = S \pm T$, über in:

$$S \pm T = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) x + \ldots + (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots, \tag{3}$$

woraus erhellt, dass die Summe der rechts stehenden Reihe an die Grenze $S \pm T$ gebunden ist, die Reihe somit convergirt.

40. Wenn die beiden Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{2}$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren, der allen Gliedern gleiche Zeichen ertheilt, so ist das Produkt derselben wieder eine convergente Reihe, und deren Summe gleich dem Produkte der Summen der beiden Reihen.

Setzen wir für die $(n + 1)$ ersten Glieder beider Reihen:

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$
$$T_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n,$$

so erhalten wir durch Multiplikation:

$$S_n T_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \dots + (a_0 b_n + \dots$$
$$+ a_n b_0) x^n + \dots + a_n b_n x^{2n},$$

somit ist, wenn wir die Summe der $n + 1$ ersten Glieder des Produktes mit P_n bezeichnen, also

$$P_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) x^n \quad (3)$$

setzen, offenbar

$$P_n < S_n T_n,$$

da die auf das mit x^n behaftete Glied im Produkte $S_n T_n$ folgenden und in P_n fehlenden Glieder der Voraussetzung nach sämmtlich positiv sind. Sei ferner m die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, also $m = \frac{n}{2}$ oder $= \frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade, und

$$S_m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m$$
$$T_m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_m x^m,$$

somit

$$S_m T_m = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \dots + a_m b_m x^{2m}, \quad (4)$$

so ist:

$$P_n > S_m T_m,$$

wovon man sich durch Vergleichung der beiden Ausdrücke (3) und (4) leicht überzeugt. Es ist daher:

$$S_m T_m < P_n < S_n T_n;$$

lassen wir nun n, folglich auch m unendlich wachsen, so nähern sich die Produkte $S_m T_m$ und $S_n T_n$ beide der Grenze ST, wenn wir wieder mit S und T die Summen der beiden unendlichen Reihen (1) und (2) bezeichnen, somit muss auch $\lim P_n = ST$ sein, da P_n immer zwischen den Grössen $S_m T_m$ und $S_n T_n$ eingeschlossen ist; womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Haben die beiden Reihen für den besonderen Werth von x nicht durchaus gleiche Zeichen, so können in dem Produkte $S_n T_n$ unter den, auf das mit x^n behaftete, folgenden Gliedern auch negative vorkommen, so dass dann nicht nothwendig $P_n < S_n T_n$ sein muss und die folgenden Schlüsse nicht mehr zulässig sind. In einem solchen alle muss daher das Produkt der beiden Reihen in Bezug auf seine onvergenz besonders untersucht werden.

Nur in dem Falle kann man noch der Convergenz des Produktes n voraus versichert sein, wenn zwar die beiden Reihen (1) und (2) t wechselnden Vorzeichen versehen aber so beschaffen sind, dass sie ch noch convergent bleiben, wenn man sämmtlichen Gliedern gleiche

Zeichen ertheilt. Denn das Produkt würde dann convergent sein, wenn alle Glieder in den Faktoren gleiche Zeichen hätten, folglich um so mehr, wenn Zeichenwechsel eintreten.

41. Wenn in der unendlichen Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für jeden Werth von n kleiner ist als eine endliche, übrigens willkürliche Grösse A, so ist bei dem unendlichen Abnehmen von x die Grenze der Summe dieser Reihe $= a_0$.

Denn der Voraussetzung zufolge ist:

$$\begin{array}{lll} a_2 < Aa_1, \text{ somit auch } & a_2 < Aa_1 & \text{und } a_2x^2 < Aa_1x^2 \\ a_3 < Aa_2 \quad - \quad - & a_3 < A^2a_1 & - \quad a_3x^3 < A^2a_1x^3 \\ a_4 < Aa_3 \quad - \quad - & a_4 < A^3a_1 & - \quad a_4x^4 < A^3a_1x^4 \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Addirt man diese Relationen und gibt zu beiden Seiten $a_1 x = a_1 x$ hinzu, so folgt

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots < a_1x(1 + Ax + A^2x^2 + A^3x^3 + \ldots)$$

somit, wenn wir, was immer möglich ist, $Ax < 1$, d. i. $x < \frac{1}{A}$ wählen, damit die in den Klammern stehende unendliche geometrische Reihe convergire,

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots < a_1x \cdot \frac{1}{1 - Ax};$$

da nun beim unendlichen Abnehmen von x, $\lim a_1x \cdot \frac{1}{1 - Ax} = 0$ wird, so ist auch

$$\lim(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots) = 0, \text{ folglich}$$
$$\lim(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = a_0.$$

ALLGEMEINE BEMERKUNGEN ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER FUNKTIONEN IN REIHEN. – UNBESTIMMTE COEFFICIENTEN.

42. Es sei:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine nach steigenden Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe, welche für alle Werthe von x, die zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$ liegen, convergirt, also eine bestimmte Summe hat.

Letztere wird offenbar eine Funktion von x sein, so dass die Gleichung besteht:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \begin{cases} x = -A \\ x = +A \end{cases} \quad (1)$$

Man nennt die unendliche Reihe rechts vom Gleichheitszeichen die Entwickelung der Funktion $f(x)$; der Werth der letzteren kann für jeden zwischen $-A$ und $+A$ liegenden Werth von x mit Hilfe der Reihe berechnet werden, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, indem man eine hinreichende Anzahl von Anfangsgliedern addirt. Für Werthe von x, welche ausserhalb obiger Grenzen liegen, hört die Gleichung (1) auf, giltig zu sein; daher man die Grenzwerthe von x, innerhalb welcher die Gl. (1) zulässig ist, beizufügen pflegt, etwa auf die oben in (1) angedeutete Weise.

Eine bestimmte Funktion $f(x)$ kann nur auf eine Art in eine nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe entwickelt werden. Denn hätte man z. B. nebst obiger Gleichung auch noch folgende:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \begin{cases} x = -B \\ x = +B \end{cases} \quad (2)$$

so müsste für alle innerhalb der Grenzen $-A$ und $+A$, $-B$ und $+B$ gleichzeitig liegenden Werthe von x nothwendig

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

sein, also auch für $x = 0$, woraus sogleich [§. 41] $a_0 = b_0$ folgt. Dann ist aber, für jeden Werth von x innerhalb obiger Grenzen:

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

oder

$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots),$$

folglich auch

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots,$$

woraus wieder für $x = 0$: $a_1 = b_1$ folgt. Auf dieselbe Weise fortschliessend, erhält man $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, u. s. w., so dass also die beiden Entwickelungen (1) und (2) nothwendig identisch sind. Man kann daher auch folgenden Satz aussprechen:

Besteht die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegen, wo eine dieser Grenzen auch $= 0$ sein

kann, so sind die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x einander gleich, d. h. es ist:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3, \text{ u. s. w.}$$

Dieser Lehrsatz ist unter dem Namen: Satz der unbestimmten Coefficienten bekannt, und bietet ein sehr bequemes Mittel zur Entwickelung der Funktionen in Reihen dar.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, dass, wenn die Gleichung:

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

für jeden Werth von x bestehen soll, nothwendig

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0 \text{ sein muss.}$$

43. Zur Erläuterung der Anwendung des Satzes der unbestimmten Coefficienten mögen folgende Aufgaben dienen:

1te Aufgabe. Die gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{A_0}{a_0 + a_1 x}$$

in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe zu entwickeln.

Man setze:

$$\frac{A_0}{a_0 + a_1 x} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n + \ldots,$$

so folgt durch Multiplikation mit $a_0 + a_1 x$:

$$A_0 = a_0\alpha_0 + \left.\begin{matrix} a_0\alpha_1 \\ + a_1\alpha_0 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_0\alpha_2 \\ + a_1\alpha_1 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} a_0\alpha_n \\ + a_1\alpha_{n-1} \end{matrix}\right\} x^n + \ldots,$$

somit, da diese Gleichung für jeden Werth von x gelten muss, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$A_0 = a_0\alpha_0,\quad a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 = 0,\quad a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 = 0, \text{ u. s. w.,}$$

und allgemein:

$$a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} = 0,$$

woraus man

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{a_0},\quad \alpha_1 = \alpha_0 \cdot -\frac{a_1}{a_0},\quad \alpha_2 = \alpha_1 \cdot -\frac{a_1}{a_0}, \text{ u. s. w.}$$

und allgemein:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot -\frac{a_1}{a_0} \tag{m}$$

findet. Wie man sieht, erhält man jeden Coefficienten der Reihe, vom zweiten angefangen, indem man den vorhergehenden mit $-\frac{a_1}{a_0}$ multiplicirt.

Eine Reihe von der Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

heisst überhaupt eine rekurrente (oder rekurrirende, rücklaufende, wiederkehrende), wenn von einem bestimmten Gliede angefangen der Coefficient α_n jedes folgenden Gliedes eine lineare Funktion der Coefficienten einer bestimmten Anzahl von vorhergehenden Gliedern ist; wenn man also hat:

$$\alpha_n = p_1 \alpha_{n-1} + p_2 \alpha_{n-2} + p_3 \alpha_{n-3} + \ldots + p_m \alpha_{n-m}.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Coefficienten

$$p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots p_m,$$

sind positive oder negative Zahlen, welche in ihrer bestimmten Aufeinanderfolge die sogenannte Relationsscala der Reihe bilden; die Anzahl derselben bestimmt die Ordnung der rekurrenten Reihe. Die Bildung des Coefficienten eines Gliedes einer rekurrenten Reihe der m^{ten} Ordnung nimmt daher die Coefficienten von m vorhergehenden Gliedern in Anspruch; das Bildungsgesetz kann daher erst mit dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede beginnen.

Diesen Erklärungen zufolge führt also die Entwickelung der Funktion $\frac{A_0}{a_0 + a_1 x}$ auf eine rekurrente Reihe der ersten Ordnung, deren Relationsscala: $-\frac{a_1}{a_0}$ ist, wie aus (m) erhellt.

Entwickeln wir noch die Funktion $f(x) = \frac{A_0 + A_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$; setzen wir:

$$\frac{A_0 + A_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n + \ldots,$$

so erhalten wir durch Multiplikation mit dem Nenner:

$$A_0 + A_1 x = a_0 \alpha_0 + \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_1 \\ + a_1 \alpha_0 \end{matrix}\right\} x + \ldots + \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_n \\ + a_1 \alpha_{n-1} \\ + a_2 \alpha_{n-2} \end{matrix}\right\} x^n + \ldots,$$

somit:

$$A_0 = a_0 \alpha_0, \; A_1 = a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_0, \; \ldots 0 = a_0 \alpha_n + a_1 \alpha_{n-1} + a_2 \alpha_{n-2},$$

woraus

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{a_0}, \quad \alpha_1 = \frac{A_1 - a_1 \alpha_0}{a_0},$$

und

$$\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0} \cdot \alpha_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} \cdot \alpha_{n-2}$$

folgt. Der Ausdruck von α_n zeigt, dass die Entwickelung der vorgelegten Funktion eine rekurrente Reihe der zweiten Ordnung mit der Relationsscala:

$$-\frac{a_1}{a_0}, \quad -\frac{a_2}{a_0}$$

ist. Das Bildungsgesetz beginnt hier mit dem 3ten Coefficienten α_2, und es ist:

$$\alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}\alpha_1 - \frac{a_2}{a_0}\alpha_0, \quad \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}\alpha_2 - \frac{a_2}{a_0}\alpha_1 \text{ u. s. w.}$$

Allgemein lässt sich zeigen, dass die echt gebrochene rationale Funktion:

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$$

eine rekurrirende Reihe der n^{ten} Ordnung erzeugt, deren Relationsscala

$$-\frac{a_1}{a_0}, \quad -\frac{a_2}{a_0}, \quad -\frac{a_3}{a_0}, \quad -\frac{a_4}{a_0}, \ldots -\frac{a_n}{a_0}$$

ist, so wie, dass umgekehrt jede nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete rekurrente Reihe, insofern dieselbe convergirt, einen rationalen Bruch zur Summe hat.

Einige Aufmerksamkeit auf den Gang der Rechnung in obigen zwei Beispielen zeigt, dass man in der angenommenen Reihe:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \ldots$$

nur so viele Anfangsglieder anzusetzen nöthig hat, als der Zähler Glieder besitzt, und nur so viele allgemeine Glieder, als der Nenner Glieder hat, die zwischen den äussersten Gliedern etwa fehlenden mitgezählt.

2te **Aufgabe.** Die unendliche Reihe:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

durch die gleichfalls unendliche Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

zu dividiren.

Da, wie schon in den Elementen gezeigt wird, das Produkt zweier Polynome:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m)$$

wieder ein Polynom von derselben Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ ist, so können wir den gesuchten Quotienten von der Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

annehmen, also

$$\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$$

setzen, wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ noch unbestimmte Coefficienten bedeuten, welche zu bestimmen sind. Multiplicirt man zu beiden Seiten mit dem Divisor, so kommt:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)$$

$$= a_0\alpha_0 + \left.\begin{matrix} a_1\alpha_0 \\ + a_0\alpha_1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_2\alpha_0 \\ + a_1\alpha_1 \\ + a_0\alpha_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} a_3\alpha_0 \\ + a_2\alpha_1 \\ + a_1\alpha_2 \\ + a_0\alpha_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots,$$

woraus, da die Entwickelung für jeden Werth von x gelten muss,

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0\alpha_0 \\ A_1 &= a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1 \\ A_2 &= a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2 \\ A_3 &= a_3\alpha_0 + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2 + a_0\alpha_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

folgt. Man erhält auf diesem Wege so viele Gleichungen, als man Coefficienten bestimmen will, aus welchen diese, da jene vom ersten Grade sind, leicht erhalten werden. Man findet nämlich:

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{a_0}, \quad \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}\alpha_0 + \frac{A_1}{a_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}\alpha_1 - \frac{a_2}{a_0}\alpha_0 + \frac{A_2}{a_0} \text{ u. s. w.,}$$

und allgemein:

$$\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}\alpha_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}\alpha_{n-2} - \frac{a_3}{a_0}\alpha_{n-3} - \ldots - \frac{a_n}{a_0}\alpha_0 + \frac{A_n}{a_0},$$

nach welchem einfachen Rekursionsgesetze die Coefficienten der Reihe nach leicht gebildet werden können.

Wie man sieht, wird die Auflösung unmöglich, wenn $a_0 = 0$ und nicht gleichzeitig auch $A_0 = 0$ ist, indem dann die Coefficienten unendlich würden; dieser Umstand deutet an, dass in diesem Falle der Quotient nicht die vorausgesetzte Form $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$ haben kann. In der That überzeugt man sich leicht durch gewöhnliche Division, dass er für $a_0 = 0$ mit dem Gliede $\frac{A_0}{a_1 x} = \frac{A_0}{a_1} x^{-1}$ beginnen müsse, welches Glied aber in der angenommenen Form nicht vorkommt und also auch nicht erhalten werden konnte. Man sieht leicht, dass mindestens eben so viele Anfangsglieder im Dividende $= 0$ sein müssen, als deren im Divisor fehlen, wenn der Quotient die Form $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$ haben soll.

Wollte man übrigens z. B. den Quotienten:

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots}$$

entwickeln, so setze man

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

bestimme sofort die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ wie oben, so ist:

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots} = \frac{1}{x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots).$$

Aus dem Gesagten geht demnach hervor, dass bei dem Gebrauche der Methode der unbestimmten Coefficienten zur Entwickelung der Funktionen in Reihen, die *Form der zu entwickelnden Reihe im voraus bekannt sein muss*, zu welcher Kenntniss in der Regel eine vorläufige Discussion der vorgelegten Funktion ohne Schwierigkeit führt. Hat man die Form der Reihe unrichtig gewählt, so gibt sich dies bei der Auflösung der Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten in den meisten Fällen wohl zu erkennen; doch gibt es auch Fälle, wo dies nicht geschieht und daher die Methode der unbestimmten Coefficienten zu unrichtigen Resultaten führt; ein Umstand, der vorzugsweise Veranlassung gab, dieser sonst durch ihre Einfachheit namentlich dem praktischen Mathematiker sich empfehlenden Methode strengere zu substituiren, welche jener Vorwurf nicht trifft. Ueberdies hat man zu untersuchen, für welche Werthe von x die gefundene Reihe convergirt, denn nur für solche ist sie zur numerischen Rechnung geeignet.

3[te] *Aufgabe.* Es sei die Gleichung gegeben:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \ldots; \tag{1}$$

es soll umgekehrt x durch eine Reihe ausgedrückt werden, welche nach den steigenden Potenzen von y fortschreitet.

Man setze

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \ldots,$$

so muss dieser Ausdruck von x offenbar die Eigenschaft haben, in die Gleichung (1) substituirt, diese zu einer identischen zu machen. Entwickelt man daher die aufeinanderfolgenden Potenzen von x, indem man dabei bis zu einer gewissen Potenz von y fortschreitet, nämlich:

$$x^2 = \alpha^2 y^2 + 2\,\alpha\beta y^3 + \left.\begin{matrix}\beta^2 \\ +\,2\,\alpha\gamma\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}2\,\alpha\delta \\ +\,2\,\beta\gamma\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots$$

$$x^3 = \alpha^3 y^3 + 3\,\alpha^2\beta y^4 + \left.\begin{matrix}3\,\alpha\beta^2 \\ +\,3\,\alpha^2\gamma\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots$$

$$x^4 = \alpha^4 y^4 + 4\,\alpha^3\beta y^5 + \ldots$$

$$x^5 = \alpha^5 y^5 + \ldots$$

und substituirt diese in (1), so kommt:

$$y = a\alpha y + \left.\begin{matrix}a\beta \\ +\,b\alpha^2\end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix}a\gamma \\ +\,2b\alpha\beta \\ +\,c\alpha^3\end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix}a\delta \\ +\,b\beta^2 \\ +\,2b\alpha\gamma \\ +\,3c\alpha^2\beta \\ +\,d\alpha^4\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}a\varepsilon \\ +\,2b\alpha\delta \\ +\,2b\beta\gamma \\ +\,3c\alpha\beta^2 \\ +\,3c\alpha^2\gamma \\ +\,4d\alpha^3\beta \\ +\,e\alpha^5\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von y erhält man sofort folgende Gleichungen:

$$1 = a\alpha$$
$$0 = a\beta + b\alpha^2$$
$$0 = a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3$$
$$0 = a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4$$
$$0 = a\varepsilon + 2b\alpha\delta + 2b\beta\gamma + 3c\alpha\beta^2 + 3c\alpha^2\gamma + 4d\alpha^3\beta + e\alpha^5$$

u. s. w.

aus welchen sich die Coefficienten α, β, γ, ... der Reihe nach mit Leichtigkeit ergeben. Diese Aufgabe ist, so wie die folgende, ein specieller Fall des unter dem Namen: Umkehrung oder Reversion der Reihen bekannten Problemes.

Ist, um ein besonderes Beispiel zu geben, die Reihe:

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

umzukehren, so erhält man:

$$x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots$$

Aus einigen wenigen Anfangsgliedern lässt sich übrigens mit icherheit kein Schluss auf das Bildungsgesetz der umgekehrten Reihe iehen; und dies ist ein Grund, warum man auch diese wichtige Aufabe mit Umgehung der Methode der unbestimmten Coefficienten auf nderen Wegen zu lösen suchte, wovon jedoch erst in der Folge die 'ede sein kann.

Hat die umzukehrende Reihe die Form:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$$

in welcher auch noch ein von x freies Glied a erscheint, so bringe man dieses zuerst auf die linke Seite der Gleichung, und hat dann, wenn man $y - a = z$ setzt, die Reihe:

$$z = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

umzukehren. Die umgekehrte Reihe hat nun die Form:

$$x = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots,$$

wo die Coefficienten nach obiger Vorschrift zu bestimmen sind. Durch Wiederherstellung des Werthes von z erhält man endlich:

$$x = \alpha(y - a) + \beta(y - a)^2 + \gamma(y - a)^3 + \ldots$$

Das Gesetz, nach welchem die Exponenten der Potenzen von y in der umgekehrten Reihe aufeinanderfolgen, hängt übrigens von jenem ab, nach welchem die Exponenten von x in der gegebenen Reihe fortschreiten. Ist diese allgemein:

$$y = ax^k + bx^{k+h} + cx^{k+2h} + dx^{k+3h} + \ldots,$$

so hat die umgekehrte Reihe folgende Form:

$$x = \alpha y^{\frac{1}{k}} + \beta y^{\frac{1+h}{k}} + \gamma y^{\frac{1+2h}{k}} + \delta y^{\frac{1+3h}{k}} + \ldots$$

4te Aufgabe. Es ist die Gleichung gegeben:

$$ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots;$$

man soll y durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe ausdrücken.

Setzt man:

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots,$$

so muss dieser Werth von y die Eigenschaft haben, in die gegebene Gleichung substituirt, diese identisch zu machen. Entwickelt man daher die aufeinanderfolgenden Potenzen von y, (wie in der vorigen Aufgabe, nur x mit y vertauschend) und substituirt dieselben in die gegebene Gleichung, so erhält man zur Bestimmung von α, β, γ, ... folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= a\alpha \\
B &= a\beta + b\alpha^2 \\
C &= a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3 \\
D &= a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4 \\
E &= a\varepsilon + 2b\alpha\delta + 2b\beta\gamma + 3c\alpha\beta^2 + 3c\alpha^2\gamma + 4d\alpha^3\beta + e\alpha^5.
\end{aligned}$$

u. s. w.

DRITTES KAPITEL.

VON DEN IMAGINÄREN GRÖSSEN UND DEN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN MIT IMAGINÄREN VERÄNDERLICHEN.

---

44. Schon in der Elementar-Mathematik begegnet man Zahlen von der Form $\sqrt[2n]{-a}$, womit, nach dem Begriffe einer Wurzelgrösse, eine Zahl bezeichnet werden soll, welche zur $2n^{\text{ten}}$ (also einer geraden) Potenz erhoben, ein negatives Resultat $-a$ gibt. Eine solche Zahl existirt aber bekanntlich weder in der Reihe der positiven noch negativen Zahlen, daher man Grössen von obiger Form imaginäre Grössen genannt hat, im Gegensatz zu den reellen Grössen, deren Werth durch positive oder negative Zahlen entweder genau oder mit beliebigem Grade der Annäherung ausgedrückt werden kann.

Während man aber in den Elementen nur gelegentlich, z. B. bei Auflösung der Gleichungen des 2ten Grades Veranlassung findet, imaginäre Zahlformen zu betrachten und dort das Erscheinen solcher Grössen in dem Resultate einer Aufgabe ganz einfach als Kriterium betrachtet wird, dass der vorgelegten Aufgabe durch reelle Werthe nicht genügt werden kann, spielen diese Grössen in der Analysis eine höchst wichtige Rolle, deren Umfang in der Folge deutlich hervortreten wird.

45. Die allgemeine Form, auf welche, wie sich später ergeben wird, jede imaginäre Grösse gebracht werden kann, ist $p + q\sqrt{-1}$, wo p und q reelle Grössen bedeuten. Unter dieser Form ist übrigens auch jede reelle Grösse begriffen, wenn man $q = 0$ denkt. Man nennt häufig Grössen dieser Form complexe Grössen, zum Unterschiede von rein imaginären, in welchen der reelle Theil fehlt. Die imaginäre inheit $\sqrt{-1}$ pflegt man häufig der Kürze wegen mit dem Buchstaben zu bezeichnen und es ist mit Rücksicht auf den Begriff der Wurzelösse:

$$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^4 = +1,\ i^6 = -1,\ i^8 = +1 \ldots$$
$$i^3 = -i,\ i^5 = +i,\ i^7 = -i,\ i^9 = +i \ldots$$

46. Unter Summe, Differenz, Produkt und Quotienten complexer Grössen versteht man die Resultate, welche erhalten werden, wenn man dieselben den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nach denselben Regeln unterwirft, welche die Arithmetik für reelle Grössen aufstellt. Hiernach ist:

$$(p + qi) + (p' + q'i) = (p + p') + (q + q')\,i = P + Qi$$
$$(p + qi) - (p' + q'i) = (p - p') + (q - q')\,i = P + Qi,$$
$$(p + qi)\,(p' + q'i) = (pp' - qq') + (pq' + qp')\,i = P + Qi,$$
$$\frac{p + qi}{p' + q'i} = \frac{(p + qi)(p' - q'i)}{(p' + q'i)(p' - q'i)} = \frac{pp' + qq' + (p'q - pq')\,i}{p'^2 + q'^2} =$$
$$= \frac{pp' + qq'}{p'^2 + q'^2} + \frac{p'q - pq'}{p'^2 + q'^2}\,i = P + Qi,$$

woraus man zugleich ersieht, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier oder mehrerer complexer Grössen wieder eine complexe Grösse von derselben Form $P + Qi$ ist.

47. Soll die Gleichung

$$p + qi = p' + q'i \tag{1}$$

bestehen, so muss nothwendig

$$p = p', \quad q = q' \tag{2}$$

sein, weil sonst $i = \dfrac{p' - p}{q - q'}$ folgen würde, was ungereimt ist, da die imaginäre Grösse $i = \sqrt{-1}$ durch reelle Grössen nicht ausgedrückt werden kann.

Setzt man in (1) $p' = q' = 0$, so findet man mit Rücksicht auf (2), dass die Gleichung

$$p + qi = 0 \tag{3}$$

die Gleichungen

$$p = 0, \quad q = 0 \tag{4}$$

zur nothwendigen Folge hat. Von diesen in den Gleichungen (1), (2) und (3), (4) ausgesprochenen Sätzen werden wir oft Gebrauch machen. Als eine Folge hievon kann bemerkt werden, dass man zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, wo A und B was immer für reelle Ausdrücke bedeuten, immer in die eine: $A + Bi = 0$ zusammenziehen kann.

Zwei complexe Grössen, wie $p + qi$ und $p - qi$, welche sich nur durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheiden, heissen c o n j u g i r t. Wie man sieht, ist ihre Summe $= 2p$, so wie ihr Produkt $= p^2 + q^2$, reell.

48. Jede complexe Grösse $p + qi$ kann auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht werden, wo r eine positive Grösse und φ einen reellen Bogen bezeichnet. Denn damit

$$p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

werde, muss in Folge des vorigen §.

$$p = r\cos\varphi,\ q = r\sin\varphi \tag{2}$$

sein, und die Werthe von r und φ lassen sich immer so bestimmen, dass diese zwei Gleichungen erfüllt werden. Quadrirt und addirt man nämlich die Glgn. (2), so erhält man, weil $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$: $r^2 = p^2 + q^2$, woraus

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{3}$$

folgt, welche Grösse nothwendig reell ist. Ferner folgt aus (2):

$$\text{Sin}\,\varphi = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\ \cos\varphi = \frac{p}{r} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \tag{4}$$

welche Gleichungen, da $\sqrt{p^2 + q^2} \gtrless \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$ ist, immer erfüllt werden können. Auch ergibt sich durch Division der Glgn. (2):

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{q}{p},\ \text{und}\ \varphi = \text{arc tg}\,\frac{q}{p}, \tag{5}$$

woraus man ebenfalls erkennt, dass, da die Tangente jedes Werthes von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist, immer ein Bogen φ existirt, welcher der in (5) ausgesprochenen Bedingung genügt.

Man nennt die Grösse $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ den M o d u l u s der complexen Grösse $p + qi$, und nimmt, wie gesagt, denselben immer positiv. Für $q = 0$ geht die complexe Grösse $p + qi$ in die reelle p, und der Modulus in $r = \sqrt{p^2} = p$ über, d. h. der Modulus einer reellen Grösse ist diese Grösse, ihrem absoluten Werthe nach, selbst. Auch sieht man leicht, dass zwei conjugirte Ausdrücke denselben Modulus besitzen. Das Binom $\cos\varphi + i\sin\varphi$ heisst der r e d u c i r t e Ausdruck. — Mit Hilfe dieser Umformung gestalten sich die Rechnungen mit imaginären Ausdrücken in der Regel weit einfacher.

49. Es sei:

$$p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$p' + q'i = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

so erhalten wir durch Multiplikation:

$$(p + qi)(p' + q'i) = rr'(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

und es kommt nun nur auf die Bildung des Produktes der reducirten Ausdrücke an. Es ist aber:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' \\ + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi'),$$

somit nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi'). \quad (1)$$

Multiplicirt man dieses Produkt mit einem ähnlichen dritten Faktor, so erhält man durch zweimalige Anwendung von (1):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') = \\ = \{\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\}(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') \\ = \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'') + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi''),$$

und da wir denselben Vorgang offenbar auf beliebig viele Faktoren ausdehnen können, so ist:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'')\ldots\ldots = \\ = \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots), \quad (2)$$

woraus man sieht, dass sich die Multiplikation reducirter Ausdrücke in eine blosse Addition der Bögen verwandelt.

Setzt man in (1) $-\varphi'$ an die Stelle von φ', so kommt, weil bekanntlich $\cos(-\varphi') = \cos\varphi'$ und $\sin(-\varphi') = -\sin\varphi'$ ist,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi') = \cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'), \quad (3)$$

und wenn man in dieser Gleichung $\varphi' = \varphi$ setzt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1, \quad (4)$$

woraus man erkennt, dass das Produkt zweier conjugirter reducirter Ausdrücke immer $= 1$ ist, wovon man sich auch durch unmittelbare Multiplikation leicht überzeugt.

Mit Hilfe der Gl. (4) erhält man ferner:

$$\frac{\cos\varphi' + i\sin\varphi'}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = (\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

folglich mit Rücksicht auf (3):

$$\frac{\cos\varphi' + i\sin\varphi'}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi), \quad (5)$$

welche Gleichung die Regel für die Division zweier reducirter Ausdrücke enthält.

50. Man beweist leicht folgende Sätze:

1) Der Modulus des Produktes zweier complexer Grössen ist gleich dem Produkte der Moduli der Faktoren.

Denn setzen wir:

$$\begin{aligned} p + qi &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ p' + q'i &= r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \end{aligned} \qquad (1)$$

so ist:

$$(p + qi)(p' + q'i) = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')];$$

bezeichnet nun ϱ den Modulus des Produktes, so ist:

$$\varrho = \sqrt{\{(rr')^2 \cos(\varphi + \varphi')^2 + (rr')^2 \sin(\varphi + \varphi')^2\}} = rr'$$

d. h. = dem Produkte der Moduli r und r' der Faktoren. Dass der Satz nun auf eine beliebige Anzahl von Faktoren ausgedehnt werden kann, ist für sich klar. Setzt man diese Faktoren einander gleich, so ergibt sich sogleich folgender Satz:

2) Der Modulus der n^{ten} Potenz einer complexen Grösse, (unter n eine positive ganze Zahl verstanden) ist gleich der n^{ten} Potenz des Modulus der Wurzel.

3) Der Modulus der Summe mehrerer von einander verschiedener complexer Grössen ist stets kleiner als die Summe der Moduli der einzelnen Summanden.

Denn es folgt aus den Gleichungen (1):

$$(p + qi) + (p' + q'i) = (r\cos\varphi + r'\cos\varphi') + i(r\sin\varphi + r'\sin\varphi');$$

ist aber wieder ϱ der Modulus der Summe, so hat man:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\{(r\cos\varphi + r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi + r'\sin\varphi')^2\}} \\ &= \sqrt{\{r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 + r'^2\cos\varphi'^2 + r'^2\sin\varphi'^2} \\ &\qquad \overline{+ 2rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\}} \\ &= \sqrt{\{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi')\}}. \end{aligned}$$

Da nun, so lange φ nicht $= \varphi'$, immer $\cos(\varphi - \varphi') < 1$ ist, so ist auch:

$$r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi') < r^2 + r'^2 + 2rr' = (r + r')^2,$$

d. h.
$$\varrho < r + r'.$$

Auch dieser Satz lässt sich, wie leicht einzusehen, auf eine beliebige Anzahl von Summanden ausdehnen.

VON DEN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN MIT IMAGINÄREN VERÄNDERLICHEN. — MOIVRE'SCHE BINOMIALFORMEL.

51. Erhält die unabhängig veränderliche Grösse x einer Funktion $= f(x)$ einen imaginären Werth $x = u + vi$, so bieten sich in Bezug [au]f eine solche imaginäre Funktion zunächst zwei Aufgaben dar: [1)] dieselbe in zwei Theile zu zerlegen, deren einer reell, der andere

mit dem Faktor $i = \sqrt{-1}$ behaftet ist; d. h. also die Funktion auf die Form:

$$f(u + vi) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$$

zu bringen, wo $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ reelle Funktionen von u und v bedeuten; 2) zu untersuchen, ob die für reelle Werthe der Variablen statt findenden Eigenschaften der Funktionen (für die Potenz z. B. die Eigenschaft: $x^m . y^m = (xy)^m$) giltig bleiben, wenn die Veränderlichen imaginäre Werthe erhalten. Wir wollen in dieser Beziehung zunächst die algebraischen Funktionen betrachten.

Diesen Funktionen liegt, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, die Funktion $y = x^m$, d. i. die Potenz mit variabler Basis und constantem Exponenten zu Grunde; setzen wir demnach $x = u + vi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so wird

$$y = x^m = r^m(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m \tag{a}$$

und wir haben es daher nur mit der Entwickelung der Potenz $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$ zu thun.

Nach Gl. (2), §. 49 ist:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)\ldots\ldots$$
$$= \cos(\alpha + \beta + \gamma\ldots) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma\ldots).$$

Setzt man nun $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ und die Anzahl der Faktoren $= m$, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha, \tag{1}$$

welche wichtige Formel unter dem Namen Moivre'sche Binomialformel bekannt ist. Ihre Richtigkeit erhellt aus der gegebenen Ableitung für jeden beliebigen Werth des Bogens α, und für jeden ganzen und positiven Werth des Exponenten m. Sie gilt aber auch für gebrochene und negative Werthe von m.

Aus (1) folgt nämlich, indem man aus beiden Theilen die m^{te} Wurzel zieht und gleich transponirt:

$$(\cos m\alpha + i\sin m\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

und wenn man in dieser Gleichung $\frac{\alpha}{m}$ statt α schreibt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m};$$

erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur n^{ten} Potenz, so erhält man, wenn n eine ganze positive Zahl ist, nach (1):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}\alpha + i\sin\frac{n}{m}\alpha;$$

diese Gleichung resultirt aber aus (1), wenn man dort an die Stelle von m den Bruch $\frac{n}{m}$ treten lässt; somit gilt (1) auch für den Fall, wenn der Exponent ein rationaler positiver Bruch ist.

Nach Gl. 4, §. 49, hat man ferner:

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad \text{oder}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha);$$

erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur m^{ten} Potenz, wo m eine ganze oder gebrochene positive Zahl, so kommt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = [\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]^m,$$

d. i. wenn man auf den zweiten Theil die Gl. (1) anwendet:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \cos(-m\alpha) + i\sin(-m\alpha);$$

diese Gleichung geht aber auch aus (1) hervor, indem man $-m$ statt $+m$ schreibt; folglich gilt (1) auch für negative Werthe des Exponenten m.

Ist endlich m eine rationale veränderliche Zahl, welche sich der irrationalen Zahl r ohne Ende nähert, so kann man $m = r + \delta$ setzen, wo δ eine unendlich abnehmende Grösse ist; führt man diesen Werth in (1) ein, so folgt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{r+\delta} = \cos(r + \delta)\alpha + i\sin(r + \delta)\alpha,$$

welche Gleichung, wenn man δ unendlich klein werden lässt, in

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^r = \cos r\alpha + i\sin r\alpha$$

sich verwandelt Es gilt demnach die Gl. (1) für jeden ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Werth des Exponenten m.

Setzt man in (1) $-\alpha$ an die Stelle von α, so folgt:

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha - i\sin m\alpha,$$

welcher Ausdruck aus (1) auch dadurch hervorgeht, wenn man $-i$ an die Stelle von i treten lässt.

Mit Hilfe der Moivre'schen Binomialformel geht die Gleichung (a) über in:

$$\begin{aligned} y = x^m &= r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) \\ &= r^m\cos m\varphi + i \,.\, r^m\sin m\varphi, \end{aligned}$$

woraus man schliesst, dass die Potenz x^m, somit auch jede zusammengesetzte algebraische Funktion von x auf die Form $p + qi$ gebracht werden kann, wenn x imaginär wird.

Ist ferner:

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad y = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

so ergibt sich, mit Rücksicht auf Gl. (1), §. 49:

$$\begin{aligned} x^m . y^m &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m . [r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]^m \\ &= r^m r'^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)(\cos m\varphi' + i\sin m\varphi') \\ &= r^m r'^m[\cos m(\varphi + \varphi') + i\sin m(\varphi + \varphi')] \\ &= r^m r'^m[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]^m \\ &= [rr'\{\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\}]^m \\ &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]^m = (x\,y)^m, \end{aligned}$$

so dass also die für reelle Werthe von x und y stattfindende Gleichung $x^m . y^m = (xy)^m$, somit auch die übrigen Eigenschaften der Potenzen für imaginäre Werthe der Wurzel giltig bleiben.

52. Die im vorigen §. entwickelte Moivre'sche Binomialformel führt zu wichtigen Folgerungen, mit deren Auseinandersetzung wir uns nun beschäftigen wollen.

Da bekanntlich allgemein, wenn r eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet,

$$\sin(\alpha + 2r\pi) = \sin\alpha, \text{ und } \cos(\alpha + 2r\pi) = \cos\alpha \tag{2}$$

ist, so folgt aus (1), wenn $\alpha + 2r\pi$ statt α gesetzt wird:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m(\alpha + 2r\pi) + i\sin m(\alpha + 2r\pi). \tag{3}$$

Diese Gleichung muss als der allgemeinere Ausdruck der m^{ten} Potenz des Binoms $\cos\alpha + i\sin\alpha$ betrachtet werden, während die Gl. (1) zwar für jeden Werth von m richtig, aber nur unter der Voraussetzung, dass m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, vollständig ist, wie aus folgenden Betrachtungen erhellt.

Bezeichnet in (3) m eine positive oder negative ganze Zahl, so geht diese Gleichung, weil bei dieser Voraussetzung $\sin(m\alpha + 2rm\pi) = \sin m\alpha$ und $\cos(m\alpha + 2rm\pi) = \cos m\alpha$ ist, in die Gl. (1) über, und die Gl. (3) liefert in diesem Falle trotz der völligen Unbestimmtheit der ganzen Zahl r nur einen Werth der Potenz $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$.

Es sei aber nun m ein auf seine kleinste Benennung gebrachter rationaler Bruch $= \frac{p}{q}$, so ist:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}(\alpha + 2r\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\alpha + 2r\pi), \tag{4}$$

und da nun die Bögen, welche aus dem Ausdrucke

$$\frac{p}{q}(\alpha + 2r\pi) = \frac{p}{q}\alpha + \frac{p}{q} . 2r\pi$$

hervorgehen, wenn man der Zahl r verschiedene Werthe beilegt, im Allgemeinen verschiedene Sinusse und Cosinusse haben, so muss man aus Gl. (4) schliessen, dass die Potenz

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{p}{q}} \tag{5}$$

mehrerer verschiedener Werthe fähig, also eine vieldeutige Grösse sei.

In der That, es lässt sich leicht zeigen, dass die Potenz $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{p}{q}}$, wo p und q relative Primzahlen bedeuten, q verschiedene Werthe besitze, weder mehr noch weniger, und dass diese erhalten werden, wenn man im zweiten Theile der Gl. (4) für r nach und nach die Zahlen: $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (q-1)$ substituirt.

Denken wir uns nämlich diese Zahlen in (4) wirklich substituirt, so sind:

1) die Substitutionsresultate, q an der Zahl, sämmtlich von einander verschieden. Denn wären irgend zwei darunter, etwa für $r = g$ und $r = h$ einander gleich, wo g und h zwei Zahlen der Reihe $0, 1, 2, 3, ..(q-1)$ vorstellen, so müsste

$$\frac{p}{q}(\alpha + 2g\pi) = \frac{p}{q}(\alpha + 2h\pi) + 2k\pi$$

sein, wo k irgend eine ganze Zahl, weil nur solche Bögen, welche um eine Anzahl ganzer Peripherieen von einander verschieden sind, gleiche Sinusse und Cosinusse haben. Aus dieser Gleichung folgt aber $p(g-h) = qk$; der zweite Theil dieser Gleichung ist durch q theilbar, folglich müsste dies auch mit dem ersten Theile der Fall sein, und da der Voraussetzung nach p und q unter sich prim sind, so müsste $g-h$ durch q theilbar sein, was mit Rücksicht auf die Bedeutung der Zahlen g und h unmöglich ist. Hieraus folgt demnach, dass die Potenz (5) wirklich q verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn man in (4) für r der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots. (q-1)$ substituirt.

2) Ausser diesen Werthen, q an der Zahl, ist aber die Potenz (5) keines anderen Werthes fähig. Denn ein solcher könnte nur aus (4) hervorgehen, indem man daselbst statt r eine andere Zahl substituirte, welche in der Reihe der Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots. (q-1)$$

nicht schon enthalten ist. Jede solche Zahl lässt sich aber ausdrücken durch $r = \lambda q + \mu$, wo λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Ausschluss der 0, μ aber irgend eine Zahl der obigen Reihe bedeutet.

Der im zweiten Theile der Gl. (4) vorkommende Bogen $\frac{p}{q}(\alpha + 2r\pi)$ wird dadurch

$$= \frac{p}{q}(\alpha + 2\mu\pi) + p\lambda . 2\pi,$$

welcher Bogen aber gleichen Sinus und Cosinus hat mit dem Bogen $\frac{p}{q}(\alpha + 2\mu\pi)$, der schon einmal durch die Substitution $r = \mu$ erzeugt wurde.

Die Anzahl sämmtlicher verschiedener Werthe der Potenz

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^{\frac{p}{q}}$$

ist also $= q$, d. h. gleich der Anzahl der Einheiten, welche der Nenner des auf seine kleinste Benennung gebrachten Bruches $\frac{p}{q}$ enthält, und somit vom Zähler p unabhängig. — Bedeutet in (4) m eine irrationale Zahl, so kann man sich dieselbe immer in Form eines rationalen Bruches $= \frac{p}{q}$ vorstellen, dessen Zähler und Nenner unendlich gross sind; so dass also in diesem Falle die Anzahl der Werthe der Potenz $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^m$ unendlich gross wird.

53. Setzt man in Gl. (4) $p = 1$ und $\alpha = 0$, so kommt:

$$(+ 1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{+1} = \cos\frac{2r\pi}{q} + i \sin\frac{2r\pi}{q}, \tag{6}$$

woraus folgt, dass die q^{te} Wurzel aus der positiven Einheit q verschiedene Werthe hat, welche aus (6) hervorgehen, wenn man der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \ldots (q - 1)$ setzt. Damit einer derselben reell werde, muss $\sin\frac{2r\pi}{q} = 0$, also $\frac{2r\pi}{q} = h\pi$ oder $r = \frac{hq}{2}$ sein, wo h eine ganze Zahl, die 0 mit eingeschlossen, bedeutet, hier aber, wo r nicht grösser als $q - 1$ wird, offenbar nur $= 0$ oder $= 1$ angenommen werden kann, wodurch sich für r nur die beiden Werthe: $r = 0$ und $r = \frac{q}{2}$ ergeben, welche den 2ten Theil der Gl. (6) reell machen. Der zweite ist bei ungeradem q unmöglich; daraus folgt also, dass, wenn q ungerade, unter den q Werthen von $\sqrt[q]{+1}$ nur ein reeller, $= +1$ (für $r = 0$) sich befindet; die übrigen Werthe sind imaginär. Ist aber

q gerade, so hat $\sqrt[q]{+1}$ zwei reelle Werthe, nämlich $+1$ und -1, welche aus (6) für $r=0$ und $r=\frac{q}{2}$ hervorgehen.

Ist k irgend eine aus der Reihe der Zahlen: $1, 2, 3, \ldots (q-1)$, so wird $q-k$ ebenfalls eine in dieser Reihe vorkommende Zahl sein; setzt man also k und $q-k$ statt r in die Gl. (6), so erhält man die zwei entsprechenden Werthe von $\sqrt[q]{+1}$:

$$\cos\frac{2k\pi}{q}+i\sin\frac{2k\pi}{q}, \text{ und}$$

$$\cos\frac{2(q-k)\pi}{q}+i\sin\frac{2(q-k)\pi}{q}=\cos\frac{2k\pi}{q}-i\sin\frac{2k\pi}{q},$$

welche sich demnach nur durch das Zeichen von i unterscheiden und somit conjugirt sind. Man kann daher die Gl. (6) auch in folgender für die Anwendung bequemeren Form schreiben:

$$(+1)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{q}\pm i\sin\frac{2k\pi}{q}, \tag{7}$$

aus welcher nun sämmtliche q Werthe hervorgehen, wenn man

bei geradem q für k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \frac{q}{2}$,

- ungeradem q - - - - $0, 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}$

substituirt. Man erhält daher folgende Werthe für

$\sqrt[q]{+1}$:

$$\left.\begin{array}{c} q \text{ gerade} \\ +1 \\ \cos\frac{2\pi}{q}\pm i\sin\frac{2\pi}{q} \\ \cos\frac{4\pi}{q}\pm i\sin\frac{4\pi}{q} \\ \cos\frac{6\pi}{q}\pm i\sin\frac{6\pi}{q} \\ \cdots\cdots \\ \cos\frac{(q-2)\pi}{q}\pm i\sin\frac{(q-2)\pi}{q} \\ -1 \end{array}\right\} (8) \qquad \left.\begin{array}{c} q \text{ ungerade} \\ +1 \\ \cos\frac{2\pi}{q}\pm i\sin\frac{2\pi}{q} \\ \cos\frac{4\pi}{q}\pm i\sin\frac{4\pi}{q} \\ \cos\frac{6\pi}{q}\pm i\sin\frac{6\pi}{q} \\ \cdots\cdots \\ \cos\frac{(q-3)\pi}{q}\pm i\sin\frac{(q-3)\pi}{q} \\ \cos\frac{(q-1)\pi}{q}\pm i\sin\frac{(q-1)\pi}{q} \end{array}\right\} (9)$$

54. Setzt man in Gl. (4) $p = 1$, $\alpha = \pi$, so folgt:

$$(-1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1} = \cos\frac{(2r+1)\pi}{q} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{q}, \qquad (10)$$

welcher Ausdruck sofort die Werthe, q an der Zahl, für $\sqrt[q]{-1}$ liefert, wenn man darin statt r der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, \ldots (q-1)$ substituirt. Soll einer dieser Werthe reell sein, so muss für diesen $\sin\frac{(2r+1)\pi}{q} = 0$, also $\frac{(2r+1)\pi}{q} = h\pi$, d. i. $r = \frac{qh-1}{2}$ sein, wo h eine ganze Zahl bedeutet, welche jedoch hier, da r eine ganze, $(q-1)$ nicht überschreitende Zahl ist, nur $= 1$ angenommen werden kann. Der einzige Werth von r, welcher den zweiten Theil in (10) reell macht, ist demnach $= \frac{1}{2}(q-1)$, und dieser ist nur bei ungeradem q möglich. Ist daher q eine gerade Zahl, so sind die q Werthe von $\sqrt[q]{-1}$ sämmtlich imaginär; ist aber q ungerade, so erzeugt die Substitution $r = \frac{1}{2}(q-1)$ den einzigen reellen Werth $= -1$.

Da auch hier wieder je zwei Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots (q-1)$ von der Form k, und $q-1-k$, für r in (10) substituirt, Resultate erzeugen, die sich nur durch das Zeichen von i unterscheiden, also conjugirt sind, so kann man schreiben:

$$(-1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{q} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{q}, \qquad (11)$$

welcher Ausdruck nunmehr sämmtliche q Werthe liefert, wenn man

bei geradem q für k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \left(\frac{q}{2}-1\right)$

- ungeradem q - - - - $0, 1, 2, \ldots \left(\frac{q-1}{2}\right)$

substituirt. Hierdurch erhält man folgende Werthe von

$\sqrt[q]{-1}$:

q gerade		q ungerade	
$\cos\frac{\pi}{q} \pm i\sin\frac{\pi}{q}$	(12)	$\cos\frac{\pi}{q} \pm i\sin\frac{\pi}{q}$	(13)
$\cos\frac{3\pi}{q} \pm i\sin\frac{3\pi}{q}$		$\cos\frac{3\pi}{q} \pm i\sin\frac{3\pi}{q}$	
$\cos\frac{5\pi}{q} \pm i\sin\frac{5\pi}{q}$		$\cos\frac{5\pi}{q} \pm i\sin\frac{5\pi}{q}$	
. . . .		. . . .	
$\cos\frac{q-1}{q}\pi \pm i\sin\frac{q-1}{q}\pi$		$\cos\frac{q-2}{q}\pi \pm i\sin\frac{q-2}{q}\pi$	
		-1	

Die Ausdrücke (8), (9), (12), (13) lassen sich auch leicht algebraisch darstellen, wenn die Theilung des Kreises in $2q$ Theile geometrisch ausführbar ist.

So findet man für $q = 2$, aus (8): $\sqrt{+1} = +1, -1$.

Für $q = 3$, erhält man aus (9):

$$\sqrt[3]{+1} = 1, = \cos 120^0 + i \sin 120^0, = \cos 120^0 - i \sin 120^0.$$

Nun ist $\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; somit ergeben sich für $\sqrt[3]{+1}$ folgende drei Werthe, wenn man $i = \sqrt{-1}$ einsetzt:

$$1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ *)}.$$

Nimmt man $q = 4$, so ergeben sich aus (8) für $\sqrt[4]{+1}$ folgende Werthe:

$$1, \cos 90^0 + \sqrt{-1} \sin 90^0, \cos 90^0 - \sqrt{-1} \sin 90^0, -1, \text{ d. i.}$$

$$1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, -1.$$

Für $q = 5$ erhält man, wenn man beachtet, dass die Seite des regulären Fünfeckes $= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, somit $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ ist, woraus man ferner mittelst der Formeln:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

leicht den Sinus und Cosinus der Bögen $\frac{2\pi}{5}$ und $\frac{4\pi}{5}$ entwickelt, nach (9) folgende Werthe:

$$+1, \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \frac{\sqrt{5} - 1}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},$$

$$-\frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}.$$

---

*) Es ist bemerkenswerth, dass der 3[te] dieser Werthe aus dem 2[ten] entsteht, wenn man diesen zum Quadrate erhebt. Bezeichnet man also den Werth $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ mit α, so sind $1, \alpha, \alpha^2$ die drei Cubikwurzeln der positiven Einheit. Es ist dies übrigens nur ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes.

55. Die Formeln (6) und (10) lassen sich in folgende zusammenziehen:

$$(\pm 1)^m = \cos mr\pi + i \cdot \sin mr\pi, \tag{14}$$

wo für r die geraden oder ungeraden Zahlen zu setzen sind, je nachdem in $(\pm 1)^m$ das obere oder untere Zeichen steht.

Da ferner immer $\pm A = A \cdot \pm 1$ ist, so hat man auch:

$$\sqrt[q]{\pm A} = \sqrt[q]{A} \cdot \sqrt[q]{\pm 1}, \tag{15}$$

aus welcher Gleichung mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit von $\sqrt[q]{\pm 1}$, folgt, dass der q^{ten} Wurzel aus jeder positiven oder negativen Zahl A, q verschiedene Werthe zukommen, welche man erhält, wenn man irgend einen derselben, z. B. die gewöhnliche oder sogenannte arithmetische Wurzel mit sämmtlichen gleichnamigen Wurzeln der Einheit der Reihe nach multiplicirt.

IMAGINÄRE REIHEN.

56. Sind die Glieder einer Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + \ldots$$

complexe Grössen, also die Reihe von der Form:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots, \tag{1}$$

so ist offenbar auch:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + i(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots), \tag{2}$$

und man kann demnach eine solche Reihe als die Summe zweier reeller Reihen betrachten, deren eine mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt ist. Bezeichnet S_n die Summe von n Anfangsgliedern der Reihe (1), und setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$
$$B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n,$$

so ist:

$$S_n = A_n + i \cdot B_n. \tag{3}$$

Die Convergenz imaginärer Reihen ist, so wie bei reellen Reihen, an die Bedingung gebunden, dass die Summe S_n von n Anfangsgliedern beim unendichen Wachsen von n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähere, wozu nach Gl. (3) erfordert wird, dass die Summen A_n und B_n sich solchen Grenzen nähern; hiernach kann man den Satz aussprechen:

Die imaginäre Reihe (1) ist convergent, wenn die beiden reellen Reihen:

$$\begin{matrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots\ldots \end{matrix} \tag{4}$$

convergiren; sie ist divergent, wenn eine oder beide dieser reellen Reihen divergiren.

Bezeichnet man mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Moduli der Glieder der Reihe (1), so ist wegen $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ nothwendig

$$\varrho_n > a_n \text{ und } \varrho_n > b_n,$$

daher jedes Glied der Reihen (4) kleiner als das correspondirende Glied in der Reihe der Moduli: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots$; nach §. 29, a) sind somit die Reihen (4) beide convergent, wenn die Reihe der Moduli convergirt, und man kann folglich obigen Satz auch in folgender Form ausdrücken:

Die imaginäre Reihe (1) ist convergent, wenn die Moduli ihrer Glieder eine convergirende Reihe bilden.

Ist daher eine imaginäre Reihe aus der reellen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

dadurch hervorgegangen, dass man in letzterer $x = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt hat, und convergirt die reelle Reihe für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$ liegen, so wird auch die imaginäre Reihe für alle Werthe des Modulus z convergiren, welche zwischen denselben Grenzen enthalten sind.

57. Die imaginären Reihen finden in der Analysis häufige Anwendung. Um an einem einfachen Beispiele zu zeigen, wie man durch dieselben zur Summirung verschiedener reellen Reihen gelangen könne, nehmen wir die geometrische Progression:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

und setzen in derselben $x = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so kommt:

$$1 + z(\cos\varphi + i\sin\varphi) + z^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots$$
$$+ z^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi] =$$
$$= \frac{1 - z^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}{1 - z(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$
$$= \frac{1 - z\cos\varphi - z^n\cos n\varphi + z^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}$$
$$+ i\,\frac{z\sin\varphi - z^n\sin n\varphi + z^{n+1}\sin(n-1)\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}, \qquad (1)$$

wenn man nämlich Zähler und Nenner mit $1 - z\cos\varphi + i.z\sin\varphi$ multiplicirt und reducirt. Diese Gleichung zerfällt sofort durch Sonderung der reellen und imaginären Theile [§. 47] in folgende:

$$1 + z\cos\varphi + z^2\cos 2\varphi + \ldots + z^{n-1}\cos(n-1)\varphi$$
$$= \frac{1 - z\cos\varphi - z^n\cos n\varphi + z^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}, \qquad (2)$$

$$z\sin\varphi + z^2\sin 2\varphi + z^3\sin 3\varphi + \ldots + z^{n-1}\sin(n-1)\varphi$$
$$= \frac{z\sin\varphi - z^n\sin n\varphi + z^{n+1}\sin(n-1)\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}, \qquad (3)$$

welche Gleichungen natürlich für jeden Werth von z bestehen, da die Reihen im ersten Theile endliche sind. Die Ausdrücke im zweiten Theile sind die Summenformeln der im ersten Theile stehenden Reihen.

Diese Reihen werden zu unendlichen, wenn wir n unendlich wachsen lassen; dann ist aber in Folge ihrer Ableitung aus der geometrischen Reihe ihre Convergenz an die Bedingung gebunden, dass z ein echter Bruch sei. Unter dieser Voraussetzung ist $\lim z^n = 0$, und wir erhalten somit aus (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned} &1 + z\cos\varphi + z^2\cos 2\varphi + z^3\cos 3\varphi + \ldots \text{ in inf.} \\ &\qquad = \frac{1 - z\cos\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}, \\ &z\sin\varphi + z^2\sin 2\varphi + z^3\sin 3\varphi + \ldots \text{ in inf.} \\ &\qquad = \frac{z\sin\varphi}{1 - 2z\cos\varphi + z^2} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} z > -1 \\ z < +1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix}(4)\\ \\ (5)\end{matrix}$$

58. Setzt man in den Glgn. (2) und (3) des vorhergehenden §. $z = 1$, so gelangt man leicht zu bemerkenswerthen Summirungen periodischer Funktionen, von welchen einige der am häufigsten vorkommenden angeführt werden mögen.

Durch die Substitution $z = 1$ verwandelt sich nämlich, mit Benützung der bekannten Relationen:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$
$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

der zweite Theil von (2) in:

$$\frac{1 - \cos\varphi - \cos n\varphi + \cos(n-1)\varphi}{2(1 - \cos\varphi)} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(n-1)\varphi - \cos n\varphi}{2(1 - \cos\varphi)}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi + \sin(n - \frac{1}{2}\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi\cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi};$$

auf ähnliche Weise wird der zweite Theil von (3) reducirt, indem man von den Formeln:

$$\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Gebrauch macht.

Führen wir nun zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos\mu\varphi,$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(n-1)\varphi = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\varphi,$$

wo der Buchstabe Σ, als Summenzeichen gebraucht, mit der beigefügten Bestimmung: $\mu = 0$, $\mu = n-1$, anzeigt, dass in dem unter dem Zeichen Σ stehenden Ausdrucke für μ der Reihe nach alle ganzen Zahlen von $\mu = 0$ bis $\mu = n-1$ zu setzen, und alle so erhaltenen Glieder zu addiren sind, so erhalten wir:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos\mu\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi\cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \tag{6}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi\sin\frac{1}{2}(n-1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \tag{7}$$

Lassen wir in der letzten Gleichung (7) 2φ an die Stelle von φ treten und beachten, dass $\sin\mu\,.\,2\varphi = \sin 2\,.\,\mu\varphi = 2\sin\mu\varphi\cos\mu\varphi$ ist, so folgt:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\varphi\cos\mu\varphi = \frac{\sin n\varphi\sin(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}. \tag{8}$$

Es ist bekanntlich:

$$\sin\mu\varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\mu\varphi, \quad \cos\mu\varphi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\mu\varphi.$$

Setzt man in diesen Gleichungen für μ der Reihe nach: $0, 1, 2, 3, ..(n-1)$, und addirt die so entstehenden Gleichungen, n an der Zahl, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (6):

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\varphi^2 = \frac{n}{2} - \frac{\sin n\varphi\cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}, \tag{9}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos\mu\varphi^2 = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\varphi\cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}. \tag{10}$$

Ferner ist, wenn r eine beliebige Zahl, α und φ beliebige Bögen bedeuten:

$$\cos r(\alpha + \mu\varphi) = \cos r\alpha\cos\mu r\varphi - \sin r\alpha\sin\mu r\varphi;$$

setzt man wieder $\mu = 1, 2, 3, \ldots(n-1)$, so findet man durch Addition [der] so erhaltenen n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos r(\alpha+\mu\varphi) = \cos r\alpha \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\cos\mu r\varphi - \sin r\alpha\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\sin\mu r\varphi, \\ &\text{[un]d ebenso:} \\ &\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin r(\alpha+\mu\varphi) = \sin r\alpha \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\cos\mu r\varphi + \cos r\alpha\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\sin\mu r\varphi. \end{aligned}\right\} (a)$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf die Glgn. (6) und (7), wenn man in denselben $r\varphi$ statt φ schreibt, und reducirt:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos r(\alpha+\mu\varphi) = \frac{\sin\frac{1}{2}nr\varphi \cos r\left[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\varphi\right]}{\sin\frac{1}{2}r\varphi}, \tag{11}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin r(\alpha+\mu\varphi) = \frac{\sin\frac{1}{2}nr\varphi \sin r\left[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\varphi\right]}{\sin\frac{1}{2}r\varphi}. \tag{12}$$

Alle diese Gleichungen gelten für jeden Werth von φ. Setzen wir nun $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, also gleich einem aliquoten Theile der Peripherie, so wird $\sin\frac{1}{2}n\varphi = \sin\pi = 0$, $\sin n\varphi = \sin 2\pi = 0$, wodurch die Glgn. (6) bis (10) in folgende übergehen:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos\mu\frac{2\pi}{n} = 0, \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\frac{2\pi}{n} = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin\mu\frac{2\pi}{n} \,.\, \cos\frac{2\pi}{n} = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \left(\sin\mu\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2}, \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \left(\cos\mu\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2}. \tag{15}$$

Lassen wir endlich in den Glgn. (11) und (12) r eine ganze Zahl bedeuten, so erhält durch die Substitution: $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ der Zähler den Faktor $\sin r\pi = 0$, und der Nenner wird $= \sin\frac{r\pi}{n}$, welcher Werth von Null verschieden ist, wenn r kein Vielfaches von n; es ist daher unter der Voraussetzung, das r eine ganze Zahl und kein Vielfaches von n:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos r\left(\alpha+\mu\frac{2\pi}{n}\right) = 0, \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin r\left(\alpha+\mu\frac{2\pi}{n}\right) = 0. \tag{16}$$

Ist aber $r = hn$, unter h eine ganze Zahl verstanden, ein Vielfaches von n, so wird in den Glgn. (a): $\cos\mu r\varphi = \cos\mu h \,.\, 2\pi = 1$, $\sin\mu r\varphi = \sin\mu h \,.\, 2\pi = 0$; mithin ist, wenn r ein Vielfaches von n:

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos r\left(\alpha+\mu\frac{2\pi}{n}\right) &= n\cos r\alpha,\\ \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin r\left(\alpha+\mu\frac{2\pi}{n}\right) &= n\sin r\alpha.\end{aligned} \tag{17}$$

VIERTES KAPITEL.

ENTWICKELUNG DER FUNKTIONEN IN REIHEN.

I. Die Binomialreihe.

59. Aus der Elementar-Mathematik ist bekannt, dass die n^{te} Potenz des Binoms $(a+b)$, unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} a^{n-r} b^r + \ldots + b^n. \quad (1)$$

Dividiren wir diese Gleichung durch a^n, setzen $\frac{b}{a} = x$ und bezeichnen wir der Kürze wegen die Binomialcoefficienten:

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

durch die Symbole:

$$\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \binom{n}{3}, \ldots\ldots \binom{n}{r},$$

so geht obige Gleichung in folgende einfachere über:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots + x^n. \quad (2)$$

Die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen ist unter der oben für n gemachten Voraussetzung endlich, da man, wie aus dem Baue der oefficienten erhellt, nothwendig auf einen solchen kommen muss, der, › wie alle folgenden, im Zähler den Faktor $n - n = 0$ enthält. Sobald aber n eine gebrochene oder negative Zahl bedeutet, findet dies ffenbar nicht mehr statt, die Reihe wird unendlich und es entsteht un die Frage, ob das in Gl. (2) ausgesprochene Gesetz der Entickelung:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots \text{ in inf.} \quad (3)$$

auch für gebrochene und negative Werthe des Exponenten n Giltigkeit habe.

Die Frage reducirt sich offenbar darauf, ob für jeden beliebigen Werth von n die Funktion $(1+x)^n$ die Summe der Reihe:

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots \quad (4)$$

sei? Dass dies für ganze und positive Werthe von n der Fall ist, können wir, wie oben erwähnt, als aus den Elementen bekannt voraussetzen; für jeden anderen Werth von n ist die Reihe (4) eine unendliche, und damit diese eine Summe habe, ist vor allem nöthig, dass sie convergent sei, wozu [§. 38. Beisp. 3] erfordert wird, dass x ein positiver oder negativer **echter** Bruch sei.

Wir stellen uns daher die Aufgabe, unter der Voraussetzung, dass x ein echter Bruch sei, und n keine ganze positive Zahl bedeute, die Summe der unendlichen Reihe (4) zu suchen.

Zuvor wollen wir jedoch eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten nachweisen, von welcher wir Gebrauch machen werden.

60. Es ist nach der angenommenen Bezeichnung der Binomialcoefficienten:

$$\binom{h}{n} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n},$$

$$\binom{h}{n-1} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit n, die zweite mit $(h-n+1)$, wodurch die zweiten Theile einander gleich werden, so erhält man:

$$n\binom{h}{n} = (h-n+1)\binom{h}{n-1}, \quad (\alpha)$$

welche Gleichung die Beziehung ausdrückt, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Coefficienten, dem $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten}, der h^{ten} Potenz des Binoms statt findet. Eben so hat man zwischen dem $(m-1)^{\text{ten}}$ und m^{ten} Binomialcoefficienten der k^{ten} Potenz die Relation:

$$m\binom{k}{m} = (k-m+1)\binom{k}{m-1}. \quad (\beta)$$

Multiplicirt man (α) mit $\binom{k}{m}$ und (β) mit $\binom{h}{n}$, und addirt, so kommt:

$$(m+n)\binom{h}{n}\binom{k}{m}=(h-n+1)\binom{h}{n-1}\binom{k}{m}+(k-m+1)\binom{h}{n}\binom{k}{m-1},$$

aus welcher Gleichung, wenn man gleichzeitig

statt n der Reihe nach r, $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 2, 1, 0,
- m - - - 0, 1, 2, 3, ... $r-2$, $r-1$, r,

substituirt und beachtet, dass vermöge der Glgn. (α) und (β):

$$\binom{h}{0}=\binom{k}{0}=1,\ \binom{h}{-1}=\binom{k}{-1}=0$$

ist, folgende Gleichungen hervorgehen:

$$r\binom{h}{r}.1=(h-r+1)\binom{h}{r-1}.1$$

$$r\binom{h}{r-1}\binom{k}{1}=(h-r+2)\binom{h}{r-2}\binom{k}{1}+k\binom{h}{r-1}.1$$

$$r\binom{h}{r-2}\binom{k}{2}=(h-r+3)\binom{h}{r-3}\binom{k}{2}+(k-1)\binom{h}{r-2}\binom{k}{1}$$

. . . .

$$r\binom{h}{2}\binom{k}{r-2}=(h-1)\binom{h}{1}\binom{k}{r-2}+(k-r+3)\binom{h}{2}\binom{k}{r-3}$$

$$r\binom{h}{1}\binom{k}{r-1}=h.1.\binom{k}{r-1}+(k-r+2)\binom{h}{1}\binom{k}{r-2}$$

$$r.1.\binom{k}{r}=\qquad(k-r+1).1.\binom{k}{r-1}.$$

Addirt man diese Gleichungen, sondert im zweiten Theile den gemeinschaftlichen Faktor $(h+k-r+1)$ ab und dividirt durch r, so erhält man:

$$\binom{h}{r}+\binom{h}{r-1}\binom{k}{1}+\binom{h}{r-2}\binom{k}{2}+\dots+\binom{h}{2}\binom{k}{r-2}+$$
$$\binom{h}{1}\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=$$
$$=\frac{h+k-r+1}{r}\left[\binom{h}{r-1}+\binom{h}{r-2}\binom{k}{1}+\dots\right.$$
$$\left.+\binom{h}{1}\binom{k}{r-2}+\binom{k}{r-1}\right].$$

)er in den eckigen Klammern eingeschlossene Faktor geht, wie man ieht, aus dem ersten Theile der Gleichung hervor, wenn man in :tzterem $r-1$ statt r schreibt. Setzt man daher in dieser Gleichung er Reihe nach $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 3, 2, 1 an die Stelle von , so erhält man, obige mitgezählt, offenbar r Gleichungen von der

Eigenschaft, dass der in den eckigen Klammern stehende Faktor jeder dieser Gleichungen den ersten Theil der folgenden Gleichung bildet. Multipliciren wir daher sämmtliche r Gleichungen mit einander, so erhalten wir, indem sich mit Ausnahme des ersten Theiles der ersten Gleichung die folgenden ersten Theile gegen die eingeklammerten Faktoren in den zweiten Theilen aufheben, folgende Gleichung:

$$\binom{h}{r}+\binom{h}{r-1}\binom{k}{1}+\binom{h}{r-2}\binom{k}{2}+\cdots+\binom{h}{1}\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=$$
$$=\frac{(h+k)(h+k-1)(h+k-2)\ldots\ldots(h+k-r+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots r};$$

der zweite Theil dieser Gleichung ist aber nichts anderes als der r^{te} Binomialcoefficient der $(h+k)^{ten}$ Potenz des Binoms und somit durch das Symbol $\binom{h+k}{r}$ darzustellen; man hat daher:

$$\binom{h}{r}+\binom{h}{r-1}\binom{k}{1}+\binom{h}{r-2}\binom{k}{2}+\cdots+\binom{h}{1}\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=\binom{h+k}{r} \quad (5)$$

welche Gleichung die gesuchte Eigenschaft der Binomialcoefficienten ausspricht, und den r^{ten} Coefficienten der $(h+k)^{ten}$ Potenz aus den r ersten Binomialcoefficienten der h^{ten} und k^{ten} Potenz finden lehrt.

Kehren wir jetzt zu unserer Aufgabe zurück.

61. Bezeichnen wir die noch unbekannte Summe der Reihe (4), da sie offenbar eine Funktion von n sein muss, mit $f(n)$, so dass

$$f(n)=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots, \quad (6)$$

wobei wir bemerken, dass, wenn n eine ganze positive Zahl, die Form der Funktion $f(n)$ bekannt ist; man hat nämlich für diesen Fall laut Gleichung (2):

$$f(n)=(1+x)^n. \quad (7)$$

Lassen wir in (6) die ganz willkürlichen Zahlen α und β an die Stelle von n treten, so erhalten wir:

$$f(\alpha)=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\ldots.$$
$$f(\beta)=1+\binom{\beta}{1}x+\binom{\beta}{2}x^2+\binom{\beta}{3}x^3+\ldots.$$

Das Produkt dieser beiden convergenten Reihen wird nach §. 40 wieder eine convergente Reihe sein, deren Summe dem Produkte der Summen beider Reihen gleich ist; durch Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir daher:

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
f(\alpha).f(\beta) = 1 + \binom{\alpha}{1} & x + \quad \binom{\alpha}{2} & x^2 + \quad \binom{\alpha}{3} & x^3 + \ldots \\
\binom{\beta}{1} & + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1} & + \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{1} & \\
 & + \quad \binom{\beta}{2} & + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{2} & \\
 & & + \quad \binom{\beta}{3} &
\end{array}
$$

d. i. mit Rücksicht auf (5):

$$f(\alpha).f(\beta) = 1 + \binom{\alpha+\beta}{1} x + \binom{\alpha+\beta}{2} x^2 + \binom{\alpha+\beta}{3} x^3 + \ldots.$$

Die Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung ist, wie man sieht, in Bezug auf $(\alpha + \beta)$ nach demselben Gesetze gebildet, wie die Reihe (4) in Bezug auf n; wir haben daher in Folge der Gl. (6) ihre Summe mit $f(\alpha + \beta)$ zu bezeichnen, und erhalten dadurch:

$$f(\alpha).f(\beta) = f(\alpha + \beta). \tag{8}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\beta + \gamma$ an die Stelle von β, so erhält man $f(\alpha).f(\beta + \gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma)$, d. i. weil nach (8) $f(\beta + \gamma) = f(\beta).f(\gamma)$:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma);$$

in dieser Gleichung wieder $\gamma + \delta$ statt γ gesetzt, und beachtet, dass $f(\gamma + \delta) = f(\gamma).f(\delta)$, kommt:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta) = f(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

u. s. w.; man sieht, dass man auf diese Weise beliebig weit fortgehen kann und dass folglich allgemein:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta)\ldots\ldots = f(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots). \tag{9}$$

Diese Gleichung, welche ihrer Ableitung zufolge für jeden beliebigen Werth der Zahlen α, β, γ, δ, ... gilt, spricht eine charakteristische Eigenschaft aus, welche der mit $f(n)$ bezeichneten Summe der Reihe (4) zukommt und in Verbindung mit der Bemerkung, dass $f(n) = (1 + x)^n$ ist, wenn n ein ganze positive Zahl, hinreicht, um die Funktion $f(n)$ für jeden beliebigen Werth von n zu finden.

Setzen wir in (9) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots\ldots = \frac{p}{q}$, wo p und q nze positive Zahlen bedeuten, und lassen die Anzahl dieser Grössen = q sein, so geht diese Gleichung über in:

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p),$$

woraus, wenn wir die q^{te} Wurzel ziehen und transponiren, folgt:

$$\left[f(p)\right]^{\frac{1}{q}} = f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nun ist nach Gl. (7), da p eine ganze Zahl, $f(p) = (1 + x)^p$, somit $[f(p)]^{\frac{1}{q}} = (1 + x)^{\frac{p}{q}}$; anderseits stellt das Symbol $f\left(\frac{p}{q}\right)$ nach Gl. (6) die Reihe $1 + \binom{\frac{p}{q}}{1} x + \binom{\frac{p}{q}}{2} x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3} x^3 + \ldots$ vor; somit folgt aus der letzten Gleichung:

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \binom{\frac{p}{q}}{1} x + \binom{\frac{p}{q}}{2} x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3} x^3 + \ldots,$$

womit die Richtigkeit der Gl. (3) auch für gebrochene positive Werthe des Exponenten n nachgewiesen ist.

Setzt man ferner in der Gleichung (8) $\alpha = m$, wo m eine positive ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, und $\beta = -m$, so geht diese Gleichung über in:

$$f(m) \, . \, f(-m) = f(0),$$

oder, da aus (6) für $n = 0$, $f(0) = 1$ folgt, $f(m) \, . \, f(-m) = 1$, d. h.

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m},$$

und wenn man statt $f(-m)$ wieder die durch dieses Symbol vorgestellte Reihe schreibt:

$$(1 + x)^{-m} = 1 + \binom{-m}{1} x + \binom{-m}{2} x^2 + \binom{-m}{3} x^3 + \ldots;$$

dasselbe Resultat ergibt sich aber auch aus (3), wenn man dort $-m$ statt m schreibt, daher die Gl. (3) auch für negative Werthe des Exponenten richtig bleibt.

Indem man endlich eine irrationale Zahl als die Grenze betrachtet, welcher sich eine rationale ohne Ende nähert, beweist man ganz in ähnlicher Weise wie §. 51, dass die Gl. (3) auch für irrationale Werthe des Exponenten nicht aufhört, giltig zu sein.

Es folgt demnach aus dieser Untersuchung, dass die unter dem Namen Binomialreihe, binomischer Lehrsatz, Newton'sche Binomialformel bekannte Entwickelung:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots \qquad (10)$$

für jeden beliebigen Werth des Exponenten gilt; unter der Bedingung, dass, wenn n keine positive ganze Zahl ist, x ein echter Bruch sei, damit die Reihe convergire.

Für $x = +1$ und $x = -1$ geht die Formel (10) beziehungsweise über in:

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots\ldots,$$

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots\ldots,$$

zwei Reihen, deren Convergenz respektive an die Bedingung $n > -1$ und $n > 0$ gebunden ist [§. 35, 3].

Setzen wir in (10) $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x und multipliciren sodann die Gleichung mit a^n, so kommt:

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} x^3 + \ldots \quad (11)$$

wo, wenn n keine positive ganze Zahl, $x < a$ sein muss, damit die Reihe convergire.

62. Setzt man in (10) der Reihe nach $-n, \frac{p}{q}, -\frac{p}{q}, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ an die Stelle von n, so erhält man folgende Reihen, welche sämmtlich x numerisch kleiner als 1 voraussetzen und des häufigen Gebrauches wegen angeführt werden mögen:

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \dots \quad (12)$$

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{1.2}\frac{x^2}{q^2} + \frac{p(p-q)(p-2q)}{1.2.3}\frac{x^3}{q^3} + \dots \quad (13)$$

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(1+x)^p}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{1.2}\frac{x^2}{q^2} - \frac{p(p+q)(p+2q)}{1.2.3}\frac{x^3}{q^3} + \dots \quad (14)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^4}{8} + \dots \quad (15)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \dots \quad (16)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \dots$$

Für negative Werthe von x ändern die Glieder mit ungeraden Potenzen von x ihr Zeichen.

Setzt man in (12) $x = -y$, so erhält man:

$$(1-y)^{-n} = 1 + ny + \frac{n(n+1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}y^3 + \dots (\alpha)$$

Man setze nun $y = \frac{x}{1+x}$, wobei die Bedingung $y < 1$, an welche die Giltigkeit der Gl. (α) geknüpft ist, für jeden positiven Werth von x erfüllt ist, so wird $1 - y = \frac{1}{1+x}$, und $(1-y)^{-n} = (1+x)^n$; hiemit verwandelt sich (α) in:

$$(1+x)^n = 1 + n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots \begin{cases} x = 0 \\ x = \infty \end{cases} \tag{17}$$

woraus wieder, wenn man $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x setzt:

$$(a+x)^n = a^n\left\{1 + n\left(\frac{x}{a+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \ldots\right\} \begin{cases} x = 0 \\ x = \infty \end{cases} \tag{18}$$

folgt; zwei Reihen, welche für jeden positiven Werth von x convergiren.

Die Binomialreihe ist für die gesammte Analysis von der grössten Wichtigkeit. Hier mag nur noch des Gebrauches derselben zur Wurzelausziehung gedacht werden. Ist $\sqrt[q]{A}$ zu berechnen, so zerlege man die Zahl A in zwei Theile $a \pm x$, von welchen der erste $a > x$ und eine der Zahl A möglichst naheliegende vollkommene q^{te} Potenz ist, so dass $\sqrt[q]{a} = \alpha$ und α eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch wird; man hat dann:

$$\sqrt[q]{A} = \sqrt[q]{a \pm x} = \sqrt[q]{a(1 \pm \tfrac{x}{a})} = \sqrt[q]{a}\,.\,(1 \pm \tfrac{x}{a})^{\frac{1}{q}},$$

somit nach (13) für $p = 1$:

$$\sqrt[q]{a \pm x} = \sqrt[q]{a}\left\{1 \pm \frac{1}{q}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{q-1}{1.2.q^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \frac{(q-1)(2q-1)}{1.2.3.q^3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots\right\}$$

63. Die Betrachtungen des §. 61, mittelst deren wir zur Summirung der Reihe:

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots$$

gelangten, bezogen sich einzig und allein auf die Beschaffenheit der Grösse n, und waren von jener der Grösse x ganz unabhängig; dieselben

bleiben daher in Kraft, wenn x imaginär wird, so dass die Binomialformel auch für einen imaginären Werth von x giltig bleibt, unter der Voraussetzung, dass der Modulus desselben kleiner als 1, wenn der Exponent keine positive ganze Zahl ist.

POLYNOMISCHER LEHRSATZ.

64. Es sei:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \qquad (1)$$

ein Polynom aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern bestehend, und die Aufgabe gestellt, die m^{te} Potenz dieses Polynoms zu entwickeln, unter m eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl verstanden. Setzen wir:

$$p = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots, \qquad (2)$$

so wird $y = a_0 + px$, und wir erhalten unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$y^m = a_0{}^m + \binom{m}{1} a_0{}^{m-1} px + \binom{m}{2} a_0{}^{m-2} p^2 x^2 + \binom{m}{3} a_0{}^{m-3} p^3 x^3 + \ldots \qquad (3)$$

und zwar für jeden Werth des Exponenten m, jedoch unter Voraussetzung der Convergenz der Reihen zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens, wenn dieselben nicht abbrechen.

Es kommt somit, wie man sieht, nur noch auf die Darstellung der aufeinanderfolgenden Potenzen des Polynoms p an, d. i. allgemein auf die Entwickelung von

$$p^n = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots)^n,$$

wobei jetzt n eine positive ganze Zahl bedeutet. Hiemit wollen wir uns nun beschäftigen und dabei in dem Polynom p,

$$\alpha_0, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; \alpha_3, \; \ldots \; \alpha_{n-1}, \; \ldots$$

statt

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_n, \; \ldots$$

schreiben, um die Zeiger der Coefficienten mit den Exponenten der Potenzen von x zur Uebereinstimmung zu bringen, wodurch die folgenden Betrachtungen vereinfacht werden. Setzen wir nun:

$$p^n = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots)^n =$$
$$= \overset{n}{A}_0 + \overset{n}{A}_1 x + \overset{n}{A}_2 x^2 + \overset{n}{A}_3 x^3 + \ldots \qquad (4)$$

welche Form der nach Potenzen von x geordneten Entwickelung, als einem Produkte von n Faktoren, jeder $= p$, nothwendig zukommen muss, so handelt es sich nur um die Bestimmung der Coefficienten:

$$\overset{n}{A}_0,\ \overset{n}{A}_1,\ \overset{n}{A}_2,\ \ldots$$

Denken wir uns die Multiplikation der n Faktoren, jeder $= p$, wirklich ausgeführt, so folgt unmittelbar aus der Regel für die Multiplikation von Polynomen, dass 1) irgend ein Glied des geordneten Produktes, z. B. $\overset{n}{A}_r\, x^r$ das Aggregat sämmtlicher Glieder ist, welche x^r als Faktor enthalten; dass 2) jedes dieser Glieder ein Produkt aus n Gliedern des Polynoms p ist, und zwar so construirt, dass die Zeigersumme der in dasselbe eingehenden Coefficienten α dem Exponenten r der in dasselbe multiplicirten Potenz von x gleich ist.

Hiernach muss der Coefficient $\overset{n}{A}_r$ nothwendig das Aggregat sämmtlicher Produkte sein, welche sich aus den Coefficienten:

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_r$$

mit der Zeigersumme $= r$ bilden lassen, wobei der Faktor α_0, welcher zur Zeigersumme nichts beiträgt, mit einem solchen Exponenten zu versehen ist, dass die Anzahl aller Faktoren $= n$ werde. Zerlegt man daher die Zahl r, so oft es angeht und ohne Wiederholung, in ihre ganzen Bestandtheile, so erhält man offenbar alle Complexionen von Zeigern, welche den einzelnen Gliedern des Coefficienten $\overset{n}{A}_r$ zukommen.

Um z. B. $\overset{n}{A}_5$ zu bilden, zerlegen wir die Zahl 5 in ihre Theile:

5 | 4, 1 | 3, 2 | 3, 1, 1 | 2, 2, 1 | 2, 1, 1, 1 | 1, 1, 1, 1, 1;

wir erhalten sofort:

$$\alpha_5,\ \alpha_4\alpha_1,\ \alpha_3\alpha_2,\ \alpha_3\alpha_1^2,\ \alpha_2^2\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1^3,\ \alpha_1^5,$$

und fügen endlich jedem dieser Bestandtheile so viele Faktoren, jeder $= \alpha_0$ hinzu, dass die Anzahl aller Faktoren $= n$ werde. Die sämmtlichen Bestandtheile des Coefficienten $\overset{n}{A}_5$ sind somit:

$$\alpha_0^{n-1}\alpha_5,\ \ \alpha_0^{n-2}\alpha_4\alpha_1,\ \ \alpha_0^{n-2}\alpha_3\alpha_2,\ \ \alpha_0^{n-3}\alpha_3\alpha_1^2,\ \ \alpha_0^{n-3}\alpha_2^2\alpha_1,$$
$$\alpha_0^{n-4}\alpha_2\alpha_1^3,\ \ \alpha_0^{n-5}\alpha_1^5.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, dass irgend einer dieser Bestandtheile durch den Multiplikationsprozess mehrmals gebildet wird, woraus

aber sogleich folgt, dass er überhaupt so oft erscheinen muss, als er aus den n Elementen α, aus welchen er besteht, gebildet werden kann, d. h. also so oft, als diese Faktoren, n an der Zahl, Permutationen ohne Wiederholungen zulassen.

Von den oben dargestellten Gliedern des Coefficienten A_5 wird hiernach:

das 1. Glied $\alpha_0^{n-1}\alpha_5 \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-1)} =$

$= n$ mal,

das 2. und 3. Gl. jedes: $\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-2)} =$

$$= n(n-1) = 2\binom{n}{2} \text{ mal,}$$

das 4. und 5. Gl. jedes: $\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-3).1.2} =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} = 3\binom{n}{3} \text{ mal,}$$

das 6. Glied: $\ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-4).1.2.3} =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} = 4\binom{n}{4} \text{ mal,}$$

das 7. Glied: $\ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-5)1.2.3.4.5} =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} = \binom{n}{5} \text{ mal,}$$

erscheinen, und somit ist:

$$\overset{n}{A}_5 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_5 + 2\binom{n}{2}\alpha_0^{n-2}(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3) + 3\binom{n}{3}\alpha_0^{n-3}(\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2) +$$
$$+ 4\binom{n}{4}\alpha_0^{n-4}\alpha_1^3\alpha_2 + \binom{n}{5}\alpha_0^{n-5}\alpha_1^5.$$

Es ist hiernach sehr leicht, den Coefficienten eines beliebigen Gliedes der n^{ten} Potenz eines Polynoms zu entwickeln, wobei wir unter n vorläufig noch eine positive ganze Zahl zu verstehen haben. Setzt man daher:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots)^n = \overset{n}{A}_0 + \overset{n}{A}_1 x + \overset{n}{A}_2 x^2 + \overset{n}{A}_3 x^3 + \ldots, \quad (5)$$

so ist, wie man nach dem angegebenen Verfahren sehr leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{n}{A}_0 &= \alpha_0{}^n \\
\overset{n}{A}_1 &= n\alpha_0{}^{n-1}\alpha_1 \\
\overset{n}{A}_2 &= n\alpha_0{}^{n-1}\alpha_2 + \binom{n}{2}\alpha_0{}^{n-2}\alpha_1^2 \\
\overset{n}{A}_3 &= n\alpha_0{}^{n-1}\alpha_3 + 2\binom{n}{2}\alpha_0{}^{n-2}\alpha_1\alpha_2 + \binom{n}{3}\alpha_0{}^{n-3}\alpha_1^3 \\
\overset{n}{A}_4 &= n\alpha_0{}^{n-1}\alpha_4 + \binom{n}{2}\alpha_0{}^{n-2}(2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2) + 3\binom{n}{3}\alpha_0{}^{n-3}\alpha_1^2\alpha_2 + \\
&\qquad + \binom{n}{4}\alpha_0{}^{n-4}\alpha_1^4 \\
\overset{n}{A}_5 &= n\alpha_0{}^{n-1}\alpha_5 + \ldots \text{ wie oben.}
\end{aligned}\right\}(6)$$

u. s. w.

Diese Entwickelung führt den Namen: Polynomial-Theorem oder polynomischer Lehrsatz und die in (6) entwickelten Coefficienten $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, u. s. w. heissen Polynomial-Coefficienten.

Wie man sieht, so enthält die durch die Gleichungen (5) und (6) dargestellte Entwickelung bereits die Auflösung der ursprünglich für das Polynom y gestellten Aufgabe, nur mit der Einschränkung, dass der Exponent n noch eine positive ganze Zahl bedeute. Es ist aber jetzt sehr leicht zu zeigen, dass diese Entwickelung für jeden Werth des Exponenten in Kraft bleibe. In der That, setzt man in (5) und (6) der Reihe nach $n = 1, 2, 3$, u. s. w., substituirt die für p, p^2, p^3, p^4, u. s. w. erhaltenen Ausdrücke in (3), wobei wieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ durch $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu ersetzen sind, und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)^m = \overset{m}{A}_0 + \overset{m}{A}_1x + \overset{m}{A}_2x^2 + \overset{m}{A}_3x^3 + \ldots$$

und findet, dass die Coefficienten $\overset{m}{A}_0$, $\overset{m}{A}_1$, $\overset{m}{A}_2$, u. s. w. nach eben dem in den Glgn. (6) ausgesprochenen Gesetze gebildet sind, wo aber nun an die Stelle der ganzen positiven Zahl n die jedes beliebigen Werthes fähige Zahl m getreten ist.

Zwischen den in (6) dargestellten Polynomial-Coefficienten finden einfache Beziehungen statt, mit Hilfe deren sich jeder derselben aus den ihm vorangehenden Coefficienten berechnen lässt. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{n}{A}_0 = \alpha_0{}^n \\
\alpha_0 \overset{n}{A}_1 = n\alpha_1 \overset{n}{A}_0 \\
2\,\alpha_0 \overset{n}{A}_2 = 2n\alpha_2 \overset{n}{A}_0 + (n-1)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_1 \\
3\,\alpha_0 \overset{n}{A}_3 = 3n\alpha_3 \overset{n}{A}_0 + (2n-1)\,\alpha_2 \overset{n}{A}_1 + (n-2)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_2 \\
4\,\alpha_0 \overset{n}{A}_4 = 4n\alpha_4 \overset{n}{A}_0 + (3n-1)\alpha_3 \overset{n}{A}_1 + (2n-2)\alpha_2 \overset{n}{A}_2 + (n-3)\alpha_1 \overset{n}{A}_3 \\
5\,\alpha_0 \overset{n}{A}_5 = 5n\alpha_5 \overset{n}{A}_0 + (4n-1)\alpha_4 \overset{n}{A}_1 + (3n-2)\alpha_3 \overset{n}{A}_2 + (2n-3)\alpha_2 \overset{n}{A}_3 \\
\qquad + (n-4)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_4
\end{array}\right\} (7)$$

u. s. w.

Das Gesetz der Fortschreitung fällt deutlich in die Augen. Zur wirklichen Berechnung der Polynomial-Coefficienten in einem praktischen Falle, namentlich wenn dieselben numerische sind, sind die Formeln (7) bequemer als die obigen (6).

Wäre die folgende Reihe von allgemeinerer Form:

$$y = a_0 x^k + a_1 x^{k+h} + a_2 x^{k+2h} + a_3 x^{k+3h} + \ldots.$$

zur m^{ten} Potenz zu erheben, so hat man:

$$y^m = x^{km}(a_0 + a_1 x^h + a_2 x^{2h} + a_3 x^{3h} + \ldots..)^m,$$

und wenn man $x^h = z$ setzt:

$$y^m = z^{\frac{km}{h}}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots...)^m,$$

wodurch die Aufgabe wieder auf die oben behandelte zurückgeführt ist.

Wäre endlich ein Polynom von der Form $p = (a + b + c + d + \ldots)$ zur m^{ten} Potenz zu erheben, so hätte man nur in obiger Entwickelung $x = 1$ zu setzen.

II. Die Exponentialreihe.

65. Um die Exponentialfunktion a^x in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, setzen wir in der Binomialreihe:

$$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \ldots. \begin{cases} y > -1 \\ y < +1 \end{cases}$$

$1 + y = a^\alpha$ und $n = \dfrac{x}{\alpha}$, so erhalten wir:

$$a^x = 1 + \frac{x}{\alpha}(a^\alpha - 1) + \frac{\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)}{1.2}(a^\alpha - 1)^2 + \frac{\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\alpha} - 2\right)}{1.2.3}(a^\alpha - 1)^3 + \dots$$

oder:

$$a^x = 1 + \frac{a^\alpha - 1}{\alpha}x + \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 \frac{x(x-\alpha)}{1.2} + \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3} + \dots,$$

und zwar für jeden Werth des Exponenten x, und für solche Werthe von α, welche der Bedingung $y = a^\alpha - 1 \begin{smallmatrix} > -1 \\ < +1 \end{smallmatrix}$ genügen, wo a eine beliebige positive Zahl bedeutet. Letztere Bedingung wird um so gewisser erfüllt sein, je kleiner wir α nehmen, somit auch für $\alpha = 0$; lassen wir daher α in 0 übergehen und setzen den noch unbekannten Grenzwerth:

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = k, \tag{1}$$

so folgt:

$$a^x = 1 + \frac{k.x}{1} + \frac{k^2.x^2}{1.2} + \frac{k^3.x^3}{1.2.3} + \frac{k^4.x^4}{1.2.3.4} + \dots, \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \tag{2}$$

wo k eine noch unbekannte bloss von a abhängige constante Grösse bedeutet, und x jedes Werthes von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist. Zur Kenntniss der Constante k führt die Bemerkung, dass, da k bloss eine Funktion von a ist, wohl auch ein Werth von a existiren wird, für welchen $k = 1$ ist. Bezeichnen wir diesen besonderen Werth von a mit e, so geht die Gl. (2) über in:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots; \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \tag{3}$$

setzt man aber hier $x = 1$, so folgt:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \tag{4}$$

Diese Reihe convergirt und liefert durch Addition einer hinreichenden Anzahl von Gliedern den gesuchten Werth von a, für welchen $k = 1$ wird, nämlich:

$$e = 2{,}7182818284\ldots\ldots$$

Diese Zahl 2,718 . . ., welche in der Analysis, gleich der Zahl $\pi = 3{,}1415\ldots$, eine grosse Rolle spielt, werden wir in der Folge, wie dies üblich ist, ausschliesslich mit dem Buchstaben e bezeichnen und es lässt sich zeigen, dass dieselbe eine irrationale Zahl ist.

Setzt man nun in (2) $x = 1$, in (3) $x = k$, so erhält man:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

woraus, da die im zweiten Theile dieser Gleichungen stehende Reihe für jeden Werth von k convergirt, $e^k = a$ folgt. Nimmt man von beiden Theilen dieser Gleichung die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme, so kommt $k \log e = \log a$, woraus endlich

$$k = \lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\log a}{\log e} \tag{5}$$

folgt. Hiemit geht (2) über in:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\left(\frac{\log a}{\log e}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \tag{6}$$

in welcher Gleichung nun alles bestimmt ist, und die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme genommen werden können. Nichts hindert aber, ein Logarithmensystem zu construiren, dessen Basis die Zahl e ist; bezeichnet man sodann die Logarithmen dieses Systemes, welche man natürliche nennt — im Gegensatze zu den künstlichen, deren Grundzahl eine beliebige Zahl b sein kann, und die wir wie oben mit dem Zeichen log bezeichnen wollen — mit dem Buchstaben l, so folgt aus (5), wegen $le = 1$:

$$k = \lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = la; \tag{7}$$

endlich wird:

$$a^x = 1 + \frac{x.\,la}{1} + \frac{x^2.\,(la)^2}{1.2} + \frac{x^2.\,(la)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \tag{8}$$

66. Die Zahl $e = 2{,}718\ldots$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, ist durch die unendliche convergirende Reihe (4) definirt. Eine andere Bestimmung derselben ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (7):

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = la, \text{ [für } \alpha = 0]. \tag{7}$$

Setzt man nämlich $a^\alpha = 1 + \beta$, wo β eine mit α verschwindende Grösse bezeichnet, so wird:

$$\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\frac{\log_a(1+\beta)}{\beta}} = \frac{1}{\log_a\left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]},$$

somit:

$$\log_a\left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right] = \frac{1}{\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}},$$

wo mit $\log_a$ ein Logarithmus aus dem Systeme, dessen Grundzahl $= a$, bezeichnet ist. Aus der letzten Gleichung folgt nun:

$$(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{1}{\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}}},$$

und hieraus, wenn man zur Grenze übergeht, mit Rücksicht auf (7):

$$\lim(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{1}{la}},$$

d. i. weil dem Begriffe der Logarithmen zufolge $e^{la} = a$, also $e = a^{\frac{1}{la}}$ ist,

$$\lim(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e, \text{ [für } \beta = 0]. \tag{9}$$

Die beiden Grenzgleichungen (7) und (9) finden in der Analysis häufige Anwendung. Setzt man in (9) βx an die Stelle von β, wo x eine von β unabhängige, übrigens beliebige aber reelle Zahl bedeutet, so hat man:

$$\lim(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta x}} = e,$$

d. i. weil [§. 18, e]:

$$\lim(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta x}} = \left\{\lim(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{x}} \text{ ist,}$$

$$\lim(1+\beta x)^{\frac{1}{\beta}} = e^x, \text{ [für } \beta = 0]. \tag{10}$$

ne Gleichung, welche die (sogenannte natürliche) Exponentialfunktion als Grenzwerth einer Potenz darstellt.

III. Logarithmische Reihen.

67. Setzen wir in der Gl. (7) des vorigen §. $a = 1 + x$, so folgt:

$$l(1+x) = \lim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}, \text{ [für } \alpha = 0]; \tag{1}$$

lassen wir nun x eine Zahl bedeuten, welche zwischen -1 und $+1$ liegt, also einen echten Bruch, so ist:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

somit:

$$l(1+x) = \lim \left\{ x + \frac{\alpha - 1}{1.2} x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots \right\},$$

woraus, wenn wir α in 0 übergehen lassen,

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \begin{cases} x = -1 \text{ *)} \\ x = +1 \end{cases} \tag{2}$$

folgt. Setzen wir $-x$ an die Stelle von x, so erhalten wir:

$$l(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right), \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \tag{3}$$

welcher Gleichung wir auch die Form:

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \tag{4}$$

geben können, da bekanntlich $lN = -l\frac{1}{N}$ ist. Denken wir uns in dieser Gleichung unter x einen positiven echten Bruch, so ist der

---

*) Ihrer Ableitung zufolge gilt die Reihe nur für Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen; da aber für $x = +1$ die Gleichung in: $l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ übergeht, welche Reihe noch convergirt, und für $x = -1$: $l(0) = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots) = -\infty$ [§. 27] erhalten wird, worin kein Widerspruch liegt, weil bekanntlich der Logarithmus von 0 in jedem System $= -\infty$ ist, so bleibt die Gleichung (2) auch noch für die Grenzwerthe $x = \pm 1$ richtig.

Quotient $\frac{1}{1-x}$ jedes positiven Werthes fähig, welcher > 1; wir können daher $\frac{1}{1-x} = 1 + z$ setzen, unter z irgend eine positive Zahl verstanden, wodurch $x = \frac{z}{z+1}$ wird, und die Gl. (4) sich in folgende verwandelt:

$$l(1+z) = \left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \ldots \begin{cases} z = 0 \\ z = +\infty \end{cases} \quad (5)$$

Zur wirklichen Berechnung der natürlichen Logarithmen der Zahlen sind die vorstehenden Reihen ihrer geringen Convergenz wegen nicht geeignet. Es lassen sich jedoch aus ihnen durch geeignete Umformungen viele andere rascher convergirende Reihen ableiten, von welchen wir einige anführen wollen.

68. Zieht man (3) von (2) ab, so kommt:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\right) \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \quad (6)$$

Setzen wir $\frac{1+x}{1-x} = z$; da für

$$x = -1 : z = 0, \text{ für } x = +1 : z = \infty$$

wird, so ist innerhalb der Grenzen $\begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$, z jedes beliebigen positiven Werthes fähig; da ferner aus obiger Gleichung $x = \frac{z-1}{z+1}$ folgt, so erhalten wir, indem wir diese Ausdrücke in (6) substituiren:

$$lz = 2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \begin{cases} z = 0 \\ z = +\infty \end{cases} \quad (7)$$

welche Gleichung, wenn man $z = \frac{a}{b}$ setzt, folgende Form erhält:

$$l\frac{a}{b} = 2\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \ldots\right] \quad (8)$$

ie Reihe, welche um so rascher convergirt, je kleiner $(a-b)$ gegen $(a+b)$ ist.

Für $a = x + \delta$, $b = x$, erhält man aus (8):

$$l(x+\delta) = lx + 2\left[\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^5 + \ldots\right] (9)$$

ıd hieraus für $\delta = 1$:

7*

$$l(x+1)=lx+2\left[\left(\frac{1}{2x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^5+..\right] \quad (10)$$

mittelst welcher Reihe man bereits die natürlichen Logarithmen der Zahlen berechnen könnte. Für $x > 93$ hat, wie man leicht findet, das 2[te] Glied der Reihe auf die 7[te] Dezimalstelle des Logarithmus keinen Einfluss mehr.

Eine noch rascher convergirende Reihe ergibt sich, wenn man in (8) $a = x^2$, $b = x^2 - 1$ setzt, wodurch

$$l\frac{a}{b} = lx^2 - l(x^2-1) = 2\,lx - l(x-1) - l(x+1),$$

und

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2x^2-1}$$

wird; es kommt:

$$lx = \frac{1}{2}[l(x-1)+l(x+1)] + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2x^2-1)^5} + \ldots\right], \quad (11)$$

eine Reihe, welche zur Berechnung der Logarithmen der aufeinanderfolgenden Primzahlen, aus welchen sich die der zusammengesetzten durch blosse Addition ergeben, schon sehr geeignet ist. Setzt man nämlich den Werth der Reihe in (11):

$$\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\right] = S_x,$$

so hat man zunächst:

$$l2 = \frac{1}{2}\,l3 + S_2;\; l3 = \frac{1}{2}(l2 + l4) + S_3 = \frac{3}{2}\,l2 + S_3;$$

aus beiden Gleichungen folgt:

$$l2 = 2(2\,S_2 + S_3),\;\; l3 = 2(3\,S_2 + 2\,S_3).$$

Nun ist:

$$S_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \ldots = 0.143841036$$

$$S_3 = \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \ldots = 0{,}058891517,$$

von welchen Zahlen die erste 5, die andere 3 Glieder der Reihe in Anspruch nimmt; hiemit wird nun in 7 Dezimalen:

$$l2 = 0{,}6931472.\quad l3 = 1{,}0986123.$$

Weiter ist:

$$l5 = \frac{1}{2}l4 + \frac{1}{2}l6 + S_5 = \frac{3}{2}l2 + \frac{1}{2}l3 + S_5 = 1.6094379$$

$$l7 = \frac{1}{2}l6 + \frac{1}{2}l8 + S_7 = 2\,l2 + \frac{1}{2}l3 + S_7 = 1{,}9459101$$

u. s. w.

Man findet leicht, dass für Werthe von $x \gtreqless 11$ das zweite Glied der Reihe keinen Einfluss mehr auf die 7[te] Dezimalstelle des Logarithmus hat; man kann daher bis auf 7 Dezimalstellen genau für alle Zahlen von 11 angefangen:

$$lx = \frac{1}{2}\left[l(x-1) + l(x+1) + \frac{1}{2x^2-1}\right],$$

und für $x > 3163$ einfach

$$lx = \frac{1}{2}[l(x-1) + l(x+1)]$$

setzen.

Auf gleiche Weise wie wir (10) und (11) aus (8) abgeleitet haben, lassen sich aus (8) noch viele sehr rasch convergirende Reihen entwickeln, indem man nämlich für a und b zwei ganze Funktionen von x von der Beschaffenheit wählt, dass sie sich leicht in einfache Faktoren zerlegen lassen und ihre Differenz eine kleine Zahl wird.

69. Die bisher angeführten Reihen geben die natürlichen Logarithmen der Zahlen, deren Grundzahl $e = 2{,}718\ldots$ ist; sie werden in der Analysis fast ausschliessend gebraucht, während man sich bei dem praktischen Rechnen bekanntlich der gemeinen oder Briggischen Logarithmen bedient, deren Grundzahl 10 ist. Diese lassen sich aber aus den natürlichen leicht berechnen. Bezeichnet man überhaupt mit log die Logarithmen eines Systems, dessen Basis b ist, so hat man, wenn N eine beliebige Zahl bedeutet, nach dem Begriffe des Logarithmus $N = b^{\log N} = e^{lN}$; nimmt man von beiden Theilen der Gleichung $b^{\log N} = e^{lN}$ sowohl die natürlichen als die künstlichen Logarithmen, so kommt, da $\log b = 1$ ist:

$$\log N.\, lb = lN$$
$$\log N = lN.\log e;$$

durch Division beider Gleichungen erhält man:

$$\frac{1}{lb} = \log e,$$

somit, wenn man die Constante $\frac{1}{lb} = M$ setzt:

$$\log N = M . lN.$$

Die Constante M heisst der Modulus des auf die Basis b gebauten Logarithmensystemes und ist, wie man sieht, der reciproke Werth des natürlichen Logarithmen der Grundzahl b. Für das gemeine Logarithmensystem ist $b = 10$, und

$$l10 = l2 + l5 = 2{,}3025851,$$

somit:

$$M = \frac{1}{l10} = 0{,}4342945;$$

man erhält daher die gemeinen Logarithmen, wenn man die natürlichen mit $M = 0{,}4342945$ multiplicirt; umgekehrt folgen die natürlichen aus den gemeinen, wenn man letztere mit

$$\frac{1}{0{,}4342945} = 2{,}3025851$$

multiplicirt.

Um die Reihen (2) bis (11) für gemeine Logarithmen umzuformen, hat man nur das Zeichen l mit jenem log zu vertauschen und den Reihenausdrücken den Faktor M vorzusetzen.

70. Aus der Exponentialreihe (8), §. 65 lässt sich leicht eine Reihe ableiten, welche eine Zahl z durch den Logarithmus derselben ausdrückt. Setzt man nämlich $a^x = z$, so wird $xla = lz$, somit:

$$z = 1 + \frac{lz}{1} + \frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \ldots \begin{cases} z = 0 \\ z = +\infty \end{cases}$$

IV. Trigonometrische Reihen.

A. Reihen für Sinus und Cosinus vielfacher Bögen.

71. Setzt man in der Moivre'schen Binomialformel [Gl. (3) §. 52]:

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi),$$

in welcher x einen beliebigen Bogen, m eine beliebige Zahl und r eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten, der Kürze halber

$$\cos x = p, \quad \sin x = q,$$

so wird:



$$\cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi) = (p + iq)^m = p^m(1 + \frac{q}{p} i)^m;$$

nimmt man ferner an, dass $q = \sin x < p = \cos x$, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass der Bogen x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liege, so ist $\frac{q}{p}$ ein echter Bruch und das Binom $(1 + \frac{q}{p} i)^m$ kann nach dem Newton'schen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickelt werden; man erhält, wenn man zugleich die reellen und imaginären Glieder zusammenfasst:

$$\begin{aligned} &\cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi) = \\ &= p^m \left[1 - \binom{m}{2}\frac{q^2}{p^2} + \binom{m}{4}\frac{q^4}{p^4} - \ldots\right] + \\ &+ p^m \left[\binom{m}{1}\frac{q}{p} - \binom{m}{3}\frac{q^3}{p^3} + \ldots\ldots\right] i. \end{aligned} \tag{1}$$

Bedeutet nun m eine ganze Zahl, so zerfällt [§. 47] diese Gleichung sofort in folgende zwei:

$$\begin{aligned} \cos mx &= p^m \left[1 - \binom{m}{2}\frac{q^2}{p^2} + \binom{m}{4}\frac{q^4}{p^4} - \ldots\ldots\right], \\ \sin mx &= p^m \left[\binom{m}{1}\frac{q}{p} - \binom{m}{3}\frac{q^3}{p^3} + \binom{m}{5}\frac{q^5}{p^5} - \ldots\right], \end{aligned} \tag{2}$$

weil dann einerseits bekanntlich

$$\cos m(x + 2r\pi) = \cos mx, \ \sin m(x + 2r\pi) = \sin mx$$

ist, anderseits aber die Potenz p^m nur einen Werth zulässt.

Ist aber $m = \frac{h}{k}$ ein rationaler Bruch, so haben beide Theile der Gl. (1) k verschiedene Werthe [§§. 52 und 55]; es entspricht jedem der k Werthe von p^m im zweiten Theile ein bestimmter Werth von r im ersten Theile, wodurch eben bewirkt wird, dass beide Theile der Gleichung einander gleich werden. Unter den k Werthen von p^m befindet ch aber nothwendig ein reeller, da x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt, somit $p = \cos x$ immer positiv ist. Lassen wir nun in (1) ^{m} diesen reellen Werth bedeuten, so zerfällt diese Gleichung in lgende zwei:

$$\left.\begin{aligned}\cos m(x+2r\pi)&=p^m\left[1-\binom{m}{2}\frac{q^2}{p^2}+\binom{m}{4}\frac{q^4}{p^4}-\ldots\right],\\ \sin m(x+2r\pi)&=p^m\left[\binom{m}{1}\frac{q}{p}-\binom{m}{3}\frac{q^3}{p^3}+\binom{m}{5}\frac{q^5}{p^5}-\ldots\right],\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

und es bedarf nun noch der Bestimmung desjenigen Werthes von r, welcher dem reellen Werthe von p^m entspricht.

Hiebei kommt uns der Umstand zu Statten, dass r von x unabhängig sein muss. Denn die zweiten Theile der Gleichungen (3) sind offenbar stetige Funktionen von x; den ersten Theilen muss daher dieselbe Eigenschaft zukommen, was nur der Fall sein wird, wenn der Bogen $m(x+2r\pi)=mx+2mr\pi$ eine stetige Funktion von x ist. Dies kann aber nur unter zwei Bedingungen stattfinden: 1) entweder muss $2mr\pi$, also r eine constante von x unabhängige Grösse sein; oder 2) es muss r selbst eine stetige Funktion von x sein. Letzteres ist aber unmöglich, da r nur ganzer Zahlenwerthe fähig ist, somit nicht stetig, sondern nur sprungweise, immer um eine Einheit, sich ändern kann. Hieraus folgt also, dass r von x unabhängig ist und zu allen möglichen Werthen von x derselbe Werth von r gehört.

Es genügt daher, den Werth von r für irgend einen speziellen Werth von x zu bestimmen, wozu der Werth $x=0$ am geeignetsten ist. Für diesen Werth von x geben die Gleign. (3), da

$$p=\cos 0=1,\ q=\sin 0=0$$

wird:

$$\cos 2mr\pi=1,\ \sin 2mr\pi=0,$$

welche Gleichungen nur bestehen können, wenn mr eine ganze Zahl ist. Dann ist aber

$$\cos m(x+2r\pi)=\cos mx,\ \sin m(x+2r\pi)=\sin mx,$$

wodurch aber die Gleichungen (3) wieder in jene (2) sich verwandeln. Diese bestehen daher für jeden Werth des Multiplikators m. Führt man im zweiten Theile derselben die Multiplikation mit p^m aus und stellt die Werthe von p und q wieder her, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\cos mx&=\cos x^m-\binom{m}{2}\cos x^{m-2}\sin x^2+\\&+\binom{m}{4}\cos x^{m-4}\sin x^4-\ldots\end{aligned}\right|\quad x>-\frac{\pi}{4}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin mx&=m\cos x^{m-1}\sin x-\binom{m}{3}\cos x^{m-3}\sin x^3+\\&+\binom{m}{5}\cos x^{m-5}\sin x^5-\ldots\end{aligned}\right|\quad x<+\frac{\pi}{4}\quad(5)$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so brechen diese Reihen ab und gelten dann für jeden Werth von x; für jeden anderen Werth von m werden sie unendlich und gelten nur für solche Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{4}$ liegen.

Hat man den Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens x, welcher einen halben Quadranten überschreitet, in eine Reihe zu verwandeln, so bringe man diesen Bogen x durch Division mit $\frac{\pi}{2}$ auf die Form $x = n\frac{\pi}{2} + x'$, wo n immer so gewählt werden kann, dass x' zwischen die Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt. Dann ist:

$$\cos mx = \cos m\left(n\frac{\pi}{2} + x'\right) = \cos mn\frac{\pi}{2}\cos mx' - \sin mn\frac{\pi}{2}\sin mx',$$

$$\sin mx = \sin m\left(n\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sin mn\frac{\pi}{2}\cos mx' + \cos mn\frac{\pi}{2}\sin mx',$$

wo nun $\sin mx'$ und $\cos mx'$ nach obigen Formeln entwickelt werden können.

Setzt man in (4) und (5) statt m der Reihe nach 2, 3, 4, ..., so erhält man:

$$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$$
$$\cos 3x = \cos x^3 - 3\cos x \sin x^2$$
$$\cos 4x = \cos x^4 - 6\cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4$$

u. s. w.

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$
$$\sin 3x = 3\cos x^2 \sin x - \sin x^3$$
$$\sin 4x = 4\cos x^3 \sin x - 4\cos x \sin x^3$$

u. s. w.

72. Die Reihen (4) und (5), welche nach den fallenden Potenzen des Cosinus und den steigenden des Sinus gleichzeitig fortschreiten, lassen sich leicht in solche umformen, welche bloss Potenzen des Sinus enthalten. Da nämlich $\cos x = (1 - \sin x^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\sin x < 1$, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\cos x^r = (1 - \sin x^2)^{\frac{r}{2}} = 1 - \binom{\frac{r}{2}}{1}\sin x^2 + \binom{\frac{r}{2}}{2}\sin x^4 -$$

$$- \binom{\frac{r}{2}}{3}\sin x^6 + \dots \qquad (\alpha)$$

Setzt man hier nach einander $r = m,\ m - 1,\ m - 2$, u. s. w. und führt die so erhaltenen Reihen für die Potenzen von $\cos x$ in (4) und (5) ein, so erhält man, wenn man nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ ordnet und die Coefficienten gehörig reducirt, ohne Schwierigkeit:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin x^2 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1.2.3.4}\sin x^4 -$$

$$-\frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin x^6 + \ldots, \tag{6}$$

$$\sin mx = m\sin x - \frac{m(m^2 - 1^2)}{1.2.3}\sin x^3 +$$

$$+\frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \ldots \tag{7}$$

Die Reihen (4) und (5) lassen sich ferner auch in folgender Form darstellen:

$$\cos mx = \cos x\left[\cos x^{m-1} - \binom{m}{2}\cos x^{m-3}\sin x^2 + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{4}\cos x^{m-5}\sin x^4 - \ldots\right],$$

$$\sin mx = \cos x\left[m\cos x^{m-2}\sin x - \binom{m}{3}\cos x^{m-4}\sin x^3 + \ldots\right];$$

schafft man nun aus den Reihen innerhalb der Klammern mittelst (α) die Potenzen des Cosinus weg, so erhält man folgende Reihen:

$$\cos mx = \cos x\left[1 - \frac{m^2 - 1^2}{1.2}\sin x^2 + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1.2.3.4}\sin x^4 - \ldots\right] \tag{8}$$

$$\sin mx = \cos x\left[m\sin x - \frac{m(m^2 - 2^2)}{1.2.3}\sin x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \ldots\right]^{*)} \tag{9}$$

Wir haben demnach für jede der Funktionen $\sin mx$ und $\cos mx$ zwei nach Potenzen von $\sin x$ fortschreitende Entwickelungen, deren eine (6) und (9), wie aus dem Baue der Coefficienten erhellt, abbricht,

*) Es lässt sich zeigen, dass die Coefficienten der Potenzen des Sinus in den Reihen (6) bis (9) nach dem oben deutlich ausgesprochenen Bildungsgesetze fortlaufen; am einfachsten, indem man sich auf gewisse Eigenschaften der Binomialcoefficienten stützt. Man kann hierüber nachsehen: Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 4te Auflage, Jena 1868.

wenn m eine gerade Zahl, die andere (7) und (8), wenn m eine ungerade Zahl ist. Die vier Gleichungen gelten in diesem Falle für jeden Werth von x.

Setzt man der Reihe nach $m = 2, 3, 4 \ldots$ so erhält man aus (6) und (8):

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin x^2$$
$$\cos 3x = (1 - 4 \sin x^2) \cos x$$
$$\cos 4x = 1 - 8 \sin x^2 + 8 \sin x^4$$
$$\cos 5x = (1 - 12 \sin x^2 + 16 \sin x^4) \cos x$$
$$\cos 6x = 1 - 18 \sin x^2 + 48 \sin x^4 - 32 \sin x^6$$
$$\cos 7x = (1 - 24 \sin x^2 + 80 \sin x^4 - 64 \sin x^6) \cos x$$

u. s. w.

und aus (7) und (9):

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin x^3$$
$$\sin 4x = (4 \sin x - 8 \sin x^3) \cos x$$
$$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin x^3 + 16 \sin x^5$$
$$\sin 6x = (6 \sin x - 32 \sin x^3 + 32 \sin x^5) \cos x$$
$$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin x^3 + 112 \sin x^5 - 64 \sin x^7$$

u. s. w.

Die Reihen (6) und (7) convergiren für jeden Werth von $\sin x$, während die Reihen (8) und (9) für $\sin x = 1$ divergent werden. Man überzeugt sich hievon leicht mittelst des in §. 34. vorgetragenen Satzes. Wiewohl hiernach diese vier Reihen für jeden Werth des Bogens x $\left(\text{die letzten zwei mit Ausnahme der Werthe von der Form } x = \pm n\frac{\pi}{2}\right)$ convergiren, also eine bestimmte Summe haben, so folgt hieraus noch nicht, dass diese Summe für jeden Werth von x durch die links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke $\cos mx$, $\sin mx$ dargestellt werde. Dass obige Gleichungen (6) bis (9) für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi}{4}$ liegen, richtig sein müssen, ist klar, weil den Gleichungen (4) und (5), aus welchen sie abgeleitet wurden, diese Eigenschaft zukommt. Eben so leicht überzeugt man sich aber, dass für Werthe von x, welche $\frac{\pi}{2}$ überschreiten, aufhören richtig zu sein; denn da $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$ ist, so erhält der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Theil einer jeden dieser vier Gleichungen

für $x = \frac{\pi}{2} - y$ und für $x = \frac{\pi}{2} + y$ denselben numerischen Werth, während, wie leicht einzusehen, keineswegs

$$\cos m\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos m\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \text{ und } \sin m\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin m\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$$

ist, ausgenommen in dem Falle, wenn in (6) und (9) m eine gerade, in (7) und (8) m eine ungerade Zahl ist. Es erübrigt also nur noch die Untersuchung für das Intervall von $x = \pm\frac{\pi}{4}$ bis $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Substituiren wir in den Glgn. (4) und (5) $2m$ statt m und $\frac{x}{2}$ statt x, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \cos mx &= \cos\frac{x}{2}^{2m} - \binom{2m}{2}\cos\frac{x}{2}^{2m-2}\sin\frac{x}{2}^{2} + \ldots \\ \sin mx &= \binom{2m}{1}\cos\frac{x}{2}^{2m-1}\sin\frac{x}{2} - \binom{2m}{3}\cos\frac{x}{2}^{2m-3}\sin\frac{x}{2}^{3} + \ldots \end{aligned}\right\}(\beta)$$

welche Gleichungen sofort, wenn m keine ganze positive Zahl ist, erfordern, dass $\frac{x}{2}$ zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi}{4}$, d. i. x zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi}{2}$ liege. Mittelst der bekannten goniometrischen Ausdrücke:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos x}, \quad \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin x^2}$$

lassen sich nun sämmtliche in den Reihen (β) vorkommenden Potenzen von $\cos\frac{x}{2}$ und $\sin\frac{x}{2}$ mit Hilfe der Binomialformel in convergirende nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ laufende Reihen auflösen; substituirt man diese in (β), so erhält man auf dem oben betretenen Wege vier Reihen, je zwei für $\sin mx$ und $\cos mx$, welche, sowie die Reihen (6) bis (9) nach Potenzen von $\sin x$ fortschreiten, jedoch von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ gelten, da sie aus (β) abgeleitet wurden, welchen dieses Giltigkeitsintervall zukommt. Diese vier neuen Reihen müssen jedoch mit jenen (6) bis (9) identisch sein, da sich eine Funktion einer Veränderlichen nur auf e i n e Art in eine nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen (hier $\sin x$) fortschreitende Reihe entwickeln lässt. Wir sind somit berechtiget, die Gleichungen (6) bis (9) für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ als richtig anzunehmen.

B. **Reihen für $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, u. s. w., welche nach Potenzen des Bogens x fortschreiten.**

73. Zieht man aus dem zweiten Theile der Glgn. (4) und (5) $\cos x^m$ als Faktor heraus, so erhält man:

$$\cos mx = \cos x^m \left[1 - \binom{m}{2} \operatorname{tg} x^2 + \binom{m}{4} \operatorname{tg} x^4 - \ldots\right] \left| x > -\frac{\pi}{4} \right. \quad (10)$$

$$\sin mx = \cos x^m \left[m \operatorname{tg} x - \binom{m}{3} \operatorname{tg} x^3 + \binom{m}{5} \operatorname{tg} x^5 - \ldots\right] \left| x < +\frac{\pi}{4} \right. \quad (11)$$

und wenn man $\frac{x}{m}$ statt x schreibt:

$$\cos x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[1 - \binom{m}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^2 + \binom{m}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots\right] \left| x > -\frac{m\pi}{4} \right.$$

$$\sin x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[m \operatorname{tg}\frac{x}{m} - \binom{m}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots\ldots\right] \left| x < +\frac{m\pi}{4} \right.$$

Der erste Theil dieser Gleichungen ist von m unabhängig; folglich muss dies auch mit dem zweiten Theile derselben der Fall sein, woraus sich auf die Möglichkeit schliessen lässt, diese Grösse aus den Gleichungen wegzuschaffen. Zu diesem Behufe bemerken wir, dass diese Gleichungen, sowie jene (4), (5), aus welchen sie abgeleitet wurden, für jeden Werth von m richtig sind, und diese Eigenschaft somit nicht verlieren werden, wenn wir m unendlich zunehmen lassen.

Führen wir nun in den letzten Gleichungen die Binomialcoefficienten statt der Symbole $\binom{m}{2}$, $\binom{m}{3}$,... ein, so erhalten dieselben, wenn wir in jedem Gliede aus dem Coefficienten $\binom{m}{r}$ den Faktor m^r herausheben und ihn mit $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^r$ zu $\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^r$ vereinigen, folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
\cos x &= \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[1 - \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1.2.3.4}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots\right], \\
\sin x &= \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right) - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\left(1-\frac{4}{m}\right)}{1.2.3.4.5}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^5 \ldots\ldots\right],
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo wir nun $m = \infty$ setzen und zu diesem Zwecke die Grenzwerthe von $\left(m \operatorname{tg} \frac{x}{m}\right)$ und $\left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$ zu bestimmen haben.

Setzt man $\frac{x}{m} = \alpha$, wo nun α einen unendlich abnehmenden Bogen bedeutet, so wird $m \operatorname{tg} \frac{x}{m} = \frac{x}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$, somit:

$$\lim \left(m \operatorname{tg} \frac{x}{m}\right) = x \cdot \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} \lim \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Bekanntlich ist aber für einen Bogen $\alpha < \frac{\pi}{2}$ immer

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

oder

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

somit auch

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Der Werth von $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ liegt also immer zwischen 1 und $\cos \alpha$; somit ist, da $\lim \cos \alpha = 1$, nach §. 18. *h*:

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1;$$

da ferner auch $\lim \frac{1}{\cos \alpha} = 1$ ist, so wird $\lim \left(m \operatorname{tg} \frac{x}{m}\right) = x$.

Ferner ist für $\frac{x}{m} = \alpha$:

$$\left(\cos \frac{x}{m}\right)^m = (\cos \alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = (1 - \sin \alpha^2)^{\frac{x}{2\alpha}} = \left\{(1 - \sin \alpha^2)^{\frac{1}{\sin \alpha^2}}\right\}^{\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{2}},$$

somit, wenn man zur Grenze für $\alpha = 0$ übergeht und sich erinnert, dass nach §. 66, Gl. (10), für $x = -1$ und $\beta = \sin \alpha^2$:

$$\lim (1 - \sin \alpha^2)^{\frac{1}{\sin \alpha^2}} = e^{-1}$$

ist, auch

$$\lim \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m = (e^{-1})^{1 \cdot 0 \cdot \frac{x}{2}} = 1.$$

Hiemit erhält man nun aus den Gleichungen (a), wenn man noch beachtet, dass die Brüche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$ in den Coefficienten für $m = \infty$ in Null übergehen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \quad \begin{cases} x = -\infty & (12) \\ x = +\infty & (13) \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\dots7} + \dots$$

zwei für jeden Werth von x convergirende Reihen, welche den Sinus und Cosinus des Bogens x durch diesen Bogen selbst ausdrücken und für die gesammte Analysis von grösster Wichtigkeit sind.

74. Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (13) lassen sich nun auch die übrigen trigonometrischen Funktionen ohne Schwierigkeit in Reihen entwickeln, wobei wir dem von Schlömilch (Algebraische Analysis, 2. Aufl. S. 174 ff.) eingehaltenen Gange folgen wollen.

Es ist:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)} = \Big[1-(1-\cos x)\Big]^{-1}$$

Setzt man x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegend voraus, so ist $\cos x$ positiv, somit $(1-\cos x)$ ein echter Bruch, und die Potenz $[1-(1-\cos x)]^{-1}$ lässt sich nach dem binomischen Lehrsatze in eine nach Potenzen von $(1-\cos x)$ fortschreitende convergirende Reihe entwickeln; man erhält:

$$\sec x = 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + (1-\cos x)^3 + \dots$$

Man hat aber nach (12):

$$(1-\cos x) = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^4}{3.4.5.6} - \dots\right), \text{ somit auch:}$$

$$(1-\cos x)^2 = \frac{x^4}{4}\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \dots\right),$$

$$(1-\cos x)^3 = \frac{x^6}{8}\left(1 - \dots\right),$$

folglich, wenn man substituirt und nach Potenzen von x ordnet:

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots \quad \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2} \\ x < +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (14)$$

wo wir, wie üblich, die Faktorenfolge $1.2.3.4\dots n$ mit $n!$ bezeichnen.

Wir erfahren durch diese Ableitung jedoch nur die Form der Reihe, während das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der Potenzen

von x im Zähler fortschreiten, unbekannt bleibt. Um dieses kennen zu lernen, stellen wir die Reihe (14) unter folgender Form vor:

$$\sec x = T_0 + \frac{T_2 x^2}{2!} + \frac{T_4 x^4}{4!} + \frac{T_6 x^6}{6!} + \dots \quad (15)$$

und substituiren die Reihen (12) und (15) in die identische Gleichung $1 = \sec\, x \,.\, \cos\, x$, so kommt:

$$1 = \left(T_0 + \frac{T_2 x^2}{2!} + \frac{T_4 x^4}{4!} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right),$$

und durch wirkliche Multiplikation:

$$1 = T_0 + \left(\frac{T_2}{2!} - \frac{T_0}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{T_4}{4!} - \frac{T_2}{2!}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{T_0}{4!}\right) x^4 +$$
$$+ \left(\frac{T_6}{6!} - \frac{T_4}{4!}\,\frac{1}{2!} + \frac{T_2}{2!}\cdot\frac{1}{4!} - \frac{T_0}{6!}\right) x^6 + \dots$$

Nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten folgt nun, dass $T_0 = 1$, und die Coefficienten der Potenzen x^2, x^4,... der Nulle gleich sein müssen. Bezeichnet man daher mit m eine gerade von 0 verschiedene Zahl, so hat man allgemein nach dem obigen deutlich ausgesprochenen Gesetze:

$$\frac{T_m}{m!} - \frac{T_{m-2}}{(m-2)!}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{T_{m-4}}{(m-4)!}\cdot\frac{1}{4!} - \frac{T_{m-6}}{(m-6)!}\cdot\frac{1}{6!} + \dots = 0$$

oder, wenn man mit $m!$ multiplicirt, die dadurch in den Ausdruck eintretenden Binomialcoefficienten mit den bekannten Symbolen bezeichnet und noch beachtet, dass für m gerade, immer $\sin\frac{m\pi}{2} = 0$ ist:

$$T_m - \binom{m}{2} T_{m-2} + \binom{m}{4} T_{m-4} - \binom{m}{6} T_{m-6} + \dots = \sin\frac{m\pi}{2}. \quad (16)$$

Setzt man hier der Reihe nach statt m: 2, 4, 6, 8..., so erhält man, da, $T_0 = 1$ bekannt ist, die Coefficienten in den Zählern der aufeinanderfolgenden Glieder der Sekantenreihe (15), nämlich:

$T_2 - T_0 = 0$	somit	$T_2 = T_0 = 1$
$T_4 - 6\,T_2 + T_0 = 0$		$T_4 = 5$
$T_6 - 15\,T_4 + 15\,T_2 - T_0 = 0$		$T_6 = 61$
$T_8 - 28\,T_6 + 70\,T_4 - 28\,T_2 + T_0 = 0$		$T_8 = 1385$
u. s. w.		u. s. w.

75. Um $\operatorname{tg} x$ in eine Reihe zu entwickeln, hat man, wegen $\operatorname{tg} x = \sin\, x \,.\, \sec\, x$, wenn man die Reihen (13) und (14) substituirt:

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \ldots\right)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \ldots \quad \left\} \begin{array}{l} x > -\frac{\pi}{2} \\ x < +\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \tag{17}$$

wo die angedeuteten Grenzen daher rühren, weil die als Faktor eingeführte Sekantenreihe an dieselben gebunden ist. Die Tangentenreihe hat somit die Form:

$$\operatorname{tg} x = T_1 x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \frac{T_7 x^7}{7!} + \ldots \tag{18}$$

Um das Bildungsgesetz der Coefficienten T_1, T_3, T_5, ... kennen zu lernen, substituiren wir in die Gleichung $\sin x = \operatorname{tang} x . \cos x$ die Reihen (12), (13) und (18) und erhalten:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \left(T_1 x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right),$$

d. i. nach verrichteter Multiplikation:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = T_1 x + \left(\frac{T_3}{3!} - \frac{T_1}{2!}\right) x^3 + \left(\frac{T_5}{5!} - \right.$$
$$\left. - \frac{T_3}{3!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_1}{4!}\right) x^5 + \left(\frac{T_7}{7!} - \frac{T_5}{5!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_3}{3!} \cdot \frac{1}{4!} - \frac{T_1}{6!}\right) x^7 + \ldots$$

Hieraus folgt nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten zunächst $T_1 = 1$, und allgemein durch Gleichsetzung der Coefficienten von x^m, wenn m irgend eine ungerade Zahl:

$$\frac{T_m}{m!} - \frac{T_{m-2}}{(m-2)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{m-4}}{(m-4)!} \cdot \frac{1}{4!} - \ldots = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m!};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $m!$ und beachtet, dass, wenn m ungerade, immer $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \sin \frac{m\pi}{2}$, so hat man:

$$T_m - \binom{m}{2} T_{m-2} + \binom{m}{4} T_{m-4} - \binom{m}{6} T_{m-6} + \ldots = \sin \frac{m\pi}{2}. \tag{19}$$

Diese Gleichung liefert sofort die Tangenten-Coefficienten, T_3, T_5, ..., wenn man, da $T_1 = 1$ bekannt ist, statt m der Reihe nach die Zahlen 3, 5, 7, 9, ... substituirt. Es ist bemerkenswerth, dass die Glgn. (16)

und (19) sich der Form nach nicht unterscheiden; setzt man daher in einer von beiden statt m die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., so liefert sie, da $T_0 = 1$ ist, die Zahlen T_1, T_2, T_3, T_4, ..., von welchen jene mit geradem Stellenzeiger die Sekantencoefficienten, jene mit ungeradem die Tangentencoefficienten sind.

76. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ statt $\sin x$ die Reihe (13), so erhält man:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots};$$

der zweite Faktor im zweiten Theile liefert eine Reihe von der Form $1 + Ax^2 + Bx^4 + \ldots.$ [§. 43. Aufg. 2], so dass also die Reihe für $\operatorname{cosec} x$ nothwendig die Form $\frac{1}{x} + Ax + Bx^3 + \ldots$ annimmt, was mit der Natur dieser Funktion, welche für $x = 0$ unendlich wird, übereinstimmt. Aus diesem Grunde wollen wir zunächst das Produkt $x \operatorname{cosec} x$ in eine Reihe aufzulösen suchen. Es ist:

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)} = \left[1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\right]^{-1};$$

setzen wir nun $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) < 1$ voraus, was dann der Fall sein wird, wenn $\frac{\sin x}{x}$ ein positiver echter Bruch ist, somit x zwischen die Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ fällt, so erhalten wir durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \\ + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 + \ldots \qquad \left\{ \begin{array}{l} x > -\pi \\ x < +\pi \end{array} \right.$$

Nun ist:

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{x^2}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \ldots.\right),$$

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{x^4}{(3!)^2}\left(1 - \frac{x^2}{2.5} - \ldots.\right),$$

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{(3!)^3}\left(1 - \ldots\right), \quad \text{u. s. w.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke, ordnet nach Potenzen von x, und dividirt die ganze Gleichung durch x, so bringt man die Reihe für cosec x ohne Mühe auf die Form:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{3}x}{2!} + \frac{\frac{7}{15}x^3}{4!} + \frac{\frac{31}{21}x^5}{6!} + \dots \quad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{20}$$

oder, wenn man die Coefficienten $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{31}{21}$, ... deren Bildungsgesetz noch unbekannt ist, mit U_1, U_3, U_5, ... bezeichnet:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{U_1 x}{2!} + \frac{U_3 x^3}{4!} + \frac{U_5 x^5}{6!} + \dots \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{21}$$

Da endlich $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x \,.\, \operatorname{cosec} x$, so erhält man durch Multiplikation der Reihen (12) und (20):

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{\frac{2}{3}x}{2!} - \frac{\frac{8}{15}x^3}{4!} - \frac{\frac{32}{21}x^5}{6!} - \dots \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{22}$$

oder, wenn wir die Coefficienten $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{32}{21}$, mit V_1, V_3, V_5, ... bezeichnen:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{V_1 x}{2!} - \frac{V_3 x^3}{4!} - \frac{V_5 x^5}{6!} - \dots \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{23}$$

Die in den Reihen für cosec x und cotg x vorkommenden Coefficienten U und V lassen sich durch die aus dem vorigen §. bekannten Tangentencoefficienten ausdrücken. Bekanntlich ist

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x^2},$$

oder

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg} x^2}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

somit:

$$\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} x;$$

führt man in diese Gleichung die Reihen (23) und (18) ein, so kommt:

$$-\frac{V_1 x}{2!} - \frac{V_3 x^3}{4!} - \frac{V_5 x^5}{6!} - \dots + \frac{2^2 V_1 x}{2!} + \frac{2^4 V_3 x^3}{4!} + \frac{2^6 V_5 x^5}{6!} + \dots$$
$$= T_1 x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \dots,$$

ler:

$$\left(\frac{2^2 V_1}{2!} - \frac{V_1}{2!}\right) x + \left(\frac{2^4 V_3}{4!} - \frac{V_3}{4!}\right) x^3 + \left(\frac{2^6 V_5}{6!} - \frac{V_5}{6!}\right) x^5 + \dots =$$
$$= T_1 x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \dots,$$

somit nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\frac{2^{2n} V_{2n-1}}{(2n)!} - \frac{V_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{T_{2n-1}}{(2n-1)!},$$

d. i. weil $(2n)! = (2n-1)!\, 2n$,

$$V_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}-1} T_{2n-1}. \tag{24}$$

Ferner hat man:

$$2 \operatorname{cosec} 2x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x^2 + \cos x^2}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x,$$

somit:

$$2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x,$$

und nach Einführung der entsprechenden Reihen:

$$\frac{2^2 U_1 x}{2!} + \frac{2^4 U_3 x^3}{4!} + \frac{2^6 U_5 x^5}{6!} + \ldots + \frac{V_1 x}{2!} + \frac{V_3 x^3}{4!} +$$
$$+ \frac{V_5 x^5}{6!} + \ldots = T_1 x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \ldots;$$

hieraus folgt nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\frac{2^{2n} U_{2n-1}}{(2n)!} + \frac{V_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{T_{2n-1}}{(2n-1)!};$$

setzt man nun in diese Gleichung für V_{2n-1} den Werth aus (24), so folgt:

$$U_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1} T_{2n-1}. \tag{25}$$

Da nun die Tangentencoefficienten T_1, T_3, $T_5, \ldots$ sich nach (19) berechnen lassen, so sind durch die Gleichungen (24) und (25) auch die Coefficienten der Cotangenten- und Cosekanten-Reihe gegeben, wenn man daselbst der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ substituirt.

C. Cyklometrische Reihen.

77. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir uns damit beschäftiget, die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, u. s. w. in Reihen aufzulösen, welche nach den steigenden Potenzen des Bogens x fortschreiten; stellen wir uns jetzt die umgekehrte Aufgabe, den Bogen durch Reihen auszudrücken, welche nach den steigenden Potenzen des Sinus, Cosinus u. s. w. dieses Bogens laufen.

Man bezeichnet bekanntlich überhaupt mit arc sin x, arc cos x, arc tg x, u. s. w. den Bogen, zu welchem x als Sinus, Cosinus, Tangente, u. s. w. gehört. Da jedem Werthe von x, als Sinus etc. betrachtet, unendlich viele verschiedene Bögen entsprechen, so sind die Symbole arc sin x, arc cos x, u. s. w. vieldeutige, und wir werden darunter im Folgenden den kleinsten Bogen verstehen, zu welchem x als Sinus, Cosinus, etc. gehört. Unter dieser Voraussetzung folgt aus:

$$\sin x = z : x = \text{arc} \sin z,$$

aus

$$\cos x = z : x = \text{arc} \cos z; \text{ u. s. w.}$$

Dividiren wir Gl. (7) §. 72 durch m, so erhalten wir:

$$\frac{\sin mx}{m} = \sin x - \frac{m^2 - 1^2}{1.2.3} \sin x^3 + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} \sin x^5 - \ldots;$$

lassen wir in dieser Gleichung m unendlich klein werden, so kommt:

$$\lim \frac{\sin mx}{m} = \sin x + \frac{1}{1.2.3} \sin x^3 + \frac{1.3^2}{1.2.3.4.5} \sin x^5 +$$

$$+ \frac{1.3^2.5^2}{1.2\ldots.7} \sin x^7 + \ldots$$

Es ist aber, $mx = \alpha$ gesetzt, wo also α mit m unendlich abnimmt,

$$\lim \frac{\sin mx}{m} = \lim x \frac{\sin \alpha}{\alpha} = x \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = x,$$

somit:

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\sin x^7}{7} + \ldots \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (26)$$

oder, wenn man $\sin x = z$, also $x = \text{arc} \sin z$ setzt:

$$\text{arc} \sin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{z^7}{7} + \ldots \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \quad (27)$$

Da ferner $\text{arc} \sin z + \text{arc} \cos z = \frac{\pi}{2}$ ist, wie aus der Bedeutung dieser Symbole unmittelbar erhellt, so hat man:

$$\text{arc} \cos z = \frac{\pi}{2} - z - \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{z^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{z^7}{7} - \ldots \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \quad (28)$$

Die Gleichung (11) im §. 73 nimmt, wenn man sie durch m dividirt, die Form an:

$$\frac{\sin mx}{m} = \cos x^m \left[\operatorname{tg} x - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{tg} x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tg} x^5 - \ldots \right].$$

Lässt man hier m unendlich klein werden, so folgt:

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} x^5 - \frac{1}{7} \operatorname{tg} x^7 + \ldots . \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = +\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (29)$$

oder, wenn $\operatorname{tg} x = z$, also $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ gesetzt wird:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + \ldots \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases}. \quad (30)$$

Setzt man in dieser Reihe $\frac{1}{z}$ an die Stelle von z, so kommt:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{z^7} + \ldots \begin{cases} z = +1 \\ z = +\infty \end{cases};$$

aus der bekannten Relation $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ folgt aber:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{z} = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z;$$

folglich wird:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{5} \frac{1}{z^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{z^7} - \ldots \begin{cases} z = +1 \\ z = +\infty \end{cases}, \quad (31)$$

welche Reihe für Werthe von z, welche die Einheit übersteigen, anzuwenden kommt, da für solche die Reihe (30) nicht mehr convergirt.

Reihen zur Berechnung der Zahl π.

78. Die im vorigen §. entwickelten Reihen bieten ein sehr bequemes Mittel zur Berechnung der Zahl π dar. Man benutzt hiezu am vortheilhaftesten die Reihe (29) oder (30). Setzt man $x = \frac{\pi}{4}$, so erhält man, weil $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ist:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

die sogenannte Leibnitz'sche Reihe, welche jedoch ihrer geringen Convergenz halber zur Berechnung von π unbrauchbar ist.

Eine besser convergirende Reihe erhält man für $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, wodurch $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wird; man findet:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right),$$

Das wirksamste Mittel indessen, um stark convergirende Reihen zu erhalten, besteht darin, dass man einen aliquoten Theil von π, z. B. $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{6}$ in zwei oder mehrere Bögen zerlegt, deren Tangenten durch einfache Brüche ausdrückbar sind.

Man setze z. B. $\frac{\pi}{4} = p + q$ und $\operatorname{tg} p = \frac{1}{2}$, so wird:

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

also auch:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{1}{3};$$

somit nach (30):

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{1\,3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right),$$

welche Reihe von Euler herrührt und zur Berechnung sehr bequem ist. Legt man die Rechnung auf 10 Dezimalstellen an, wobei von der ersten Reihe 15, von der zweiten 10 Glieder in Anspruch genommen werden, so erhält man:

$$\pi = 3,1415926532,$$

wobei die neun ersten Dezimalstellen richtig sind.

Setzt man $\frac{\pi}{4} = 2p + q$ und $\operatorname{tg} p = \frac{1}{3}$, so wird:

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p^2} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2p\right) = \frac{1}{7}$$

und somit:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7};$$

also:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - ..\right) + \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - ....\right).$$

D. Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens, ausgedrückt durch Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen.

79. Man setze:

$$\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x = p,\quad \cos x - \sqrt{-1}\ \sin x = q,$$

so wird:

$$2\cos x = p + q \ ......(\alpha),\ 2\sqrt{-1}\ \sin x = p - q, \qquad (\beta)$$

$$pq = \cos x^2 + \sin x^2 = 1. \qquad (\gamma)$$

Erheben wir nun die Gl. (α) zur m^{ten} Potenz, wo m eine positive ganze Zahl bedeuten soll, so erhalten wir:

$$(2\cos x)^m =$$

$$p^m + mp^{m-1}q + \binom{m}{2}p^{m-2}q^2 + ... + \binom{m}{2}p^2q^{m-2} + mpq^{m-1} + q^m,$$

oder mit Rücksicht auf (γ):

$$(2\cos x)^m = p^m + mp^{m-2} + \binom{m}{2}p^{m-4} + .. + \binom{m}{2}q^{m-4} + mq^{m-2} + q^m$$

Zufolge der Moivre'schen Binomialformel hat man aber:

$$p^r = \cos rx + \sqrt{-1}\ \sin rx,\quad q^r = \cos rx - \sqrt{-1}\ \sin rx,$$

wodurch die letzte Gleichung in folgende übergeht:

$$(2\cos x)^m =$$

$$\Big[\cos mx + m\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + ... +$$

$$+ \binom{m}{2}\cos(m-4)x + m\cos(m-2)x + \cos mx\Big]$$

$$+ \sqrt{-1}\Big[\sin mx + m\sin(m-2)x + \binom{m}{2}\sin(m-4)x + ... -$$

$$- \binom{m}{2}\sin(m-4)x - m\sin(m-2)x - \sin mx\Big].$$

In jeder der beiden im zweiten Theile stehenden Reihen sind je zwei vom Anfang und Ende gleichweit abstehende Glieder einander gleich, und in der ersten Reihe mit gleichem in der zweiten mit entgegengesetztem Zeichen versehen.

Ist nun m ungerade, so ist die Anzahl der Glieder in beiden Reihen $= m + 1$ eine gerade, welche sich in der ersten paarweise addiren, in der zweiten paarweise aufheben; daher folgt:



F ü r m ungerade: $2^{m-1} . \cos x^m =$

$$\cos mx + \binom{m}{1} \cos (m-2)x + \binom{m}{2} \cos (m-4)x + \ldots\ldots + \\ + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos x. \qquad (32)$$

Ist m gerade, so ist die Anzahl der Glieder in beiden Reihen ungerade und es existirt in diesem Falle ein mittleres Glied; in der ersten Reihe hat dasselbe: $\binom{m}{\frac{1}{2}m} \cos (m - m)x = \binom{m}{\frac{1}{2}m}$, in der zweiten: $\binom{m}{\frac{1}{2}m} \sin (m - m)x = 0$ zum Ausdruck, und da sich die übrigen Glieder der zweiten Reihe wieder paarweise aufheben, so wird:

F ü r m gerade: $2^{m-1} . \cos x^m =$

$$\cos mx + \binom{m}{1} \cos (m-2)x + \binom{m}{2} \cos (m-4)x + \ldots + \\ + \binom{m}{\frac{1}{2}m - 1} \cos 2x + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{1}{2}m}. \qquad (33)$$

Erhebt man in gleicher Weise die Gl. (β) zur m^{ten} Potenz, unter m wieder eine positive ganze Zahl verstanden, so erhält man mit Rücksicht auf (γ):

$$(-1)^{\frac{m}{2}} (2 \sin x)^m = p^m - \binom{m}{1} p^{m-2} + \binom{m}{2} p^{m-4} - \ldots \pm \\ \pm \binom{m}{2} q^{m-4} \mp \binom{m}{1} q^{m-2} \pm q^m,$$

d. i.

$$(-1)^{\frac{m}{2}} (2 \sin x)^m =$$

$$\left[\cos mx - \binom{m}{1} \cos (m-2)x + \ldots \mp \binom{m}{1} \cos (m-2)x \pm \cos mx\right]$$

$$+ \sqrt{-1} \left[\sin mx - \binom{m}{1} \sin (m-2)x + \ldots \pm \binom{m}{1} \sin (m-2)x \mp \sin mx\right]$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem m gerade oder ngerade ist. Man hat daher:

F ü r m ungerade: $(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} . \sin x^m =$

$$\sin mx - \binom{m}{1} \sin (m-2)x + \binom{m}{2} \sin (m-4)x - \ldots \pm \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \sin x. \quad (34)$$

Für m gerade: $(-1)^{\frac{m}{2}} . 2^{m-1} . \sin x^m =$

$$\cos mx - \binom{m}{1} \cos(m-2)x + \binom{m}{2} \cos(m-4)x - \ldots \pm$$

$$\pm \binom{m}{\frac{1}{2}m - 1} \cos 2x \mp \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{1}{2}m}.$$

Man sieht leicht, das diese vier Formeln (32) bis (35) bequem in folgender Weise geschrieben werden können:

Für m gerade oder ungerade:

$$2^{m-1} . \cos x^m = \cos mx + \binom{m}{1} \cos(m-2)x + \binom{m}{2} \cos(m-4)x + \ldots$$

Für m ungerade:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} . 2^{m-1} \sin x^m = \sin mx + \binom{m}{1} \sin(m-2)x +$$

$$+ \binom{m}{2} \sin(m-4)x - \ldots .$$

Für m gerade:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . 2^{m-1} \sin x^m = \cos mx - \binom{m}{1} \cos(m-2)x +$$

$$+ \binom{m}{2} \cos(m-4)x - \ldots ,$$

welche drei Reihen mit jenem Gliede schliessen, welches, das letzte, unter dem Zeichen Sinus oder Cosinus einen positiven Bogen erhält (wobei ein Bogen $= 0$ als positiv genommen wird), und wo vom letzten Gliede bloss die Hälfte zu nehmen ist, wenn m eine gerade Zahl.

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man:

$$2 \cos x^2 = \cos 2x + 1$$
$$4 \cos x^3 = \cos 3x + 3 \cos x$$
$$8 \cos x^4 = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3$$
$$16 \cos x^5 = \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x$$

u. s. w.

$$-2 \sin x^2 = \cos 2x - 1$$
$$-4 \sin x^3 = \sin 3x - 3 \sin x$$
$$8 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3$$
$$16 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x$$

u. s. w.

FÜNFTES KAPITEL.

VON DEN TRANSCENDENTEN FUNKTIONEN MIT IMAGINÄREN VERÄNDERLICHEN.

80. Setzen wir in der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots.$$

wo $e = 2,718281\dots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, $x\sqrt{-1}$ an die Stelle von x, so erhalten wir, wenn der Kürze halber $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird:

$$x^{xi} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right],$$

woraus durch Vergleichung mit den Reihen (12) und (13) in §. 73 folgt:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \tag{1}$$

Durch Aenderung des Zeichens von x ergibt sich hieraus:

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x. \tag{2}$$

Wenn man ferner diese beiden Gleichungen einmal addirt und dann subtrahirt, so erhält man:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \tag{4}$$

Diese vier Gleichungen, von welchen die beiden ersten in die eine

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

zusammengefasst werden können, sind wieder Fundamentalformeln für die gesammte Analysis. Durch sie wird, wie man sieht, ein Zusammenhang zwischen den Exponential- und trigonometrischen Funktionen hergestellt. Mit Hilfe der beiden ersten bringt man die Exponentielle e^x auf die Form $u + vi$, wenn x imaginär wird, während die Glgn. (3) und (4) den Sinus und Cosinus eines reellen Bogens x durch Exponen-

tialfunktionen ausdrücken. Dass diese Ausdrücke imaginär ausfallen, liegt in der Natur der Sache, da sin x und cos x als periodische Funktionen von x, deren mögliche Werthe zwischen den Grenzen + 1 und — 1 liegen, durch die Exponentielle $e^{\pm x}$ mit reellem Exponenten, welche bei wachsendem x fortwährend zu- oder abnimmt, unmöglich ausgedrückt werden kann. Obige Gleichungen sind eben nur sogenannte symbolische Gleichungen; setzt man in ihnen statt der Symbole: sin x, cos x, e^{xi}, e^{-xi} dasjenige, was diese Symbole eigentlich bedeuten, nämlich die entsprechenden unendlichen Reihen, so verschwindet das Imaginäre und die Gleichungen werden augenscheinlich identisch.

Bei der Wichtigkeit der Gl. (1) wird es nicht unpassend sein, dieselbe noch auf einem zweiten von der Anwendung der Reihen unabhängigen Wege abzuleiten.

Nach §. 66, Gl. (10) ist:

$$e^z = \lim (1 + \alpha z)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ [für } \alpha = 0], \qquad (l)$$

eine Gleichung, bei deren Ableitung z als reell vorausgesetzt wurde. Ertheilen wir dieser Grösse einen imaginären Werth, so ist auch in diesem Falle die Bedeutung der rechter Hand stehenden Potenz $(1 + \alpha z)^{\frac{1}{\alpha}}$ nach den Lehren des III. Capitels zweifellos bestimmt und es steht uns frei, den Grenzwerth derselben wieder mit e^z zu bezeichnen, so dass wir demnach die Gl. (l) als die analytische Definition der natürlichen Exponentialfunktion e^z betrachten, welchen reellen oder imaginären Werth auch z haben mag. Nur sind wir bei dieser Annahme vorläufig nicht berechtiget, mit dem in Form einer Potenz erscheinenden Symbol e^z im Falle eines imaginären Werthes von z nach denselben Regeln zu rechnen, welche die Arithmetik für Potenzen mit reellen Exponenten vorschreibt; es wird jedoch leicht nachzuweisen sein, dass diese Regeln auch für imaginäre Werthe der Exponenten in Kraft bleiben.

Sei demnach $z = y + xi$, so ist, der aufgestellten Definition zufolge:

$$e^{y+xi} = \lim (1 + \alpha y + \alpha x \,.\, i)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Um diesen Grenzwerth auszumitteln, sei:

$$1 + \alpha y + \alpha x \,.\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (m)$$

so wird:

$$e^{y+xi} = \lim r^{\frac{1}{\alpha}} \,.\, \lim \left(\cos\frac{\varphi}{\alpha} + i\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right). \qquad (n)$$

Aus (m) folgt aber:

$$1 + \alpha y = r\cos\varphi,\; \alpha x = r\sin\varphi, \qquad (p)$$

somit, wenn man quadrirt und addirt:

$$r = [1 + 2\alpha y + \alpha^2(x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2}};$$

setzt man nun noch Kürze halber $2\alpha y + \alpha^2(x^2 + y^2) = \beta$, wo also β eine mit α unendlich klein werdende Grösse ist, so wird:

$$\lim r^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \left\{[1 + 2\alpha y + \alpha^2(x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2\alpha}}\right\} = \lim \left\{[(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right\} =$$

$$= \lim \left\{[(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)}\right\} = \lim \left\{(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{\lim\left[y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right]};$$

es ist aber:

$$\lim (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} = e, \quad \lim \left[y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right] = y,$$

somit:

$$\lim r^{\frac{1}{\alpha}} = e^y. \qquad (q)$$

Aus den Glgn. (p) erhält man ferner durch Division:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha x}{1 + \alpha y},$$

woraus zuvörderst erhellt, dass φ ein mit α unendlich abnehmender Bogen ist. Multipliciren wir diese Gleichung mit der offenbar identischen:

$$\frac{\varphi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi,$$

so erhalten wir:

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{x}{1 + \alpha y},$$

folglich, wenn wir α und somit auch φ unendlich klein werden lassen, wegen $\lim \frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$, $\lim \cos\varphi = 1$, $\lim \frac{x}{1 + \alpha y} = x$:

$$\lim \frac{\varphi}{\alpha} = x;$$

hiemit wird nun $\lim \left(\cos\frac{\varphi}{\alpha} + i \sin\frac{\varphi}{\alpha}\right) = \cos x + i \sin x$, welcher Werth, sammt jenem von $\lim r^{\frac{1}{\alpha}}$ aus (q) in (n) substituirt,

$$e^{y + xi} = e^y(\cos x + i \sin x) \qquad (5)$$

gibt. Aus dieser allgemeineren Gleichung geht die Gl. (1) wieder hervor, wenn man $y = 0$ setzt.

Diese Ergebnisse lassen sich auch leicht auf die Exponentielle a^z übertragen, wo a eine beliebige, jedoch reelle und positive Zahl bedeutet. Denn da dem Begriffe der Logarithmen zufolge $a = e^{la}$ ist, so hat man $a^z = e^{zla}$; setzt man in dieser Gleichung $z = y + xi$, so wird nach (5):

$$a^{y+xi} = e^{yla + xla \cdot i} = e^{yla}[\cos(xla) + i \sin(xla)],$$

und folglich, da $e^{yla} = (e^{la})^y = a^y$ ist:

$$a^{y+xi} = a^y [\cos(xla) + i \sin(xla)]. \tag{6}$$

Mit Hilfe der Gl. (5) beweist man nun leicht, dass die in der Gleichung $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$ ausgesprochene für reelle Exponenten geltende Eigenschaft auch für imaginäre Exponenten giltig bleibt. Denn zufolge der Gl. (5) ist:

$$\begin{aligned} e^{y+xi} \cdot e^{y'+x'i} &= e^y (\cos x + i \sin x) \cdot e^{y'} (\cos x' + i \sin x') \\ &= e^{y+y'}[\cos(x + x') + i \sin(x + x')]. \end{aligned}$$

d. i. wenn man für den 2ten Theil die Gl. (5) nochmals von rückwärts in Anspruch nimmt:

$$e^{y+xi} \cdot e^{y'+x'i} = e^{y+y'+(x+x')i}.$$

81. Setzt man in (1) $x + 2r\pi$ an die Stelle von x, wo r eine positive oder negative g a n z e Zahl bedeuten soll, so erhält man:

$$\cos x + i \sin x = e^{(x+2r\pi)i}; \tag{7}$$

aus dieser Gleichung folgen, wenn man der Reihe nach statt x die Werthe 0, π und $\frac{1}{2}\pi$ setzt, die Relationen:

$$+1 = e^{2r\pi i}, \tag{8}$$

$$-1 = e^{(2r+1)\pi i}, \tag{9}$$

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}(4r+1)\pi i}; \tag{10}$$

die letzte dieser Gleichungen führt noch, wenn man beide Theile derselben zur Potenz mit dem Exponenten $\sqrt{-1} = i$ erhebt, auf den merkwürdigen Ausdruck:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}(4r+1)\pi};$$

die Grösse: i^i hat daher unendlich viele reelle Werthe, deren einfachster (für $r = 0$) $= e^{-\frac{1}{2}\pi}$ ist.

82. Sind u, v reelle Grössen, welche der Gleichung $e^u = v$ Genüge leisten, wo $e = 2,718\ldots$, so heisst bekanntlich u der natürliche Logarithmus von v. Diese Definition wird unverändert beibehalten, wenn u und somit auch v imaginäre Grössen sind, so dass also die Gleichung:

$$e^{y+xi} = p + qi$$

unmittelbar die folgende:

$$y + xi = l(p + qi)$$

nach sich zieht und umgekehrt. Hieraus folgt sogleich, dass die Gleichung $lz + lz' = l(z \,.\, z')$, so wie alle daraus folgenden Eigenschaften der Logarithmen giltig bleiben, wenn z und z' imaginär werden.

Nehmen wir von beiden Theilen der Gleichungen (8) und (9) des vorigen §. die natürlichen Logarithmen, so erhalten wir:

$$l(+1) = 2r\pi \sqrt{-1} \tag{11}$$

$$l(-1) = (2r + 1)\pi \sqrt{-1}, \tag{12}$$

wo r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Diese Gleichungen zeigen, dass dem Logarithmus der positiven Einheit unendlich viele Werthe zukommen, welche bis auf einen, $= 0$, welcher dem Werthe $r = 0$ entspricht, sämmtlich imaginär sind. Eben so hat der Logarithmus von -1 unendlich viele, jedoch bloss imaginäre Werthe.

Da ferner $+a = (+1) \,.\, a$, $-a = (-1) \,.\, a$ ist, wo das a im zweiten Theile dieser Gleichungen den Zahlenwerth der im ersten Theile derselben stehenden Grösse $\pm a$ vorstellt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} l(+a) &= l(a) + l(+1) \\ l(-a) &= l(a) + l(-1), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

woraus mit Rücksicht auf die Glgn. (11) und (12) hervorgeht, dass jeder positiven oder negativen Zahl a unendlich viele Logarithmen zugehören; unter diesen befindet sich ein reeller, wenn a positiv ist; ist a negativ, so sind sie sämmtlich imaginär.

Betrachten wir jetzt den Logarithmus einer complexen Zahl. Da

$$y \pm x\sqrt{-1} = (+1)(y \pm x\sqrt{-1})$$

und

$$-y \pm x\sqrt{-1} = (-1)(y \mp x\sqrt{-1}),$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned} l(y \pm x\sqrt{-1}) &= l(y \pm xi) + l(+1) \\ l(-y \pm x\sqrt{-1}) &= l(y \mp xi) + l(-1), \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

so dass es also nur darauf ankommt, $l(y \pm xi)$ zu finden, wo y eine reelle positive Zahl bedeutet.

Setzen wir nun:

$$y \pm xi = \varrho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi), \tag{n}$$

so wird:

$$l(y \pm xi) = l\varrho + l(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = l\varrho + le^{\pm\varphi i},$$

d. i.

$$l(y \pm xi) = l\varrho \pm \varphi i.$$

Aus (n) folgt aber $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$; somit hat man:

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2 + y^2} \pm i \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

Setzt man diesen Werth in (m), so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (11) und (12):

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2 + y^2} \pm i \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + 2r\pi i, \tag{14}$$

$$l(-y \pm xi) = l\sqrt{x^2 + y^2} \mp i \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + (2r + 1)\pi i. \tag{15}$$

Für $r = 0$ folgt aus (14):

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2 + y^2} \pm i \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}, \tag{16}$$

in welcher Form der Ausdruck des Logarithmus einer complexen Zahl gewöhnlich angewendet wird, jedoch nur für positive Werthe von y giltig ist.

83. Setzt man in den Glgn. (3) und (4) §. 80, $\alpha + \beta i$ an die Stelle von x, so erhält man:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\alpha i - \beta} + e^{-\alpha i + \beta}}{2},$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\alpha i - \beta} - e^{-\alpha i + \beta}}{2i};$$

zerlegt man die in den Zählern erscheinenden Exponentialgrössen in Faktoren, setzt also $e^{\alpha i - \beta} = e^{\alpha i} \cdot e^{-\beta}$, u. s. w. und führt für $e^{\alpha i}$, $e^{-\alpha i}$ die Werthe nach Gl. (1) und (2) ein, so erhält man:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha - i\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha, \tag{17}$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha + i\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha. \tag{18}$$

Hieraus folgt für $\alpha = 0$:

$$\cos\beta i = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \tag{19}$$

$$\sin\beta i = i\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}, \tag{20}$$

und wenn man diese Werthe in die Formeln (17) und (18) zurücksetzt:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \cos\alpha \cos\beta i - \sin\alpha \sin\beta i, \tag{21}$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \sin\alpha \cos\beta i + \cos\alpha \sin\beta i. \tag{22}$$

Mit Hilfe der Glgn. (17) und (18) bringt man die Funktionen sin x und cos x auf die Form $u + vi$, wenn x imaginär wird; die Glgn. (21) und (22) hingegen zeigen, dass die für reelle Werthe der Bögen a, b geltenden Fundamentalformeln der Goniometrie:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

und mit diesen alle anderen goniometrischen Formeln auch für imaginäre Werthe der Bögen in Kraft bleiben.

Aus den Glgn. (17) (18) übersieht man sogleich, dass auch die Funktionen arc cos x und arc sin x sich auf die Form $u + vi$ bringen lassen, wenn x imaginär wird. Denn setzt man in (17):

$$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha = u, \quad \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha = v, \tag{m}$$

so erhält man $\cos(\alpha + \beta i) = u - vi$, woraus

$$\text{arc} \cos(u - vi) = \alpha + \beta i$$

folgt, wo nun die reellen Grössen α und β mittelst der Glgn. (m) durch u und v ausgedrückt werden können. Dasselbe gilt für arc sin $(u + vi)$.

Fasst man die Resultate der vorstehenden Paragraphen zusammen, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass

1) die Funktionen: a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$, $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$ und somit auch die aus diesen zusammengesetzten sich immer auf die Form $u + vi$ bringen lassen, wenn die Variable x imaginär wird;

2) die wesentlichen Eigenschaften, welche diesen Funktionen für reelle Werthe der Veränderlichen zukommen, unverändert in Geltung bleiben, wenn diese imaginär werden.

Da wir in §. 51 in Bezug auf algebraische Funktionen zu demselben Resultate gelangt sind, so schliessen wir, dass überhaupt jede wie immer gestaltete Funktion imaginärer Veränderlichen auf die Form $u + vi$ gebracht werden kann.

84. Aus den bisher gewonnenen Formeln lassen sich noch andere Gleichungen entwickeln, welche in der Analysis häufige Anwendung iden. So ist klar, dass sich mittelst der Glgn. (3) und (4) jede igonometrische Funktion durch Exponentialgrössen ausdrücken lässt. an erhält z. B. durch Division derselben:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i\,\frac{1 - e^{2xi}}{1 + e^{2xi}}, \tag{23}$$

d hieraus, $x = yi$ setzend:

$$\operatorname{tg} yi = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = i\,\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}, \tag{24}$$

welcher Ausdruck auch aus den Glgn. (19) und (20) durch Division hervorgeht. Aus (23) folgt ferner:

$$e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}, \tag{25}$$

und hieraus, wenn man zu beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$x = \frac{i}{2}\, l\, \frac{1 - i \operatorname{tg} x}{1 + i \operatorname{tg} x}. \tag{26}$$

Diese Gleichung führt, wenn man den Logarithmus nach Gl. (6), §. 68, in eine Reihe entwickelt, wieder auf die Reihe (29), §. 77, zurück.

Setzt man in (26) $\operatorname{tg} x = z$, so wird $x + r\pi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$, wo r eine beliebige positive oder negative Zahl, die Nulle mit einbegriffen, bedeuten kann, und man erhält:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = r\pi + \frac{i}{2}\, l\, \frac{1 - iz}{1 + iz}, \tag{27}$$

und, wenn man hier $z = yi$ setzt:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} yi = r\pi + \frac{i}{2}\, l\, \frac{1 + y}{1 - y}. \tag{28}$$

Soll der Logarithmus in dieser Formel einen reellen Werth zulassen, so muss $\frac{1 + y}{1 - y}$ positiv, also $y^2 < 1$ sein. Man kann aber diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} yi = r\pi + \frac{i}{2}\, l\, \frac{y + 1}{(y - 1)(-1)}$$

$$= r\pi - \frac{i}{2}\, l(-1) + \frac{i}{2}\, l\, \frac{y + 1}{y - 1},$$

und es ist, mit Rücksicht auf Gl. (12):

$$r\pi - \tfrac{1}{2} il(-1) = r\pi + \tfrac{1}{2}(2r' + 1)\pi = (2r + 2r' + 1) \,.\, \tfrac{1}{2}\pi,$$

ein Ausdruck, in welchem r und r' beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, und dessen sämmtliche Werthe aus der Form $(2r + 1) \,.\, \frac{1}{2}\pi = r\pi + \frac{1}{2}\pi$ hervorgehen, unter r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden; man hat daher:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} yi = r\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \frac{i}{2}\, l\, \frac{y + 1}{y - 1}, \tag{29}$$

in welchem Ausdrucke der Logarithmus einen reellen Werth besitzt, wenn $y^2 > 1$. Setzt man, wie gewöhnlich, in (28) und (29) $r = 0$, so geben diese Ausdrücke den kleinsten Bogen, dessen Tangente yi ist

Diese und ähnliche Formeln dienen dazu, um von Funktionen der einen Gattung auf Funktionen einer anderen Gattung überzugehen. Es ereignet sich sehr häufig, dass ein Ausdruck unter gewissen Umständen eine imaginäre Form erhält, die jedoch nur scheinbar ist, und mit Hilfe obiger Relationen beseitiget werden kann. Es sei z. B.

$$z = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tg } x \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

So lange die Grössen a und b gleiche Zeichen haben, liefert dieser Ausdruck für jeden Werth von x einen reellen Werth von z; gibt man aber z. B. der einen dieser Grössen, etwa b, einen negativen Werth, während a positiv bleibt, so erhält der Ausdruck eine imaginäre Form:

$$z = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \text{arc tg} x \sqrt{-\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{ab}.\sqrt{-1}} \text{ arc tg } x \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{-1},$$

hat aber nichts destoweniger einen reellen Werth, welcher jedoch aus dieser Form nicht gefunden werden kann. Setzt man aber in Gl. (28) $y = x\sqrt{\frac{b}{a}}$, so findet man für $r = 0$:

$$\text{arc tg } x \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}},$$

welcher Werth in dem letzten Ausdrucke von z substituirt, das reelle Resultat:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{ab}} l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$$

liefert.

85. Eine nützliche Anwendung gestatten die Formeln (1) bis (4) bei der Summirung von Reihen, welche nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortlaufen, wenn die Coefficienten der Sinusse oder Cosinusse mit den Coefficienten bekannter Potenzreihen übereinstimmen, indem man die Sinusse oder Cosinusse mittelst der Gleichungen (3) und (4) durch Exponentiellen ausdrückt. Folgende Beispiele werden das Verfahren deutlich machen, und zugleich einige häufig vorkommende Reihenentwickelungen liefern.

1) Die Reihe:

$$y = 1 + z \cos\varphi + \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \cos 3\varphi + \ldots$$

zu summiren. Nun hat man nach (3):

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}),\ \cos 2\varphi = \frac{1}{2}(e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}),\ \text{u. s. w.};$$

setzt man diese Ausdrücke in die gegebene Reihe, so erhält man:

$$2y = \left[1 + ze^{\varphi i} + \frac{1}{1.2}(ze^{\varphi i})^2 + \frac{1}{1.2.3}(ze^{\varphi i})^3 + \dots\right]$$
$$+ \left[1 + ze^{-\varphi i} + \frac{1}{1.2}(ze^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{1.2.3}(ze^{-\varphi i})^3 + \dots\right];$$

beide Reihen gehen aus der Reihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

hervor, wenn man statt x beziehungsweise $ze^{\varphi i}$ und $ze^{-\varphi i}$ setzt; folglich ist:

$$2y = e^{z.e^{\varphi i}} + e^{z.e^{-\varphi i}} = e^{z(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + e^{z(\cos\varphi - i\sin\varphi)} =$$
$$= e^{z\cos\varphi}\left\{e^{z\sin\varphi.i} + e^{-z\sin\varphi.i}\right\} = 2e^{z\cos\varphi}.\cos(z\sin\varphi).$$

Man hat daher:

$$1 + z\cos\varphi + \frac{1}{1.2}z^2\cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3}z^3\cos 3\varphi + \dots =$$
$$= e^{z\cos\varphi}.\cos(z\sin\varphi). \tag{30}$$

Für $z = 1$ folgt hieraus:

$$1 + \cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{1.2} + \frac{\cos 3\varphi}{1.2.3} + \dots = e^{\cos\varphi}.\cos(\sin\varphi). \tag{31}$$

2) Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet man:

$$z\sin\varphi + \frac{z^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \dots = e^{z\cos\varphi}.\sin(z\sin\varphi), \tag{32}$$

und für $z = 1$:

$$\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{1.2} + \frac{\sin 3\varphi}{1.2.3} + \dots = e^{\cos\varphi}.\sin(\sin\varphi). \tag{33}$$

Die Gleichungen (30) bis (33) gelten für jeden Werth von φ und z von $-\infty$ bis $+\infty$. Denn die vorgelegten Reihen wurden dadurch summirt, dass wir in der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots,$$

welche für jeden Werth von x von $-\infty$ bis $+\infty$ convergirt,

$$ze^{\pm\varphi i} = z(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

an die Stelle von x treten liessen; aus den in §. 56 angeführten Gründen convergiren aber die dadurch entstehenden Reihen für jeden Werth des Modulus z, wobei es auf den Werth von φ nicht weiter ankommt, wodurch die obige Behauptung gerechtfertiget wird.

3) Um die Reihe:

$$y = z \sin\varphi + \frac{1}{2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} z^3 \sin 3\varphi + \ldots$$

zu summiren, bringt man sie zunächst durch Umsetzung der Sinusse in Exponentialgrössen auf die Form:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = \left[z e^{\varphi i} + \frac{1}{2}(z e^{\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(z e^{\varphi i})^3 + \ldots\right]$$
$$- \left[z e^{-\varphi i} + \frac{1}{2}(z e^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(z e^{-\varphi i})^3 + \ldots\right]$$

Nun ist [§. 67. Gl. 3]:

$$l(1 - x) = -\left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots\right), \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

somit:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = -\,l(1 - z e^{\varphi i}) + l(1 - z e^{-\varphi i}) =$$
$$= l\,\frac{1 - z e^{-\varphi i}}{1 - z e^{\varphi i}} = l\,\frac{1 - z\cos\varphi + iz\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi - iz\sin\varphi}$$
$$= l\,\frac{1 + i\,\dfrac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}}{1 - i\,\dfrac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}},$$

und wenn man auf den im 2ten Theile stehenden Logarithmus Gl. (27) in Anwendung bringt und $r = 0$ nimmt:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = 2\sqrt{-1}\,.\,\operatorname{arc\,tg} \frac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}.$$

Man hat also:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi} = z\sin\varphi + \frac{1}{2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} z^3 \sin 3\varphi + \ldots \qquad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \qquad (34)$$

wobei sich die angesetzten Grenzen auf ähnliche Weise wie oben rechtfertigen lassen.

Hiedurch ist, wie man sieht, die häufig vorkommende Aufgabe gelöst, eine Grösse y, welche durch eine Gleichung von der Form:

$$\operatorname{tg} y = \frac{z \sin \varphi}{1 - z \cos \varphi}$$

gegeben ist, in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den Sinussen der Vielfachen des Bogens φ fortschreitet.

4) Eben so findet man für die Reihe:

$$y = z \cos \varphi - \frac{1}{2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} z^3 \cos 3\varphi - \frac{1}{4} z^4 \cos 4\varphi + \dots$$

$$2y = \left[z e^{\varphi i} - \frac{1}{2} (z e^{\varphi i})^2 + \frac{1}{3} (z e^{\varphi i})^3 - \dots \right]$$

$$+ \left[z e^{-\varphi i} - \frac{1}{2} (z e^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{3} (z e^{-\varphi i})^3 - \dots \right],$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (2), §. 67:

$$2y = l(1 + z e^{\varphi i}) + l(1 + z e^{-\varphi i})$$

$$= l[1 + z(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}) + z^2] = l(1 + 2z \cos \varphi + z^2);$$

folglich:

$$\left. \begin{array}{l} l \sqrt{1 + 2z \cos \varphi + z^2} = z \cos \varphi - \frac{1}{2} z^2 \cos 2\varphi + \\ \quad + \frac{1}{3} z^3 \cos 3\varphi - \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ z = +1 \end{array} \quad (35)$$

5) Mit Hilfe der Entwickelung (34) lässt sich auch die häufig vorkommende Aufgabe auflösen, wenn eine Gleichung von der Form:

$$\operatorname{tg} y = n \operatorname{tg} \varphi$$

gegeben ist, y in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Sinussen der Vielfachen des Bogens φ fortschreitet. Denn es ist:

$$\operatorname{tg}(y - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} y . \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(n-1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + n \operatorname{tg} \varphi^2} = \frac{(n-1) \sin \varphi . \cos \varphi}{\cos \varphi^2 + n \sin \varphi^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n-1) \sin 2\varphi}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi)} = \frac{(n-1) \sin 2\varphi}{(n+1) - (n-1) \cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2\varphi};$$

wendet man nun auf die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(y - \varphi) = \frac{\frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2\varphi}$$

die Entwickelung (34) an, so erhält man:

$$y = \varphi + \frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4\varphi + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6\varphi + \ldots \quad \begin{vmatrix} n = 0 \\ n = \infty \end{vmatrix} \qquad (36)$$

SECHSTES KAPITEL.

THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

A. Gleichungen mit einer Unbekannten.

86. Es hat im Allgemeinen keine Schwierigkeit, den Werth anzugeben, welchen eine Funktion von x, $y = f(x)$ für einen bestimmten Zahlenwerth von x annimmt; es bedarf hiezu nur der Substitution des gegebenen Werthes von x in den Ausdruck $f(x)$, wobei es in vielen Fällen von Vortheil, oft auch nothwendig sein kann, denselben vorher in eine unendliche Reihe umzuformen.

Mit bei weitem grösseren Schwierigkeiten ist im Allgemeinen die umgekehrte Aufgabe verknüpft, nämlich:

Den Werth, oder, wenn deren mehrere existiren sollten, die Werthe von x zu finden, welche einer gegebenen Funktion von x, $f(x)$ den Werth Null ertheilen, oder mit anderen Worten, welche der Gleichung

$$f(x) = 0$$

Genüge leisten*).

Durch diese Gleichung ist, wenn sie nicht identisch für jeden Werth von x erfüllt ist, welche Voraussetzung jetzt ausgeschlossen [b]leibt, der Werth von x bestimmt; diesen Werth finden, heisst die

---

*) Anmerkung. Die Aufgabe, einen Werth von x zu finden, für welchen [di]e Funktion $f(x)$ einen beliebigen Werth $= a$ erhält, lässt sich immer auf [di]e oben ausgesprochene zurückführen, wenn man $f(x) - a = \varphi(x)$ setzt und [da]nn die Gleichung $\varphi(x) = 0$ behandelt.

Gleichung auflösen. Die Grösse x hat hiebei den Charakter einer Veränderlichen verloren und tritt als Unbekannte auf.

Die Gleichung $f(x) = 0$ wird eine algebraische oder transcendente genannt, je nachdem $f(x)$ eine algebraische oder transcendente Funktion von x ist. — Mit der Theorie der algebraischen Gleichungen, einem der wichtigsten Theile der Analysis, werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen; sie entwickelt eine Reihe der merkwürdigsten Eigenschaften dieser Gleichungen und gründet darauf verschiedene Auflösungsmethoden derselben. Eine Theorie der transcendenten Gleichungen in demselben Sinne besitzen wir nicht, was aus der Natur dieser Gattung von Funktionen und ihrer unendlich mannigfaltigen Form sich erklärt; wohl aber Methoden zur Auflösung derselben, auf deren einfachste wir am geeigneten Orte zu sprechen kommen.

I. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN

87. Eine jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten x kann, indem man die Brüche, in deren Nenner x vorkommt und die Wurzelgrössen, welche x unter dem Wurzelzeichen enthalten, wegschafft, auf die Form:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \qquad (1)$$

gebracht werden und heisst dann geordnet. Der Exponent m der höchsten Potenz von x ist eine positive ganze Zahl und bestimmt den Grad der Gleichung. Die von x unabhängigen Grössen $A_1, A_2, \ldots A_m$ heissen die Coefficienten der Gleichung und können im Allgemeinen reelle positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale oder auch complexe Zahlen und zum Theil auch $= 0$ sein.

Das in der Gl. (1) links vom Gleichheitszeichen stehende Polynom ist, wie man sieht, eine ganze rationale Funktion von x und wird das Gleichungspolynom genannt und in der Folge häufig der Kürze halber mit $f(x)$ oder X bezeichnet werden. Eine Gleichung vom m^{ten} Grade kann höchstens $m + 1$ Glieder haben und heisst dann eine vollständige; fehlen ein oder mehrere Glieder, d. h. sind die betreffenden Coefficienten $= 0$, so nennt man sie unvollständig.

Jeder Werth, welcher, für x in das Gleichungspolynom substituirt, dasselbe auf Null reducirt, also der Gl. (1) Genüge leistet, oder sie identisch macht, heisst eine Wurzel der Gleichung.

So ist 5 eine Wurzel der Gleichung $x - 5 = 0$ und zugleich die einzige Wurzel dieser Gleichung vom 1[ten] Grade. Die Gleichung vom 2[ten] Grade:

$$x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$

hat, wie aus den Elementen bekannt ist, zwei Wurzeln, welche durch die Formel:

$$x = -\frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

gegeben sind. Wir schliessen hieraus, dass eine Gleichung von höherem Grade überhaupt mehrere Wurzeln haben kann. Sie können reell sein, wie in obiger Gleichung $x - 5 = 0$, oder imaginär, wie z. B. die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 2x + 4 = 0$, für welche man $x = 1 \pm \sqrt{-3}$ findet.

Die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung bestimmen, heisst die Gleichung **auflösen**. Die Auflösung der algebraischen Gleichungen eines beliebigen Grades ist das eigentliche Problem dieses Kapitels. Bevor wir jedoch zur Darstellung der zu diesem Zwecke erfundenen Methoden schreiten, müssen wir einige der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften dieser Gleichungen kennen lernen und vor allem die Frage beantworten, ob überhaupt jede Gleichung mit einer Unbekannten eine — wenn auch imaginäre Wurzel — haben müsse.

Anmerkung. Setzt man das Gleichungspolynom $f(x) = y$, und betrachtet x und y als veränderliche Grössen, so kann man nach §. 14 die Funktion $y = f(x)$ construiren, indem man die Werthe von x als Abscissen, jene von $y = f(x)$ als Ordinaten behandelt. So oft die entstehende Curve die Abscissenaxe schneidet, eben so viele reelle Wurzeln hat die Gleichung $f(x) = 0$, und es sind die reellen Wurzeln durch die Abscissen der Durchschnittspunkte gegeben, da für jeden solchen Punkt die Ordinate $x = f(y) = 0$ ist. — Fig. (1) [Seite 11] ist die geometrische Darstellung der Funktion:

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3;$$

die Curve schneidet die Abscissenaxe in den drei Punkten a, b, c; die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 2x^2 - 5x - 3 = 0$ sind demnach:

$$x_1 = Aa = +1,8;\ x_2 = Ab = -0,5;\ x_3 = Ac = -3,2,$$

› die Zahlen genäherte Werthe sind, welche sich ergeben, wenn man die recken Aa, Ab, Ac mittelst der angenommenen Längeneinheit $A1$ misst. — ıe Curve, auf welche die Construktion der Gleichung:

$$y = x^2 - 2x + 4 = 0$$

hrt, schneidet die Abscissenachse nicht, daher auch dieser Gleichung keine ellen Wurzeln zukommen.

88. Jede Gleichung vom m^{ten} Grade:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \quad (1)$$

deren Coefficienten beliebige reelle oder imaginäre Grössen sind, hat wenigstens eine Wurzel von der Form $x = p + q\sqrt{-1}$, wo p und q bestimmte reelle Grössen sind, und q auch $= 0$ sein kann.

Beweis. Substituiren wir in dem Gleichungspolynom an die Stelle von x die Grösse $p + q\sqrt{-1}$, wo p und q noch unbestimmte reelle Grössen bezeichnen, so erhalten wir:

$$f(p + q\sqrt{-1}) = (p + q\sqrt{-1})^m + A_1(p + q\sqrt{-1})^{m-1} + \ldots + A_m. \quad (2)$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze, wodurch man eine Anzahl theils reeller, theils imaginärer Glieder erhält, und bezeichnet die Summe aller reellen Glieder mit M, jene der imaginären, unter Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1}$ mit $N\sqrt{-1}$, so nimmt Gl. (2) die Form an:

$$f(p + q\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1}, \quad (3)$$

wo M und N offenbar reelle Funktionen von p und q sind. Sei R der Modulus der imaginären Grösse $M + N\sqrt{-1}$, so ist [§. 48]:

$$R = \sqrt{M^2 + N^2},$$

und demnach R ebenfalls eine Funktion von p und q.

Denken wir uns nun den Grössen p und q alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beigelegt und diese Werthe auf alle möglichen Weisen zu zweien combinirt, so wird offenbar auch der Modulus R unendlich viele verschiedene Werthe erhalten, unter welchen — da derselbe immer positiv genommen wird — nothwendig einer der kleinste sein muss. Bezeichnen wir mit p_0 und q_0 jene besonderen Werthe von p und q, welche diesen kleinsten Modulus erzeugen, diesen selbst mit R_0, und setzen wir:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1}) = M_0 + N_0\sqrt{-1}, \quad (4)$$

also:

$$R_0 = \sqrt{M_0^2 + N_0^2}, \quad (5)$$

wo demnach $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ das Resultat der Substitution der Grösse $p_0 + q_0\sqrt{-1}$ in das Gleichungspolynom bezeichnet.

Wir behaupten nun, dass dieser nothwendig existirende kleinste Modulus $R_0 = 0$ sein muss.

Um dieses zu beweisen, werden wir zeigen, dass die Voraussetzung der kleinste Modulus R_0 sei von der Nulle verschieden, auf einen Widerspruch führe, indem man nämlich in diesem Falle für x imme

einen Werth $p_0 + q_0\sqrt{-1} + z$ substituiren und das z so wählen könnte, dass das Substitutionsresultat einen kleineren Modulus als R_0 bekäme.

In der That, nehmen wir an, der kleinste Modulus R_0 sei nicht $= 0$, so wird auch die Grösse $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ einen von 0 verschiedenen Werth haben; setzen wir also $x = p_0 + q_0\sqrt{-1} + z$, wo z im Allgemeinen von der Form $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ ist, so erhalten wir:

$$f(p_0+q_0\sqrt{-1}+z)=(p_0+q_0\sqrt{-1}+z)^m+A_1(p_0+q_0\sqrt{-1}+z)^{m-1} + \ldots + A_m,$$

und wenn wir die Potenzen entwickeln und nach den steigenden Potenzen von z ordnen:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = T_0 + T_1 z + T_2 z^2 + \ldots + T_{m-1} z^{m-1} + z^m. \quad (6)$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = 0$, so kommt:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1}) = T_0,$$

und somit wegen Gl. (4):

$$T_0 = M_0 + N_0\sqrt{-1};$$

die übrigen Coefficienten $T_1, T_2, \ldots T_{m-1}$ sind ebenfalls Funktionen von p_0, q_0 und der Coefficienten der Gl. (1), und von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, auf deren Werthe es weiter nicht ankommt; sie mögen mit $M_1 + N_1\sqrt{-1}$, $M_2 + N_2\sqrt{-1}$ u. s. w. bezeichnet werden, so dass also die Gl. (6) folgende Form erhält:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = M_0 + N_0\sqrt{-1} + (M_1 + N_1\sqrt{-1})z + \\ + (M_2 + N_2\sqrt{-1})z^2 + \ldots + z^m, \quad (7)$$

oder, wenn man im zweiten Theile $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ als Faktor heraushebt:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = (M_0 + N_0\sqrt{-1})\left\{1 + \frac{M_1 + N_1\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z + \right. \\ \left. + \frac{M_2 + N_2\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z^2 + \ldots + \frac{z^m}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\right\}. \quad (8)$$

Bezeichnen wir nun mit R' den Modulus des zweiten Theiles dieser Gleichung, mit ϱ den Modulus des Faktors:

$$1 + \frac{M_1 + N_1\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z + \frac{M_2 + N_2\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z^2 + \ldots + \frac{z^m}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\Bigg\}, \quad (9)$$

ist, da R_0 der Modulus des anderen Faktors $M_0 + N_0\sqrt{-1}$, [nach . 50]:

$$R' = R_0 \cdot \varrho. \quad (10)$$

Ueber die Grösse z können wir nach Belieben verfügen; bestimmen wir sie also aus der Gleichung:

$$\frac{M_1 + N_1 \sqrt{-1}}{M_0 + N_0 \sqrt{-1}} z = -\varepsilon, \text{ so dass } z = -\varepsilon \frac{M_0 + N_0 \sqrt{-1}}{M_1 + N_1 \sqrt{-1}}$$

wird, wo ε eine kleine reelle positive Grösse sein soll, und substituiren wir diesen Werth von z in dem Ausdrucke (9), dessen Modulus ϱ ist, so erhält derselbe die Form:

$$1 - \varepsilon + \varepsilon^2 k + \varepsilon^3 k_1 + \varepsilon^4 k_2 + \ldots + \varepsilon^m k_{m-2},$$

wo $k, k_1, k_2, \ldots k_{m-2}$ Coefficienten von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ sind, auf deren Werthe es weiter nicht ankommt.

Bezeichnen wir ferner mit $r, r_1, r_2, \ldots r_{m-2}$ die Moduli dieser Coefficienten, so sind [§. 48]:

$$1 - \varepsilon, \ \varepsilon^2 r, \ \varepsilon^3 r_1, \ \varepsilon^4 r_2, \ \ldots \varepsilon^m r_{m-2}$$

die Moduli der Grössen:

$$1 - \varepsilon, \ \varepsilon^2 k, \ \varepsilon^3 k_1, \ \varepsilon^4 k_2, \ \ldots \varepsilon^m k_{m-2},$$

und man hat, da [§. 50] der Modulus der Summe mehrerer Grössen kleiner als die Summe der Moduli derselben ist,

$$\varrho < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 r + \varepsilon^3 r_1 + \varepsilon^4 r_2 + \ldots + \varepsilon^m r_{m-2},$$

oder:

$$\varrho < 1 - (\varepsilon - \varepsilon^2 r - \varepsilon^3 r_1 - \varepsilon^4 r_2 - \ldots - \varepsilon^m r_{m-2}). \qquad (11)$$

Nun kann man aber [§. 16, k] ε immer so klein wählen, dass:

$$\varepsilon > \varepsilon^2 r + \varepsilon^3 r_1 + \varepsilon^4 r_2 + \ldots + \varepsilon^m r_{m-2};$$

dann ist aber

$$\varepsilon - \varepsilon^2 r - \varepsilon^3 r_1 - \varepsilon^4 r_2 - \ldots - \varepsilon^m r_{m-2}$$

eine positive Grösse, folglich wegen (11):

$$\varrho < 1.$$

Ist aber $\varrho < 1$, so ist in Folge der Gl (10) auch $R' < R_0$.

Es ist aber R' der Modulus des Substitutionsresultates von:

$$x = p_0 + q_0 \sqrt{-1} + z,$$

und nach dem eben bewiesenen kann, wenn R_0 nicht $= 0$ ist, z immer, so gewählt werden, dass $R' < R_0$ wird; dann wäre aber R_0 nicht der kleinste Modulus. Die Voraussetzung, dass der kleinste Modulus R_0 von 0 verschieden sei, führt demnach auf einen Widerspruch; derselbe muss also $= 0$ sein.

Ist aber $R_0 = 0$, so ist auch $R_0{}^2 = M_0{}^2 + N_0{}^2 = 0$, somit, weil die Summe zweier wesentlich positiver Grössen nur dann $= 0$ sein kann

wenn jede für sich der Nulle gleich ist, auch $M_0 = 0$ und $N_0 = 0$, und folglich auch:

$$M_0 + N_0\sqrt{-1} = 0;$$

es ist aber $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ das Resultat der Substitution von:

$$x = p_0 + q_0\sqrt{-1}$$

in die Gl. (1), somit $p_0 + q_0\sqrt{-1}$ eine Wurzel dieser Gleichung.

Es könnte der Fall eintreten, dass $M_1 + N_1\sqrt{-1}$ und auf gleiche Weise mehrere Coefficienten der folgenden Potenzen von z in (8) verschwinden. Bedenkt man nun, dass die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von z in (8) nicht $= 0$ sein können, weil in diesem Falle

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z)$$

der constanten Grösse $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ gleich würde, also wegen der Unbestimmtheit von z das Gleichungspolynom $f(x)$ für jeden Werth von x denselben Werth erhielte, was ungereimt ist, so sei:

$$\frac{M_n + N_n\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\, z^n$$

das erste nicht verschwindende unter den Gliedern des Faktors (9) und man setze:

$$\frac{M_n + N_n\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\, z^n = -\varepsilon^n, \text{ also } z = \varepsilon \sqrt[n]{-\frac{M_0 + N_0\sqrt{-1}}{M_n + N_n\sqrt{-1}}},$$

wo ε abermals eine kleine reelle positive Grösse bedeutet. Substituirt man nun diesen Werth von z in den Faktor (9), so erhält derselbe die Form:

$$1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}k_{n+1} + \varepsilon^{n+2}k_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m k_m.$$

Bezeichnen wir den Modulus dieser Summe, wie oben, mit ϱ, mit $r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots r_m$ aber die Moduli der Coefficienten $k_{n+1}, k_{n+2}, \ldots k_m$ so ist:

$$\varrho < 1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}r_{n+1} + \varepsilon^{n+2}r_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m r_m,$$

wo man nun wieder ε so klein wählen kann, dass das erste Glied ε^n das Zeichen der Reihe bestimmt, und somit $\varrho < 1$ wird. Man kann demnach uch in diesem Falle z so wählen, dass $R' < R_0$ wird, wonach die veiteren oben gezogenen Schlüsse in Kraft bleiben.

89. Ist α eine Wurzel der Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

o ist das Gleichungspolynom durch $x - \alpha$ theilbar.

Denn wenn man das Polynom nach den gewöhnlichen Divisionsregeln dividirt, so erhält man bekanntlich zum Quotienten ein ähnliches Polynom vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade:

$$f_1(x) = x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1},$$

und wenn ein Rest R bleibt, so kann dieser x nicht enthalten, da der Divisor $x - \alpha$ vom 1sten Grade ist. Es besteht also die identische Gleichung:

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x) + R;$$

setzt man darin $x = \alpha$, so kommt:

$$f(\alpha) = R, \tag{1}$$

und da α eine Wurzel der Gleichung, so ist $f(\alpha) = R = 0$, somit der Rest $= 0$ und $f(x)$ durch $x - \alpha$ theilbar. Der Faktor $(x - \alpha)$ wird Wurzelfaktor genannt.

Die Gl. (1) lehrt zugleich die Beschaffenheit des Restes für den Fall kennen, wenn α keine Wurzel der Gleichung ist; der Rest ist dann jener Werth, welchen das Gleichungspolynom für $x = \alpha$ annimmt.

Da man bei der Auflösung der Gleichungen häufig in die Lage kommt, das Gleichungspolynom durch ein Binom von der Form $x - \alpha$ theilen zu müssen, so wollen wir noch eine von Horner herrührende Methode entwickeln, welche den Quotienten und Rest mit Leichtigkeit darbietet.

Sei zu diesem Zwecke das gegebene Gleichungspolynom:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

wo wir der grösseren Allgemeinheit wegen auch dem ersten Gliede einen Coefficienten beilegen.

Dividirt man dieses Polynom durch $x - \alpha$, so erhält man zum Quotienten:

$$B_0 x^{m-1} + B_1{}^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1}$$

und zum Reste B_m, wo die Grössen B_0, B_1, B_2, ... B_m folgende Werthe haben, wie man durch wirkliche Division leicht findet:

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0 \\
B_1 &= A_0 \alpha + A_1 \\
B_2 &= A_0 \alpha^2 + A_1 \alpha + A_2 \\
B_3 &= A_0 \alpha^3 + A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{m-1} &= A_0 \alpha^{m-1} + A_1 \alpha^{m-2} + A_2 \alpha^{m-3} + \ldots + A_{m-2} \alpha + A_{m-1} \\
B_m &= A_0 \alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha + A_m:
\end{aligned}$$

der Rest B_m ist, wie man sieht, das Resultat der Substitution $x = \alpha$ im gegebenen Polynome (2), übereinstimmend mit dem oben Gesagten. Das Gesetz, nach welchem die Grössen B gebildet sind, fällt leicht in die Augen, wird aber noch ersichtlicher, wenn man sie in rekurrirender Form darstellt. Substituirt man nämlich den Werth jedes dieser Coefficienten in den Ausdruck des nächstfolgenden, so erhält man:

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0 \\
B_1 &= B_0\alpha + A_1 \\
B_2 &= B_1\alpha + A_2 \\
B_3 &= B_2\alpha + A_3 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
B_{m-1} &= B_{m-2}\,\alpha + A_{m-1} \\
B_m &= B_{m-1}\,\alpha + A_m .
\end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass der erste Coefficient des Quotienten gleich ist dem ersten des Dividendes; jeder folgende, z. B. der r^{te} Coefficient des Quotienten wird aber erhalten, wenn man den vorhergehenden mit α multiplicirt und zu dem Produkte den r^{ten} Coefficienten des Dividendes addirt. Man kann die Zahl α den Operationsfaktor nennen. Bei der Bildung der Coefficienten $B_0, \ldots B_m$ verfährt man am bequemsten nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rl}
 & A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_m \\
\alpha] & B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots\ B_m;
\end{array}$$

man schreibt nämlich die Coefficienten des gegebenen Polynoms der Reihe nach in eine Zeile; unter A_0 kommt $B_0 = A_0$ zu stehen und jede folgende Zahl in der zweiten Zeile wird erhalten, wenn man die vorhergehende mit α multiplicirt und zu dem Produkte die darüberstehende der ersten Zeile addirt.

Beisp. 1. Sei das Polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11$ durch $x - 3$ zu dividiren, so ist $+3$ der Operationsfaktor und man hat nach obigem Schema:

$$\begin{array}{rl}
 & 1,\ -2,\ +5,\ +7,\ -11 \\
3] & 1,\ +1,\ +8,\ +31,\ (+82);
\end{array}$$

[de]r Quotient ist daher: $x^3 + x^2 + 8x + 31$, und die in Klammern [ei]ngeschlossene Zahl $+82$ ist der Rest $= f(3)$. Hieraus erkennt man [zu]gleich, dass $x = 3$ keine Wurzel der Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11 = 0$$

[is]t, da das Gleichungspolynom durch $x - 3$ nicht theilbar ist, sondern [8]2 zum Reste gibt.

Beisp. 2. Man bestimme Quotienten und Rest der Division des Polynoms: $f(x) = 2x^6 - 2x^4 + 12x^3 - 21x - 226530$ durch das Binom $x + 7$. Der Operationsfaktor ist hier -7, und man hat:

$$\begin{array}{l} \ 2, \quad 0, \quad -2, \quad +12, \quad 0, \quad -21, \quad -226530 \\ -7]\ 2, \ -14, \ +96, \ -660, \ +4620, \ -32361, \ (-3); \end{array}$$

der Quotient ist also:

$$2x^5 - 14x^4 + 96x^3 - 660x^2 + 4620x - 32361,$$

der Rest $= -3$; zugleich ist -3 das Resultat der Substitution von $x = -7$ in das Polynom $f(x)$.

90. Jede Gleichung vom m^{ten} Grade hat m Wurzeln und weder mehr noch weniger.

Denn es sei α_1 die nach §. 88 der Gleichung:

$$X_m = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \quad (1)$$

nothwendig zukommende Wurzel, so ist das Gleichungspolynom X_m durch $x - \alpha_1$ theilbar und man hat, wenn X_{m-1} den Quotienten vorstellt:

$$X_m = (x - \alpha_1)\, X_{m-1} = 0, \quad (2)$$

wo, wie aus dem vorigen §. bekannt, X_{m-1} ein dem obigen ganz ähnliches Polynom vom $(m-1)^{ten}$ Grade ist. Hieraus erhellt, dass das Gleichungspolynom X_m nicht bloss für $x = \alpha_1$ verschwindet, sondern auch für einen solchen Werth von x, welcher die Gleichung $X_{m-1} = 0$ erfüllt. Ein solcher Werth existirt nothwendig, da das Polynom X_{m-1} von derselben Form ist, wie X_m; er sei α_2, so ist wieder X_{m-1} durch $x - \alpha_2$ theilbar, und somit, wenn wir den Quotienten vom Grade $(m-2)$ durch X_{m-2} bezeichnen:

$$X_{m-1} = (x - \alpha_2)\, X_{m-2}. \quad (3)$$

Diese Gleichung zeigt wieder, dass das Polynom X_{m-1} nicht bloss für $x = \alpha_2$ Null wird, sondern auch dann, wenn wir $X_{m-2} = 0$ setzen; sei also α_3 die Wurzel dieser Gleichung, so ist X_{m-2} durch $x - \alpha_3$ theilbar und somit:

$$X_{m-2} = (x - \alpha_3)\, X_{m-3}, \quad (4)$$

wo X_{m-3} den Quotienten bezeichnet, der nothwendig vom Grade $m-3$ sein wird. Auf dieselbe Weise wird:

$$X_{m-3} = (x - \alpha_4)\, X_{m-4}, \quad (5)$$

u. s. w.,

und man muss endlich nothwendig auf einen Quotienten X_1 kommen, welcher in Bezug auf x vom ersten Grade ist, als die Form $x + k$ hat, so dass:

$$X_2 = (x - \alpha_{m-1}) X_1, \tag{6}$$

$$X_1 = x + k = x - \alpha_m \tag{7}$$

wird, wenn man der Gleichförmigkeit wegen $k = -\alpha_m$ setzt. Somit ist, wenn man successive substituirt:

$$\begin{aligned} X_m &= (x - \alpha_1) X_{m-1} = 0, \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) X_{m-2} = 0, \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) X_{m-3} = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{m-1}) X_1 = 0, \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) lässt sich daher auch in folgender Form darstellen:

$$X_m = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m) = 0. \tag{8}$$

Da nun dieses Produkt für jeden der m Werthe von x:

$$x = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots \alpha_m$$

verschwindet, so muss dasselbe auch von dem Polynome X_m der Gl. (1) gelten, mit welchem es identisch ist; woraus hervorgeht, dass die Gl. (1) m Wurzeln hat. Ausser diesen m Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ kann aber der Gleichung keine andere Wurzel zukommen; denn wäre β noch eine von den obigen verschiedene Wurzel, so würde man $X_m = (x - \beta) X'$ setzen können und demnach wäre mit Rücksicht auf (8):

$$(x - \beta) X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m),$$

somit, wenn man in dieser Gleichung $x = \beta$ setzt:

$$0 = (\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta - \alpha_3) \ldots (\beta - \alpha_{m-1})(\beta - \alpha_m),$$

was ungereimt ist, da ein Produkt, von dessen Faktoren keiner $= 0$ ist, nicht 0 werden kann.

Unter den m Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der Gl. (1) können mehrere einander gleich sein; wiewohl dann die Gleichung weniger als m verschiedene Wurzeln besitzt, so spricht man doch auch in diesem Falle, im Einklange mit Gl. (8), der Gleichung m Wurzeln zu, unter denen sich jedoch mehr oder weniger gleiche oder wiederholte Wurzeln befinden.

Beachtet man, dass X_m eine ganze algebraische rationale Funktion von x vom m^{ten} Grade ist, so ergibt sich noch aus (8) der folgende höchst wichtige Lehrsatz:

Jede algebraische ganze rationale Funktion des m^{ten} Grades kann in m einfache Faktoren vom ersten Grade zerlegt werden.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Gleichung $X_{m-1}=0$, welche entsteht, wenn man den aus der Division von X_m durch $x-\alpha_1$ entstehenden Quotienten $=0$ setzt, alle übrigen Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der Gl. $X_m=0$ zu Wurzeln hat.

Zugleich sieht man, dass es sehr leicht ist, eine Gleichung zu bilden, welche gegebene Zahlen zu Wurzeln hat. Die Gleichung z. B., welcher die Wurzeln $+1$, $+2$ und -3 zukommen, ist:

$$(x-1)(x-2)(x+3)=x^3-7x+6=0.$$

91. Das Polynom der Gleichung:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0 \qquad (1)$$

ist eine stetige Funktion von x.

Denn setzt man in (1) $x+\delta$ statt x, so kommt:

$$f(x+\delta)=A_0(x+\delta)^m+A_1(x+\delta)^{m-1}+\ldots+$$
$$+A_{m-1}(x+\delta)+A_m;$$

entwickelt man die Potenzen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und ordnet nach den steigenden Potenzen von δ, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$f(x+\delta)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}.\delta+\frac{f''(x)}{2!}.\delta^2+\frac{f'''(x)}{3!}.\delta^3+\ldots+\frac{f^{(m)}(x)}{m!}.\delta^m, \quad (2)$$

wo der Kürze wegen:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$
$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots+1.A_{m-1},$$
$$f''(x)=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m-1)(m-2)A_1x^{m-3}+\ldots+2.1.A_{m-2},$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)A_0x^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)A_1x^{m-4}+$$
$$+\ldots+3.2.1.A_{m-3},$$

u. s. w.

$$f^{(m-1)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots4.3.2.A_0x+$$
$$+(m-1)(m-2)\ldots4.3.2.1.A_1,$$
$$f^{(m)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots4.3.2.1.A_0,$$

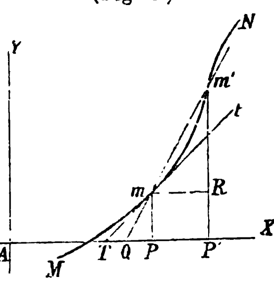
gesetzt ist. Aus (2) folgt nun:

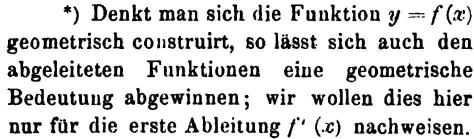
$$f(x+\delta)-f(x)=\delta\left\{\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{2!}.\delta+\frac{f'''(x)}{3!}.\delta^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(x)}{m!}.\delta^{m-1}\right\},$$

woraus man ersieht, dass die Aenderung, welche die Funktion $f($ erleidet, wenn sich x um δ ändert, beim unendlichen Abnehmen von ebenfalls unendlich klein wird, und zwar für jeden Werth von x, keine der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(m)}(x)$ für irgend einen endliche Werth von x unendlich wird. Die Funktion $f(x)$ ist somit stetig vo $x=-\infty$ bis $x=+\infty$.

Das Gesetz, nach welchem die Funktionen $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(m)}(x)$ gebildet sind, ist leicht zu übersehen. $f'(x)$ wird aus dem Polynom $f(x)$ gebildet oder **abgeleitet** (**derivirt**), indem man jedes Glied mit dem Exponenten von x multipliciert und den Exponenten sodann um eine Einheit vermindert. Auf dieselbe Art entsteht $f''(x)$ aus $f'(x)$, $f'''(x)$ aus $f''(x)$, u. s. w. Diese Funktionen heissen aus diesem Grunde auch **Ableitungen**, **abgeleitete** oder **derivirte** Funktionen der Funktion $f(x)$, und zwar $f'(x)$ die 1te, $f''(x)$ die 2te, u. s. w.*)

(Fig. 3.)





*) Denkt man sich die Funktion $y = f(x)$ geometrisch construirt, so lässt sich auch den abgeleiteten Funktionen eine geometrische Bedeutung abgewinnen; wir wollen dies hier nur für die erste Ableitung $f'(x)$ nachweisen.

Sei in Fig. 3 MN ein Theil der Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

ist, und $AP = x$ irgend ein Werth von x; $PP' = \delta$; so ist:

$$Pm = f(x),\quad P'm' = f(x+\delta) = f(x) + \delta\frac{f'(x)}{1!} + \delta^2\frac{f''(x)}{2!} + \ldots + \delta^m\frac{f^{(m)}(x)}{m!},$$

somit, wenn wir mR parallel zu AX ziehen:

$$Rm' = P'm' - Pm = f(x+\delta) - f(x) = \delta f'(x) + \delta^2\frac{f''(x)}{2!} + \ldots + \delta^m\frac{f^{(m)}(x)}{m!},$$

woraus durch Division mit $Rm = \delta$:

$$\frac{Rm'}{Rm} = f'(x) + \delta\frac{f''(x)}{2!} + \ldots + \delta^{m-1}\frac{f^{(m)}(x)}{m!} \qquad (\alpha)$$

folgt. Ziehen wir die Sekante mm', welche mit der Axe AX den Winkel $mQX = \sigma$ einschliesst, so ist:

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg} m'mR = \frac{Rm'}{Rm},$$

somit:

$$\operatorname{tg}\sigma = f'(x) + \delta\left\{\frac{f''(x)}{2!} + \delta\frac{f'''(x)}{3!} + \ldots + \delta^{m-2}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right\}. \qquad (\beta)$$

Lässt man nun δ unendlich klein werden, so fällt endlich der Punkt m' mit m zusammen, die Sekante Qmm' geht in die Tangente Tmt am Punkte m der Curve über, und wenn man den Winkel, welchen diese mit der Axe AX einschliesst, mit τ bezeichnet, so erhält man aus (β), zur Grenze übergehend, wegen $\lim \operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}\tau$:

$$\operatorname{tg}\tau = f'(x);$$

d. h. **die erste abgeleitete Funktion $f'(x)$ ist der Ausdruck der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die an dem der Abscisse x entsprechenden Punkte der Curve $y = f(x)$ gezogene geometrische Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst.**

Ist z. B. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 21x^2 + 12x - 32$, so findet man für die abgeleiteten Funktionen der Reihe nach:

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 42x + 12,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 42x + 42,$$
$$f'''(x) = 24x - 42,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 24.$$

92. Die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

sind symmetrische Funktionen der Wurzeln, und zwar ist A_1 die Summe aller Wurzeln, mit entgegengesetztem Zeichen genommen; A_2 die Summe aller Combinationen zu zweien, mit ungeändertem Zeichen; A_3 die Summe aller Combinationen zu dreien, mit entgegengesetztem Zeichen u. s. f., endlich A_m (das letzte von x freie Glied) die Summe aller Combinationen der Wurzeln zur m^{ten} Classe, also das Produkt derselben und zwar mit ungeändertem oder entgegengesetztem Zeichen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Produkt aller mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Wurzeln.

Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, zuerst die Gleichung vom zweiten Grade: $x^2 + A_1 x + A_2 = 0$, deren Wurzeln wir mit α_1, α_2 bezeichnen, so ist [nach §. 90] identisch:

$$x^2 + A_1 x + A_2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

somit, da die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x einander gleich sein müssen, $A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $A_2 = +\alpha_1\alpha_2$, übereinstimmend mit dem ausgesprochenen Satze.

Eben so finden wir für die Gleichung des 3ten Grades:

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

deren Wurzeln α_1, α_2, α_3 sein mögen:

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) =$$
$$x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\, x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

folglich:

$$A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\ A_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,\ A_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass der Satz für eine Gleichung des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades wahr sein müsse, wenn er für eine Gleichung des m^{ten} Grades gilt. In der That, nehmen wir das letztere an, und bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$, so lautet die Gleichung:

$$x^m - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)\, x^{m-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{m-1}\alpha_m)\, x^{m-2} - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots\ldots)\, x^{m-3} + \ldots\ldots + (-1)^m \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_m = 0,$$

oder, wenn wir Kürze halber mit $\underset{1,m}{C^r}$ die Summe aller Combinationen zur r^{ten} Classe der m Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ bezeichnen:

$$x^m - \underset{1,m}{C^1}.x^{m-1} + \underset{1,m}{C^2}.x^{m-2} - \underset{1,m}{C^3}.x^{m-3} + \ldots + (-1)^{m-1} \underset{1,m}{C^{m-1}}.x + (-1)^m \underset{1,m}{C^m} = 0, \tag{2}$$

wo die Faktoren $(-1)^{m-1}$, $(-1)^m$ nur zur Bestimmung des Zeichens des Gliedes dienen. Multipliciren wir diese Gleichung mit $x - \alpha_{m+1}$, wodurch dieselbe noch die Wurzel α_{m+1} erhält und in eine Gleichung des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades übergeht, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} - \underset{1,m}{C^1}.x^m + \underset{1,m}{C^2}.x^{m-1} - \underset{1,m}{C^3}.x^{m-2} + \ldots + (-1)^m \underset{1,m}{C^m}.x \\ - \alpha_{m+1} x^m + \alpha_{m+1}.\underset{1,m}{C^1}.x^{m-1} - \alpha_{m+1}.\underset{1,m}{C^2}.x^{m-2} + \ldots - \\ - (-1)^{m-1} \alpha_{m-1}.\underset{1,m}{C^{m-1}} x - (-1)^m \alpha_{m+1}.\underset{1,m}{C^m} \end{array}\right\} = 0$$

d. i. wenn wir die mit gleichen Potenzen von x behafteten Glieder vereinigen und beachten, dass nach den ersten Sätzen der Combinationslehre:

$$\underset{1,m}{C^1} + \alpha_{m+1} = \underset{1,m+1}{C^1}, \quad \underset{1,m}{C^2} + \alpha_{m+1}.\underset{1,m}{C^1} = \underset{1,m+1}{C^2}, \quad \underset{1,m}{C^3} + \alpha_{m+1}.\underset{1,m}{C^2} = \underset{1,m+1}{C^3},$$

u. s. w.

ist, und das wir statt $-(-1)^{m-1}$ auch $+(-1)^m$, so wie $+(-1)^{m+1}$ statt $-(-1)^m$ schreiben können:

$$x^{m+1} - \underset{1,m+1}{C^1}.x^m + \underset{1,m+1}{C^2}.x^{m-1} - \underset{1,m+1}{C^3}.x^{m-2} + \ldots + (-1)^{m+1} \underset{1,m+1}{C^{m+1}} = 0;$$

die Coefficienten dieser Gleichung vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade, deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$ sind, befolgen aber genau das in der Gl. (2) des m^{ten} Grades ausgesprochene Bildungsgesetz; unser Satz gilt daher für eine Gl. vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade, wenn er für eine Gleichung vom m^{ten} [Gra]de richtig ist. Da wir nun die Richtigkeit desselben für eine Gleichung [vo]m 2ten und 3ten Grade unmittelbar erprobt haben, so ist hiemit die [allg]emeine Giltigkeit nachgewiesen.

Es folgt hieraus, dass, wenn in einer Gleichung das zweite Glied [fehl]t, die Summe der Wurzeln $= 0$ sein muss; fehlt das von x freie [Glie]d, so ist $x = 0$ eine Wurzel der Gleichung.

Die bisher entwickelten Sätze gelten, die Coefficienten der Gleichung mögen reell oder imaginär sein. Wir wollen von nun an dieselben als reell voraussetzen.

93. Wenn eine Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \qquad (1)$$

in welcher sämmtliche Coefficienten reelle Grössen sind, eine imaginäre Wurzel $p + q\sqrt{-1}$ besitzt, so kommt ihr nothwendig auch die Wurzel $p - q\sqrt{-1}$ zu, welche sich von jener bloss durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheidet.

Denn substituirt man in obige Gleichung $x = p + q\sqrt{-1}$, so erhält man ein Resultat von der Form $P + Q\sqrt{-1}$, und es muss, da $p + q\sqrt{-1}$ der Voraussetzung nach eine Wurzel ist, $P + Q\sqrt{-1} = 0$, somit $P = Q = 0$ sein. Setzt man aber in derselben Gleichung $x = p - q\sqrt{-1}$, welcher Werth sich von dem früheren nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$, unterscheidet, so wird auch das Substitutionsresultat nur in diesem Zeichen von dem früheren verschieden sein, und demnach $= P - Q\sqrt{-1}$ werden, wo P und Q dieselben Werthe haben, wie oben. Da nun $P = Q = 0$, so ist auch $P - Q\sqrt{-1} = 0$, somit $p - q\sqrt{-1}$ ebenfalls eine Wurzel der Gleichung.

Ganz auf dieselbe Weise beweist man, dass, wenn die Coefficienten reell und rational sind, und $p + q\sqrt{r}$ eine Wurzel der Gleichung ist, unter $\sqrt{r}$ eine irrationale Zahl verstanden, auch $p - q\sqrt{r}$ der Gleichung als Wurzel zukommen müsse.

Die imaginären Wurzeln kommen demnach einer Gleichung immer paarweise zu; je zwei, die sich nur durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheiden, heissen conjugirte Wurzeln. Es folgt daraus, dass eine Gleichung mit reellen Coefficienten nur eine gerade Anzahl imaginärer Wurzeln haben könne; daher muss eine Gleichung von ungerader Ordnung wenigstens eine reelle Wurzel besitzen, oder wenn mehrere, in ungerader Anzahl. Einer Gleichung von gerader Ordnung hingegen kommen reelle Wurzeln immer in gerader Anzahl zu, können aber auch gänzlich fehlen.

Sind $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$ ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der Gl. (1), so ist das Gleichungspolynom sowohl durch

$x - p - q\sqrt{-1}$ als auch durch $x - p + q\sqrt{-1}$ theilbar, somit auch durch das Produkt:

$$(x - p - q\sqrt{-1})(x - p + q\sqrt{-1}) = (x - p)^2 + q^2,$$

welches, wie man sieht, reell vom zweiten Grade ist. Hieraus folgt der wichtige Lehrsatz:

Jede algebraische ganze rationale Funktion $f(x)$ mit reellen Coefficienten kann immer in lauter reelle Faktoren zerlegt werden, die theils vom ersten, theils vom zweiten Grade sein können; jede reelle Wurzel liefert einen Faktor vom 1ten, je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln einen Faktor vom 2ten Grade.

94. Da nach §. 92 das letzte von x freie Glied der Gleichung das Produkt aller mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln ist. und je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln immer ein positives Produkt: $(p + q\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1}) = p^2 + q^2$ geben, so hängt das Zeichen des letzten Gliedes bloss von der Anzahl der positiven Wurzeln ab, und ist $+$ oder $-$, je nachdem diese Anzahl gerade oder ungerade ist. Hieraus ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

a) Jede Gleichung von ungerader Ordnung hat nothwendig eine reelle Wurzel, deren Zeichen jenem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist. Denn nach §. 93 lässt eine solche Gleichung reelle Wurzeln nur in ungerader Anzahl zu. Ist nun das letzte Glied positiv, so müssen die positiven Wurzeln in gerader Anzahl, folglich mindestens eine negative Wurzel existiren; ist aber das letzte Glied negativ, so muss die Gleichung eine ungerade Anzahl positiver Wurzeln, also mindestens eine solche besitzen.

b) Jede Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, hat nothwendig wenigstens zwei reelle Wurzeln, deren eine positiv, die andere negativ ist. Denn das letzte Glied kann nur dadurch negativ werden, dass reelle positive Wurzeln in ungerader Anzahl und mindestens eine solche vorhanden sind; und weil einer Gleichung von gerader Ordnung die reellen Wurzeln in gerader Anzahl zukommen, so müssen daher auch negative Wurzeln in ungerader Anzahl, also mindestens eine solche existiren.

c) Ein gänzlicher Mangel an reellen Wurzeln kann nur dann eintreten, wenn die Gleichung von gerader Ordnung und ihr absolutes Glied positiv ist. Wenn sämmtliche Wurzeln imaginär sind, so lässt sich das

Polynom in lauter quadratische Faktoren von der Form $(x-p)^2+q^2$ zerlegen, bleibt demnach für jeden reellen Werth von x positiv. Wird also das Polynom einer Gleichung für irgend einen reellen Werth von x negativ, so kann man hieraus mit Sicherheit auf das Vorhandensein reeller Wurzeln schliessen.

95. Wenn man in der Gleichung:

$$f(x)=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0 \qquad (1)$$

$-x$ statt x setzt, so erhält man eine Gleichung $f(-x)=0$, deren Wurzeln den Wurzeln der gegebenen Gleichung numerisch gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind.

Denn sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ die Wurzeln der Gl. (1), so ist

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m),$$

und folglich, wenn man $-x$ an die Stelle von x setzt:

$$f(-x)=(-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2)(-x-\alpha_3)\ldots\ldots(-x-\alpha_m)$$

welche Gleichung offenbar $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \ldots -\alpha_m$ zu Wurzeln hat. Man überzeugt sich leicht, dass diese Umänderung am einfachsten durch Aenderung des Zeichens jener Glieder bewerkstelliget wird, welche ungerade Potenzen von x enthalten, oder auch, indem man die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, u. s. w. Gliedes der Gl. ändert, wobei jedoch die etwa fehlenden Glieder der Gleichung mitgezählt werden müssen.

So hat von den beiden Gleichungen $x^3-2x^2-19x+20=0$ und $x^3+2x^2-19x-20=0$ die erste die Wurzeln $+1, -4, +5$; die zweite: $-1, +4, -5$.

96. Wenn in einem vollständigen oder unvollständigen Gleichungspolynome zwei Glieder mit entgegengesetztem Zeichen aufeinanderfolgen, so sagt man, es bestehe an dieser Stelle ein Zeichenwechsel; haben aber zwei benachbarte Glieder gleiche Zeichen, so nennt man dieses eine Zeichenfolge.

Da eine vollständige Gleichung des m^{ten} Grades $m+1$ Glieder hat, so ist in einer solchen Gleichung die Summe aus der Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen $=m$. Aus den in §. 92 entwickelten Ausdrücken der Coefficienten der Gleichung als symmetrischer Funktionen der Wurzeln folgt unmittelbar, dass eine Gleichung, welche nur reelle positive Wurzeln hat, nur Zeichenwechsel und keine Zeichenfolge, eine Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln reell und negativ sind, nur Zeichenfolgen darbieten kann.

Jede Gleichung mit reellen Coefficienten, sie sei vollständig oder nicht, hat höchstens so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel.

Beweis. Es sei $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion von x mit reellen Coefficienten:

$$\varphi(x) = x^m + \ldots + - \ldots - + \ldots + - \ldots - + \ldots +, \quad (1)$$

in welcher wir, da es nur auf die Zeichenstellungen ankommt, auch nur diese ansetzen und das letzte Glied positiv nehmen wollen. Multipliciren wir dieses Polynom mit $x - \alpha$, wo α eine reelle positive Zahl bedeuten soll, so lässt sich zeigen, dass das Produkt $(x - \alpha)\varphi(x)$ mindestens um einen Zeichenwechsel mehr besitzen müsse, als die Funktion $\varphi(x)$.

In der That, verrichten wir die Multiplikation nach den Regeln der Arithmetik, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} x^m + \ldots + - \ldots\ldots - + \ldots\ldots + - \ldots\ldots - + \ldots\ldots + \\ x - \alpha \\ \hline x^{m+1} + \ldots + - \ldots\ldots - + \ldots\ldots + - \ldots\ldots - + \ldots\ldots + \\ \quad - \ldots - - + \ldots + + - \ldots - + \ldots + + - \ldots - - \\ \hline \end{array}$$

somit: $(x - \alpha)\,\varphi(x) =$

$$x^{m+1} \pm \ldots\ldots \pm - \pm \ldots\ldots \pm + \pm \ldots\ldots \pm - \pm \ldots\ldots \pm + \pm \ldots \pm -$$

als Produkt, in welchem die doppelten Zeichen andeuten, dass man das Zeichen der entsprechenden Glieder nicht kennt. Betrachtet man nun die Zeichenstellung im Produkte, so bemerkt man, dass auf das erste Glied mit positivem, also bestimmtem Zeichen mehrere Glieder mit unbestimmten Zeichen folgen, auf welche wieder ein Glied mit bestimmtem aber negativem Zeichen folgt; hierauf kommen wieder Glieder mit unbestimmten Zeichen, bis zu dem nächsten Gliede mit bestimmtem Zeichen, welches positiv ist u. s. w. Man sieht also, dass im Produkte die bestimmten Zeichen regelmässig abwechseln und erkennt leicht, dass dies in Folge des Vorganges der Multiplikation nothwendig so sein muss, und dass nicht zwei aufeinderfolgende mit bestimmten Zeichen versehene Glieder gleichbezeichnet sein können. Vergleicht man ferner die Zeichenstellung im Produkte mit jener im Multiplikand, so bemerkt ...n, dass jedem Zeichenwechsel in letzterem ein Glied mit bestimmtem ...ichen im Produkte entspreche. Besitzt also das Polynom $\varphi(x)$ r Zeichen...chsel, so wird das Produkt, da auch das erste und letzte Glied der...ben bestimmte Zeichen tragen, nothwendig $r + 2$ Glieder mit bestimmten ...ichen haben, welche regelmässig abwechseln. Nun muss aber von ...em Gliede mit bestimmtem Zeichen bis zum nächstfolgenden minde-

stens *ein* Zeichenwechsel stattfinden (es können deren auch mehrere in ungerader Anzahl eintreten), indem irgendwo + in — oder umgekehrt übergehen muss; folglich müssen im Produkte mindestens $r + 1$ Zeichenwechsel erscheinen. Hieraus folgt also, *dass das Polynom $\varphi(x)$ durch Multiplikation mit dem Faktor $(x - \alpha)$ mindestens Einen Zeichenwechsel gewonnen haben müsse.* Der Beweis bleibt ganz derselbe, wenn in dem Polynome $\varphi(x)$ die letzten Glieder negativ sind.

Es seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$ die positiven Wurzeln, i an der Zahl, der Gleichung $f(x) = 0$, so ist, wenn wir mit $\varphi(x)$ das Produkt der von den negativen und imaginären Wurzeln herrührenden Wurzelfaktoren bezeichnen:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_i) \cdot \varphi(x).$$

Multiplicirt man nun das Polynom $\varphi(x)$ der Reihe nach mit den Faktoren $(x - \alpha_1)$, $(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_i)$, so gewinnt es durch jede dieser Multiplikationen mindestens einen Zeichenwechsel und das Produkt $f(x)$ hat daher mindestens um i Zeichenwechsel mehr, als das Polynom $\varphi(x)$. Hieraus folgt also, dass eine Gleichung mindestens so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln besitzen müsse. Kehren wir diesen Satz um, so erhalten wir demnach das folgende Theorem:

I. *Eine Gleichung kann nicht mehr positive Wurzeln besitzen, als Zeichenwechsel, wohl aber weniger.*

Setzt man in der Gl. $f(x) = 0$, $-x$ an die Stelle von x, so ändern sämmtliche Wurzeln ihr Zeichen [§. 95]; bringt man hiemit den eben bewiesenen Satz in Verbindung, so erhält man folgendes Theorem:

II. *Eine Gleichung $f(x) = 0$ kann höchstens so viele negative Wurzeln haben, als die Gleichung $f(-x) = 0$ Zeichenwechsel darbietet.*

Ist das Polynom der Gleichung $f(x) = 0$ vollständig, so muss offenbar jedem Zeichenwechsel in $f(x)$ eine Zeichenfolge in $f(-x)$, und jeder Zeichenfolge in $f(x)$ ein Zeichenwechsel in $f(-x)$ entsprechen; mit Rücksicht auf diesen Umstand folgt aus obigen Sätzen das folgende unter dem Namen des *Cartesischen* oder *Harriot*'schen Satzes bekannte Theorem:

III. *Eine jede vollständige Gleichung hat höchstens so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und höchstens so viele negative Wurzeln als Zeichenfolgen.*

Berücksichtiget man noch, dass in einer vollständigen Gleichung die Summe der Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen dem Ord-

nungsexponenten der Gleichung, also auch der Anzahl der Wurzeln gleich ist, so gelangt man mit Hilfe des letzten Satzes allsogleich zu Folgendem:

IV. Eine jede *vollständige* Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln *reell* sind, hat eben so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel und eben so viele negative als Zeichenfolgen.

Beispiele: 1) die Gleichung $f(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ enthält 2 Zeichenwechsel, besitzt daher höchstens 2 positive Wurzeln; bildet man daraus die Gl. mit entgegengesetzten Wurzeln $f(-x) = x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 5 = 0$, so hat diese nur 1 Zeichenwechsel, somit höchstens 1 positive, die gegebene Gleichung daher höchstens 1 negative Wurzel, welche ihr zugleich nothwendig zukommt, da die Gl. von ungerader Ordnung und das letzte Glied positiv ist; [§. 94, *a*]. Daraus schliesst man ferner, dass diese Gleichung mindestens 2, möglicherweise auch 4 imaginäre Wurzeln besitze, in welch letzterem Falle ihr keine positive Wurzel zukäme.

2) Die Gl. $f(x) = x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 21x^3 - 48x^2 + 12x - 20 = 0$ ist eine vollständige mit 5 Zeichenwechseln und 1 Folge, hat daher höchstens 5 positive und höchstens 1 negative Wurzel. Mit Zuziehung des Satzes [§. 94, *b*] kann man daher behaupten, dass diese Gleichung eine, und **nur** eine negative Wurzel und mindestens eine positive Wurzel habe.

3) Die Gleichung $f(x) = x^7 - 7 = 0$ hat, weil einen Zeichenwechsel, höchstens 1 positive Wurzel, die ihr aber auch [§. 94, *a*] nothwendig zukommt; da ferner die Gl. $f(-x) = x^7 + 7 = 0$ eines Zeichenwechsels ermangelt, so hat die vorgelegte Gl. keine negative Wurzel; daher sind 6 Wurzeln imaginär.

4) Eben so findet man, dass die Gl. $x^6 + x^4 + x^2 - 3 = 0$ höchstens 1 positive und höchstens 1 negative Wurzel haben könne; da ihr diese ferner nach [§. 94, *b*] nothwendig zukommen, so sind 4 Wurzeln imaginär.

V. Fehlt in einer Gleichung **ein** Glied zwischen zwei mit **gleichen** Vorzeichen behafteten Gliedern, so hat die Gl. nothwendig imanäre Wurzeln. Denn denkt man sich die Gl. dadurch vervollständigt, ss man das fehlende Glied mit dem Coefficienten 0 einfügt, und legt an demselben, da sein Zeichen unbestimmt ist, einmal das Zeichen $+$, ann das Zeichen $-$ bei, so entstehen an dieser Stelle in dem einen alle zwei Zeichenwechsel, in dem anderen zwei Zeichenfolgen, und es üssten, wenn alle Wurzeln reell wären, zufolge IV. zwei Wurzeln

zugleich positiv und negativ sein, was unmöglich ist; daher können nicht alle Wurzeln reell sein, und es ist durch das eine fehlende Glied mindestens 1 Paar imaginärer Wurzeln angezeigt.

Fehlt jedoch ein Glied zwischen zwei ungleich bezeichneten Gliedern, so entsteht, man mag sich dieses mit $+$ oder mit $-$ eingeschaltet denken, immer 1 Zeichenwechsel und 1 Zeichenfolge, so dass obiger Widerspruch wegfällt und sämmtliche Wurzeln reell sein können.

In der Gl. des ersten Beispiels fehlt das Glied mit x^3 und x, und zwar ersteres zwischen zwei gleichbezeichneten Gliedern, woraus man auf die Anwesenheit eines Paares imaginärer Wurzeln schliesst. Aus dem fehlenden Gliede in x lässt sich hingegen nichts abnehmen, da die Nachbarglieder ungleiche Zeichen haben.

In der Gl. des vierten Beispieles fehlen die drei Glieder mit den ungeraden Potenzen von x, und zwar die beiden ersten zwischen gleichbezeichneten Gliedern, wodurch zwei Paare imaginärer Wurzeln angezeigt werden, wie wir bereits oben gefunden haben.

Complicirter werden die Regeln für die Grenzen der Anzahl der imaginären Wurzeln, wenn die Gleichung eine oder mehrere Gruppen von fehlenden Gliedern enthält.

II. TRANSFORMATION DER GLEICHUNGEN.

Eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ transformiren, heisst, aus derselben eine neue Gleichung, die transformirte $F(y) = 0$, ableiten, deren Wurzeln gegebene Funktionen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind. Wir werden uns hier auf die einfachsten Transformationen beschränken, welche später bei der Auflösung der Gleichungen Anwendung finden.

97. Die Gleichung:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

in eine andere, $F(y) = 0$ zu transformiren, deren Wurzeln sämmtlich um die Grösse a kleiner sind, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Bezeichnet man mit y die Unbekannte oder die Wurzeln der neuen Gleichung, so hat man $y = x - a$, somit $x = y + a$ zu setzen. Die Substitution dieses Werthes von x in die Gl. (1) liefert sofort die transformirte Gleichung:

$$F(y) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} y^m + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} y^{m-1} + \frac{f^{(m-2)}(a)}{(m-2)!} y^{m-2} + \ldots +$$
$$+ \frac{f''(a)}{2!} y^2 + \frac{f'(a)}{1!} y + f(a) = 0, \qquad (2)$$

wo die Coefficienten $f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(m)}(a)$ beziehungsweise die 1ste, 2te, 3te, ... $m$te abgeleitete Funktion von $f(x)$ sind, wenn man darin x durch a ersetzt. Es erhellt dies unmittelbar aus §. 91, da offenbar hier dieselbe Entwickelung vorzunehmen ist, wie dort, indem man nur a statt x und y statt δ schreibt.

Beisp. Die Gleichung $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$, deren Wurzeln $+1, +2, -3, -4$ sind, in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln um 5 kleiner sind.

Man findet:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24, \quad \text{somit} & f(5) &= 864\\
f'(x) &= 4x^3 + 12x^2 - 14x - 22 & f'(5) &= 708\\
f''(x) &= 12x^2 + 24x - 14 & f''(5):2! &= 203\\
f'''(x) &= 24x + 24 & f'''(5):3! &= 24\\
f^{\text{IV}}(x) &= 24 & f^{\text{IV}}(5):4! &= 1
\end{aligned}$$

Die transformirte Gleichung ist daher:

$$y^4 + 24y^3 + 203y^2 + 708y + 864 = 0,$$

deren Wurzeln, wie man sich leicht überzeugt: $-4, -3, -8, -9$ sind.

Da diese Transformation für die Auflösung der Gleichungen von grosser Wichtigkeit ist, so wollen wir ein von Budan herrührendes Verfahren entwickeln, welches die Coefficienten der transformirten Gleichung mit Leichtigkeit finden lässt. Was zunächst den letzten Coefficienten $f(a)$ betrifft, so ist dieser nichts anderes als das Resultat der Substitution von $x = a$ in das Gleichungspolynom $f(x)$, also, nach §. 89, der Rest, welchen man erhält, wenn man $f(x)$ durch $x - a$ dividirt, kann also durch das dort gelehrte Horner'sche Divisionsverfahren leicht gefunden werden. Allein durch dasselbe Verfahren, auf die successiven Quotienten wiederholt angewendet, ergeben sich auch die übrigen Coefficienten, wie folgende Betrachtung zeigt.

Führt man in Gl. (2), welche aus (1) dadurch entstanden ist, dass $x = y + a$ gesetzt wurde, für y wieder seinen Werth $x - a$ ein, so muss offenbar wieder die Gl. (1) zum Vorschein kommen. Es ist daher die Gleichung:

$$\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+\frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}+\frac{f^{(m-2)}(a)}{(m-2)!}(x-a)^{m-2}+\dots+$$

$$+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+f(a)=0 \qquad (3)$$

identisch mit der Gl. (1), und jedes Resultat, das wir durch irgend ein Verfahren aus (3) ableiten können, muss sich folglich durch dasselbe Verfahren auch aus (1) gewinnen lassen.

Dividirt man aber das Polynom (3), oder, was dasselbe sagen will, das Polynom der Gl. (1) durch $(x-a)$, den sich ergebenden Quotienten wieder durch $(x-a)$, den dadurch erhaltenen Quotienten abermals durch $(x-a)$ u. s. w., so sind, wie dies aus der Form des Polynoms (3) sogleich erhellt, die bei diesen successiven Divisionen, $(m+1)$ an der Zahl, sich ergebenden Reste die Grössen:

$$f(a),\ \frac{f'(a)}{1!},\ \frac{f''(a)}{2!},\ \frac{f'''(a)}{3!},\dots\frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf das obige Beispiel an, so haben wir durch $x-5$ wiederholt zu dividiren; der Operationsfaktor ist $+5$ und die Rechnung steht [§. 89.] so:

	1,	+ 4,	— 7,	— 22,	+ 24
+ 5]	1,	+ 9,	+ 38,	+ 168,	(+ 864)
	1,	+ 14,	+ 108,	(+ 708)	
	1,	+ 19,	(+ 203)		
	1,	(+ 24)			
	(1)				

wo die eingeklammerten Zahlen die Reste sind. Somit ist:

$$f(a)=864,\ f'(a)=708,\ \frac{f''(a)}{2!}=203,\ \frac{f'''(a)}{3!}=24,\ \frac{f^{\mathrm{IV}}(a)}{4!}=1,$$

und die transformirte Gleichung heisst:

$$y^4+24y^3+203y^2+708y+864=0,$$

wie oben.

Sollen die Wurzeln der Gl. um a vergrössert werden, so hat man nur das Zeichen von a zu vertauschen. Um z. B. die Gleichung:

$$x^3-2x^2-5x+6=0,$$

deren Wurzeln $+1$, -2, $+3$ sind, in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln um 4 grösser sind, hat man durch $x+4$ zu dividiren: Operationsfaktor ist -4, und es kommt:

$$
\begin{array}{rllll}
 & 1, & -2, & -5, & +6 \\
-4] & 1, & -6, & +19, & (-70) \\
 & 1, & -10, & (+59), & \\
 & 1, & (-14) & & \\
 & (1) & & &
\end{array}
$$

Die transformirte Gleichung ist somit $x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0$, deren Wurzeln in der That 5, 2, 7 sind.

Mittelst dieser Transformation kann man aus einer gegebenen Gleichung (1) irgend ein Glied wegschaffen; es genügt hiezu, die Grösse a so zu bestimmen, dass der Coefficient derjenigen Potenz von x, welche in der transformirten Gleichung fehlen soll, $= 0$ werde. Man wird daher diesen Cofficienten, indem man vorläufig a unbestimmt lässt, gleich 0 setzen und dadurch eine Gleichung erhalten, welche den gesuchten Werth von a liefert. Mit Vortheil wird dieses Verfahren jedoch nur auf das zweite Glied angewendet, da die Wegschaffung eines der folgenden Glieder die Auflösung einer höheren Gleichung erfordern würde, wie aus den Ausdrücken der Coefficienten dieser Glieder sogleich erhellt.

Um nun das 2te Glied wegzuschaffen, hat man in Gl. (2) $f^{(m-1)}(a) = 0$ zu setzen, d. i. mit Rücksicht auf die Bedeutung von $f^{(m-1)}(a)$ [§. 91], a aus der Gleichung $mA_0 a + A_1 = 0$ zu bestimmen, woraus

$$a = -\frac{A_1}{mA_0}$$

folgt, und endlich

$$x = y - \frac{A_1}{mA_0}$$

zu setzen.

Um z. B. obige Gleichung $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ vom zweiten Gliede zu befreien, hat man

$$a = -\frac{A_1}{mA_0} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3},$$

und somit:

$$x = y + \frac{2}{3}$$

setzen, d. i. die Wurzeln um $\frac{2}{3}$ zu verkleinern; man findet für die ansformirte Gleichung:

$$x^3 - \frac{57}{9}x + \frac{56}{27} = 0,$$

ren Wurzeln $\frac{1}{3}$, $-\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$ sind.

98. Die Gleichung:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

soll in eine andere transformirt werden, deren Wurzeln $a$mal so gross sind, als die Wurzeln der Gl. (1).

Ist wieder y das Symbol der Unbekannten in der transformirten Gleichung, so ist $y = ax$, also $x = \frac{y}{a}$. Wird dieser Werth in (1) substituirt, so erhält man:

$$\frac{A_0 y^m}{a^m} + \frac{A_1 y^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{A_2 y^{m-2}}{a^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1} y}{a} + A_m = 0,$$

und wenn man mit a^m multiplicirt:

$$A_0 y^m + A_1 a y^{m-1} + A_2 a^2 y^{m-2} + \ldots . + A_{m-1} a^{m-1} y + A_m a^m = 0$$

als transformirte Gleichung, welche, wie man sieht, aus (1) entsteht, wenn man die Glieder der Gl. (1) der Reihe nach mit den Gliedern der geometrischen Progression 1, a, a^2, a^3, ... a^m multiplicirt, wobei jedoch auf die etwa fehlenden Glieder der Gleichung Rücksicht zu nehmen ist.

Mit Hilfe dieser Transformation kann man das erste Glied der Gl. (1) vom Coefficienten A_0 befreien, ohne dass dadurch die übrigen Coefficienten aufhören, ganze Zahlen zu sein, indem man $a = A_0$ nimmt, weil dann sämmtliche Glieder der Gl. durch A_0 theilbar werden.

Sind mehrere oder alle Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

rationale Brüche, so kann man mittelst dieser Transformation eine neue Gleichung ableiten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind und zwar so, dass der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten = 1 bleibt. Wie aus der obigen transformirten Gleichung erhellt, wird dies immer erreicht, wenn man für die Grösse a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämmtlicher Nenner wählt, wiewol in besonderen Fällen schon ein kleinerer Werth hiezu genügen kann. Um z. B. die Gleichung:

$$x^3 - \frac{57}{9} x + \frac{56}{27} = 0$$

[§. 97] von den Brüchen zu befreien, setze man $a = 3$ und hat sofort:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{57}{9} & +\frac{56}{27} \\ 1 & 3 & 9 & 27, \end{array}$$

somit $y^3 - 57y + 56 = 0$ als transformirte Gleichung, deren Wurzeln daher 1, — 8, 7 sind, wie man sich leicht überzeugt.

Auch kann man hiedurch bisweilen die Coefficienten einer gegebenen Gleichung vereinfachen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen ist. Die Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 112x - 208 = 0$$

transformire man in eine andere, deren Wurzeln die Hälfte der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; es ist also hier $a = \frac{1}{2}$ zu setzen, womit man $x^4 - x^3 - 3x^2 + 14x - 13 = 0$ als transformirte Gl. findet, welche der kleineren Coefficienten wegen leichter zu behandeln ist.

99. Aus Gl. (1) im vorigen §. eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die reciproken Werthe der Wurzeln der Gl. (1) sind.

Man hat hier $y = \frac{1}{x}$ zu setzen, folglich $x = \frac{1}{y}$; führt man diesen Werth in die Gl. (1) ein, so erhält man, wenn man sogleich mit y^m multiplicirt:

$$A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \ldots + A_1 y + A_0 = 0,$$

welche Gleichung die verlangte Eigenschaft besitzt und, wie man sieht, aus der gegebenen Gleichung hervorgeht, wenn man die Coefficienten in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen lässt.

III. VON DEN WIEDERHOLTEN WURZELN DER GLEICHUNGEN.

100. Da die Anwesenheit wiederholter oder gleicher Wurzeln in einer Gleichung bei der Auflösung derselben Schwierigkeiten in den Weg legt, so wollen wir uns nun damit beschäftigen, Mittel aufzusuchen, um dieselben zu entdecken und aus der Gleichung wegzuschaffen.

Es sei α_1 eine der Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

p mal zukommende Wurzel, so ist identisch:

$$f(x) = (x - \alpha_1)^p . F(x), \qquad (2)$$

o $F(x)$ das Produkt der übrigen Wurzelfaktoren vorstellt, welche wir sämmtlich von einander verschieden voraussetzen wollen. Setzen wir $+ \delta$ an die Stelle von x, so folgt aus (2):

$$f(x + \delta) = (x + \delta - \alpha_1)^p . F(x + \delta). \qquad (3)$$

Entwickelt man diese Gleichung, und zwar den Faktor:

$$\{(x - \alpha_1) + \delta\}^p$$

nach dem binomischen Lehrsatze, die Funktionen $f(x+\delta)$ und $F(x+\delta)$ nach §. 91, so erhält man:

$$f(x)+\delta f'(x)+\delta^2\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\delta^m\frac{f^{(m)}(x)}{m!}=$$

$$=\left\{(x-\alpha_1)^p+p(x-\alpha_1)^{p-1}\delta+\ldots+\delta^p\right\}\left\{F(x)+\delta F'(x)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\delta^{m-p}\frac{F^{(m-p)}(x)}{(m-p)!}\right\},$$

d. i. wenn man die Multiplikation im 2[ten] Theile ausführt und nach Potenzen von δ ordnet:

$$f(x)+\delta f'(x)+\tfrac{1}{2}\delta^2 f''(x)+\ldots=(x-\alpha_1)^p F(x)+$$

$$+\delta\left\{(x-\alpha_1)^p F'(x)+p(x-\alpha_1)^{p-1}F(x)\right\}+\ldots.$$

Da diese Gleichung als eine identische für jeden Werth von δ besteht, so müssen nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von δ gleich sein; somit hat man:

$$f'(x)=(x-\alpha_1)^{p-1}[pF(x)+(x-\alpha_1)F'(x)], \qquad (4)$$

woraus man erkennt, dass die erste abgeleitete Funktion $f'(x)$ den Faktor $(x-\alpha_1)$, $p-1$ mal enthält, aber auch nicht öfter, da derselbe der Voraussetzung nach in $F(x)$ nicht vorkommt. Bezeichnet man den in den eckigen Klammern stehenden Ausdruck mit $F_1(x)$, so wird:

$$f'(x)=(x-\alpha_1)^{p-1}.\,F_1(x). \qquad (5)$$

So wie aber diese Gleichung aus (2) entstand, eben so wird aus (5):

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x)=(x-\alpha_1)^{p-2}F_2(x), & \text{hieraus} \\ f'''(x)=(x-\alpha_1)^{p-3}F_3(x), & \text{hieraus} \\ f^{\text{IV}}(x)=(x-\alpha_1)^{p-4}F_4(x), & \\ \text{u. s. w.} & \\ \text{endlich} & \\ f^{(p-1)}(x)=(x-\alpha_1).\,F_{p-1}(x), & \\ f^{(p)}(x)=F_p(x) & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

sich ergeben. In diesen Gleichungen ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von $F_1(x)$:

$$F_1(x)=pF(x)+(x-\alpha_1)F'(x),$$

somit:

$$F_2(x)=(p-1)F_1(x)+(x-\alpha_1)F'_1(x),$$

$$F_3(x)=(p-2)F_2(x)+(x-\alpha_1)F'_2(x),$$

u. s. w.

$$F_{p-1}(x)=2F_{p-2}(x)+(x-\alpha_1)F'_{p-2}(x),$$

$$F_p(x)=F_{p-1}(x)+(x-\alpha_1)F'_{p-1}(x),$$

woraus folgt, dass, weil $F(x)$ den Faktor $(x-\alpha_1)$ nicht enthält, keine der Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_p(x)$ diesen Faktor enthalten kann.

Die Gleichungen (5) und (6) lassen somit erkennen, dass die der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ p mal zukommende Wurzel α_1 die Eigenschaft besitzt, sämmtliche derivirte Funktionen, von $f'(x)$ bis einschliesslich zur $(p-1)^{\text{ten}}$, statt x gesetzt, auf 0 zu reduciren, d. h. diese Wurzel ist auch Wurzel der Gleichungen:

$$f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ f'''(x)=0,\ \ldots\ f^{(p-1)}(x)=0;$$

und zwar kommt sie der Gl. $f'(x)=0$ $(p-1)$ mal, der Gl. $f''(x)=0$ $(p-2)$ mal u. s. w., endlich der Gl. $f^{(p-1)}(x)=0$ 1 mal zu.

Die Gleichungen (2) und (5) zeigen, dass der Faktor $(x-\alpha_1)^{p-1}$ ein gemeinschaftlicher Theiler der beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ ist. Er ist aber auch der grösste gemeinschaftliche Theiler dieser Funktionen. Dies wird bewiesen sein, wenn man zeigen kann, dass die beiden Funktionen $F(x)$ und $F_1(x)=pF(x)+(x-\alpha_1)F'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, was wieder dann der Fall sein wird, wenn die Funktion $F(x)$ und ihre Derivirte $F'(x)$ eines solchen ermangeln. Setzt man aber in den Gleichungen (2) und (5), $p=1$, d. h. nimmt man an, dass die Gleichung $f(x)=0$ keine wiederholten Wurzeln besitze, so ist:

$$f(x)=(x-\alpha_1)F(x),$$
$$f'(x)=F(x)+(x-\alpha_1)F'(x).$$

Hieraus sieht man, dass, wenn der Wurzelfaktor $x-\alpha_1$ der Gl. $f(x)=0$ nur einmal zukommt, dieser Faktor in der ersten derivirten Funktion $f'(x)$ fehlt. Da nun das Produkt $F(x)$ der Voraussetzung nach lauter verschiedene Faktoren enthält, so kann keiner derselben Faktor von $F'(x)$ sein; somit haben $F(x)$ und $F'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler.

Da nun alles, was wir bisher von der wiederholten Wurzel α_1 gezeigt haben, von jeder anderen der Gleichung $f(x)=0$ mehrmals zukommenden Wurzel gelten muss, so gelangen wir leicht zu folgenden Schlüssen:

a) Jede der Gl. $f(x)=0$ p mal zukommende Wurzel α erzeugt in der 1sten derivirten Funktion $f'(x)$ den Faktor $(x-\alpha)^{p-1}$.

b) Die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ haben ausser [de]n von den gleichen Wurzeln herrührenden Wurzel[fa]ktoren keinen gemeinschaftlichen Faktor.

Nehmen wir also jetzt an, die Gleichung $f(x)=0$ besitze etwa [die] Wurzel α_1 p mal, die Wurzel α_2 q mal, die Wurzel α_3 r mal, ausser[d]en aber nur ungleiche Wurzeln, so ist:

$$f(x) = (x - \alpha_1)^p (x - \alpha_2)^q (x - \alpha_3)^r . F(x).$$
$$f'(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} (x - \alpha_3)^{r-1} . F_1(x),$$

wo $F(x)$ und $F_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Sucht man daher den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ der zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ und setzt diesen $= 0$, so bietet die Gleichung:

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} (x - \alpha_3)^{r-1} = 0$$

sämmtliche wiederholte Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und nur diese dar.

Meistens wird die Funktion $\varphi(x)$ von so niedrigem Grade sein, dass es keine Schwierigkeiten hat, dieselbe durch Auflösung der Gl. $\varphi(x) = 0$ in ihre einfachen Faktoren zu zerlegen. Hätte man z. B. $\varphi(x) = x^2 - 3x + 2$ gefunden, so wäre $\varphi(x) = (x - 1)(x - 2)$, woraus man sofort schliesst, dass die gegebene Gl. die Wurzeln 1 und 2, jede zweimal besitzt. Ist aber das Polynom $\varphi(x)$ von höherem Grade, und überschreiten die Zahlen p, q, r oder auch nur eine derselben die Zahl 2, so bietet die Auflösung der Gl. $\varphi(x) = 0$ dieselben Schwierigkeiten dar, welche überhaupt die Anwesenheit wiederholter Wurzeln mit sich bringt. Man kann aber leicht Gleichungen darstellen, welche sämmtliche Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$ nur einmal oder auch bloss die gleichen Wurzeln, jede nur einmal enthält. Dividirt man nämlich $f(x)$ durch $\varphi(x)$, bezeichnet den Quotienten mit $\psi(x)$ und setzt $\psi(x) = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\psi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) . F(x) = 0, \tag{7}$$

welche offenbar alle Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, jede nur einmal enthält. Sucht man endlich den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_1(x)$ der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und setzt diesen $= 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0, \tag{8}$$

welche nur die wiederholten Wurzeln der Gleichung jede nur einmal besitzt. Man kann auch noch $\psi(x)$ durch $\varphi_1(x)$ dividiren; der Quotient $F(x) = 0$ gesetzt, gibt die der Gleichung nur einmal zukommenden Wurzeln.

Der Ordnungsexponent der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, wie man sieht, der Anzahl der wiederholten Wurzeln gleich; es bleibt dann noch zu entscheiden, wie oft jede derselben der Gleichung angehöre. Wiewohl es keine Schwierigkeiten hat, Gleichungen darzustellen, welchen nur die zweifachen, nur die dreifachen Wurzeln u. s. w. der Gl. $f(x) = 0$ zukommen, so ist es doch am einfachsten, dies durch unmittelbare Versuche nach einem beliebigen Verfahren zu entscheiden. Hat man

z. B. durch Auflösung der Gl. (8) α_1 als eine wiederholte Wurzel erkannt, so transformire man die Gl. $\varphi(x) = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um α_1 kleiner sind; fehlen in der transformirten Gleichung h Endglieder, so kommt diese Wurzel der Gl. $f(x) = 0$ $(h + 1)$ mal zu.

Leider macht die sehr weitläufige Rechnung, welche mit der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers $\varphi(x)$ der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ verbunden ist, wenn das Polynom $f(x)$ von etwas höherem Grade und die Coefficienten grössere Zahlen sind, die Anwendung dieser Theorie sehr unbequem. In der Praxis kommt übrigens der Fall gleicher Wurzeln nur selten vor.

IV. ÜBER DIE BERECHNUNG SYMMETRISCHER FUNKTIONEN DER WURZELN.

101. Wir haben in §. 92 gesehen, dass die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \qquad (1)$$

symmetrische Funktionen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ sind, und zwar mit Anwendung der in §. 12 angenommenen Bezeichnung:

$[1] = -A_1$, $[1, 1] = A_2$, $[1, 1, 1] = -A_3$, $[1, 1, 1, 1] = A_4$ u. s. w.,

also symmetrische Funktionen der niedrigsten Classe von der ersten angefangen bis zur m^{ten} Ordnung.

Schon hieraus lässt sich schliessen, dass sich auch andere symmetrische Funktionen der Wurzeln, ohne diese selbst zu kennen, durch die Coefficienten der Gleichung werden ausdrücken lassen; in der That kommt den algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten folgende höchst merkwürdige Eigenschaft zu:

Jede symmetrische Funktion der Wurzeln der Gl. (1) kann, ohne diese selbst zu kennen, durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden.

Da bei irrationalen symmetrischen Funktionen offenbar die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen rationale symmetrische Funktionen, ferner bei gebrochenen symmetrischen Funktionen Zähler und Nenner ganze symmetrische Funktionen sein müssen, so können wir uns darauf beschränken, den Beweis des Satzes für ganze rationale Funktionen zu führen und len noch folgende Bemerkungen voranschicken.

1) Das Produkt zweier symmetrischen Funktionen ist wieder eine ımetrische Funktion. Denn seien U, V die beiden Faktoren, ihr Produkt P; denken wir uns in den Faktoren irgend eine Vertauschung der əmente vorgenommen und dieselben neuerdings multiplicirt; sei P' das ɔdukt, so muss dieses $= P$ sein, da die Faktoren durch die vorge-

nommene Vertauschung der Elemente sich nicht geändert haben. Anderseits muss offenbar P' aus P durch dieselbe Vertauschung hervorgehen; das Produkt P ändert sich also nicht durch diese und eben so wenig durch irgend eine andere beliebige Vertauschung, ist also symmetrisch.

2) Hieraus folgt, dass das Produkt einer beliebigen Anzahl symmetrischer Funktionen, mithin auch jede Potenz mit ganzem Exponenten wieder eine symmetrische Funktion ist. Man übersieht ohne Schwierigkeit, dass eine solche Potenz von symmetrischen Funktionen aus mehreren symmetrischen Funktionen bestehen wird, welche sämmtlich von derselben Ordnung, aber von verschiedenen Classen sein werden.

Bilden wir z. B. die zweite Potenz der s. Funktion:

$$[1] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

wir finden:

$$[1]^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = [2] + 2[1, 1];$$

es ist also $[1]^2$ durch die zwei sym. Funktionen $[2]$ und $[1, 1]$ ausgedrückt, welche beide von der 2ten Ordnung sind, die zweite aber von niedrigerer Classe als die erste. Eben so findet man für dieselben drei Elemente:

$$[1]^3 = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) + 3(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3 + \\ + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2) + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ = [3] + 3[2, 1] + 6[1, 1, 1].$$

Kehren wir nun zu dem Beweise unseres Satzes zurück. Es sei:

$$U = [a, b, c, d, e, \ldots h, k]$$

die durch die Coefficienten der Gleichung auszudrückende sym. Funktion, welche demnach aus Gliedern von der Form:

$$\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c \alpha_4^d \ldots \alpha_{n-1}^h \alpha_n^k$$

bestehen wird; wir nehmen dabei an, dass die Exponenten $a, b, c, d, \ldots h, k$ ganze positive Zahlen, n an der Zahl, und in der Klammer nach ihrer Grösse in absteigender Ordnung geordnet seien, so dass b nicht grösser als a, c nicht grösser als b u. s. w. sei. Bilden wir aus den ersten n Coefficienten der Gleichung das Produkt:

$$P = (-A_1)^{a-b}(A_2)^{b-c}(-A_3)^{c-d}(A_4)^{d-e}\ldots(\pm A_{n-1})^{h-k}(\mp A_n)^k, \quad (2)$$

welches Produkt demnach eine durch die n Anfangscoefficienten der Gleichung gegebene, bekannte Grösse ist.

Durch Substitution der Werthe von $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ in das Produkt (2) erhalten wir:

$$P = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)^{a-b}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots)^{b-c}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots)^{c-d} \times \\ \times (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots)^{h-k}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \ldots)^k.$$

Um die Bildung dieses Produktes nach verrichteter Multiplikation leichter zu übersehen, betrachten wir zuerst irgend einen der Faktoren, etwa den ersten; es ist:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)^{a-b} &= [1]^{a-b} = \\ = \alpha_1^{a-b} &+ \binom{a-b}{1} \alpha_1^{a-b-1} (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m) \\ &+ \binom{a-b}{2} \alpha_1^{a-b-2} (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)^2 \\ &+ \binom{a-b}{3} \alpha_1^{a-b-3} (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)^{a-b},\end{aligned}$$

oder nach weiterer Entwickelung der Potenzen von $(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)$:

$$\begin{aligned}[1]^{a-b} = \alpha_1^{a-b} &+ \binom{a-b}{1} \left\{\alpha_1^{a-b-1} \alpha_2 + \alpha_1^{a-b-1} \alpha_3 + \ldots\right\} \\ &+ \binom{a-b}{2} \left\{\alpha_1^{a-b-2} \alpha_2^2 + \alpha_1^{a-b-2} \alpha_3^2 + \ldots\right\} \\ &+ 2\binom{a-b}{2} \left\{\alpha_1^{a-b-2} \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^{a-b-2} \alpha_2\alpha_4 + \ldots\ldots\right\} \\ &+ \binom{a-b}{3} \left\{\alpha_1^{a-b-3} \alpha_2^3 + \alpha_1^{a-b-3} \alpha_3^3 + \ldots\right\}\end{aligned}$$

u. s. w.

Wie man sieht, sind die Glieder sämmtlich von der Ordnung $(a-b)$; da ferner der Ausdruck symmetrisch ist, so müssen darin alle Glieder vorkommen, welche durch Vertauschung der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ aus den Gliedern α_1^{a-b}, $\alpha_1^{a-b-1}\alpha_2$, $\alpha_1^{a-b-2}\alpha_2^2$ u. s. w. hervorgehen, folglich die diesen Gliedern entsprechenden sym. Funktionen, so dass demnach kommt:

$$\begin{aligned}[1]^{a-b} = [a-b] &+ B_1 [a-b-1, 1] + B_2 [a-b-2, 2] + \\ &+ B_3 [a-b-2, 1, 1] \\ &+ B_4 [a-b-3, 3] + B_5 [a-b-3, 2, 1] + \\ &+ B_6 [a-b-3, 1, 1, 1] \\ &+ B_7 [a-b-4, 4] + \ldots \text{ etc.}\end{aligned}$$

Es ist daher der erste Faktor des obigen Produktes eine Summe von mit gewissen Coefficienten behafteten sym. Funktionen, sämmtlich von der $(a-b)^{\text{ten}}$ Ordnung aber verschiedenen Classen, und es ist insbesond ere

$$[a-b] = \alpha_1^{a-b} + \alpha_2^{a-b} + \alpha_3^{a-b} + \ldots + \alpha_m^{a-b} \qquad (3)$$

jene der höchsten Classe.

Eben so liefert der 2[te] Faktor eine Reihe sym. Funktionen von der $2(b-c)^{\text{ten}}$ Ordnung und verschiedenen Classen, unter denen die Funktion:

$$[b-c,\ b-c] = \alpha_1^{b-c}\alpha_2^{b-c} + \alpha_1^{b-c}\alpha_3^{b-c} + \ldots + \alpha_{m-1}^{b-c}\alpha_m^{b-c} \quad (4)$$

jene der höchsten Classe sein wird u. s. w.

Der vorletzte Faktor liefert als sym. Funktion der höchsten Classe von der $(n-1)(h-k)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\alpha_1^{h-k}\alpha_2^{h-k}\alpha_3^{h-k}\ldots\alpha_{n-2}^{h-k}\alpha_{n-1}^{h-k} +$$
$$+\,\alpha_1^{h-k}\alpha_2^{h-k}\alpha_3^{h-k}\ldots\alpha_{n-2}^{h-k}\alpha_n^{h-k} + \ldots \quad (5)$$

Endlich ist unter den symmetrischen Funktionen der nk^{ten} Ordnung, welche aus dem letzten Gliede hervorgehen, jene

$$\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k \ldots \alpha_{n-1}^k\alpha_n^k + \alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\ldots\alpha_{n-1}^k\alpha_{n+1}^k + \ldots \quad (6)$$

von der höchsten Classe.

Denkt man sich nun alle aus den einzelnen Faktoren des Produktes P hervorgehenden Reihen symmetrischer Funktionen wirklich multiplicirt, so wird dieses aus einem Aggregate sym. Funktionen bestehen, welche sämmtlich von der Ordnung:

$$(a-b)+2(b-c)+3(c-d)+4(d-e)+\ldots+(n-2)(g-h)+$$
$$+(n-1)(h-k)+nk = a+b+c+d+e+\ldots+h+k = r$$

und verschiedenen Classen sein werden; die sym. Funktion der höchsten Classe des Produktes muss offenbar durch die Multiplikation der sym. Funktionen höchster Classe der Faktoren entstehen; wir erhalten sie daher, wenn wir die Ausdrücke (3), (4), ... (5), (6) mit einander multipliciren; und da jede sym. Funktion durch irgend eines ihrer Glieder gegeben ist, so erhalten wir durch Multiplikation der ersten Glieder der genannten Ausdrücke:

$$\alpha_1^a\alpha_2^b\alpha_3^c\alpha_4^d \ldots \alpha_{n-1}^h\alpha_n^k$$

für das 1[ste] Glied der sym. Funktion der höchsten Classe des Produktes, welche demnach keine andere, als die gesuchte Funktion U ist. Bezeichnen wir daher die Summen aller übrigen sym. Funktionen der niedrigeren Classen des Produktes mit S, so ist $P = U + S$, woraus

$$U = P - S$$

folgt; hiedurch ist zunächst erwiesen, dass jede ganze rationale sym. Funktion der Wurzeln der Gl. (1) ausgedrückt werden kann durch eine gewisse Anzahl von Anfangscoefficienten der Gleichung und symmetrische Funktionen derselben Ordnung aber niedrigerer Classen.

Hebt man nun aus dem Aggregate sym. Funktionen S jene der höchsten Classe heraus, so kann diese abermals durch Anfangscoefficienten der Gleichung und sym. Funktionen derselben Ordnung aber niedrigerer Classen ausgedrückt werden und man sieht leicht ein, dass man, auf diese Weise fortfahrend, endlich U durch eine gewisse Anzahl Anfangscoefficienten der Gleichung und sym. Funktionen der niedrigsten Classe ausgedrückt haben wird, welche letzteren aber nichts anderes als die Coefficienten selbst sind. Hiemit ist aber der aufgestellte Lehrsatz erwiesen.

Der Gang dieses Beweises lässt sich leicht an beliebig gewählten Beispielen verfolgen. Man bilde z. B. die durch das Symbol [2, 1] dargestellte sym. Funktion der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ der Gl. (1). Hier ist $a=2$, $b=1$, $c=d=\ldots=k=0$; $n=2$; wir haben daher das Produkt $P=(-A_1)^{2-1}(A_2)^{1-0}$ zu entwickeln. Es ist aber:

$$\begin{aligned}(-A_1).A_2 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_3+\ldots)\\ &= \alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_2^2+\ldots\\ &\quad+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots.\end{aligned}$$

Man übersieht auf der Stelle, dass in diesem Produkte keine anderen Glieder vorkommen können, als solche von der Form $\alpha_1^2\,\alpha_2$ und $\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3$ und zwar jedes Glied der 1sten Form nur einmal, jedes der letzteren dreimal; da nun die Summe aller Glieder von der Form: $\alpha_1^2\;\alpha_2$ nichts anderes ist als die Funktion [2, 1], die Summe der Glieder von der Form: $\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3$ aber die sym. Funktion [1, 1, 1] bildet, so ist:

$$-A_1 . A_2 = [2,\ 1] + 3\,[1,\ 1,\ 1],$$

folglich, da $[1,\ 1,\ 1] = -A_3$ ist:

$$[2,\ 1] = 3A_3 - A_1A_2.$$

2tes **Beispiel.** Man suche den Werth von [4]. d. i. der Summe der 4ten Potenzen der Wurzeln. Wir haben:

$$a=4,\ b=c=\ldots.=k=0,\ n=1,$$

somit das Produkt $P=(-A_1)^4$ zu entwickeln.

$$\begin{aligned}(-A_1)^4 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_m)^4 =\\ &= \begin{Bmatrix}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_m^2\\ +2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+\ldots+2\alpha_2\alpha_3+\ldots\end{Bmatrix}^2.\end{aligned}$$

Ohne die weitere Potenzirung vorzunehmen, lehrt eine leichte Ueberlegung, dass man erhält:

Glieder von der Form	α_1^4	jedes 1 mal
- - - -	$\alpha_1^3\alpha_2$	- 4 -
- - - -	$\alpha_1^2\alpha_2^2$	- 6 -
- - - -	$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$	- 12 -
- - - -	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	- 24 - ,

somit:

$$(-A_1)^4 = [4] + 4[3, 1] + 6[2, 2] + 12[2, 1, 1] + 24[1, 1, 1, 1],$$

woraus:

$$[4] = A_1^4 - 4[3, 1] - 6[2, 2] - 12[2, 1, 1] - 24[1, 1, 1, 1]$$

folgt. Auf dieselbe Weise findet man der Reihe nach aus den Produkten: $(-A_1)^2 A_2$, $(-A_1)^0 A_2^2 = A_2^2$, $(-A_1) A_2^0 (-A_3) = (-A_1)(-A_3)$:

$$[3, 1] = A_1^2 A_2 - 2[2, 2] - 5[2, 1, 1] + 12[1, 1, 1, 1],$$

$$[2, 2] = A_2^2 - 2[2, 1, 1] - 6[1, 1, 1, 1],$$

$$[2, 1, 1] = A_1 A_3 - 4[1, 1, 1, 1];$$

endlich ist $[1, 1, 1, 1] = A_4$; somit hat man nach successiver Substitution:

$$[4] = A_1^4 - 4A_1^2 A_2 + 2A_2^2 + 4A_1 A_3 - 4A_4.$$

102. Aus dem Gange des Beweises im vorhergehenden §. erhellt, dass in dem Ausdruck einer sym. Funktion U der r^{ten} Ordnung nicht mehr als die ersten r Coefficienten der Gleichung: $A_1, A_2, \ldots A_r$ eingehen können, da die folgenden $A_{r+1} \ldots$ bis A_m schon sym. Funktionen höherer Ordnungen sind.

Hieraus folgt, dass, wenn zwei Gleichungen von gleichem oder verschiedenem Grade die r ersten Coefficienten gleich haben, alle möglichen sym. Funktionen der Wurzeln von der 1sten bis einschliesslich zur r^{ten} Ordnung für beide Gleichungen einerlei Werth haben.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Summen gleichnamiger Potenzen der Wurzeln mit ganzem Exponenten (Potenzsummen), welche durch die Symbole [1], [2], [3], u. s. w. bezeichnet sind.

Jede beliebige sym. Funktion der Wurzeln lässt sich durch blosse Potenzsummen derselben ausdrücken.

Denn sei $U = [a, b, c, d, \ldots h, k]$ eine beliebige sym. Funktion der r^{ten} Ordnung, somit $a + b + c + \ldots + k = r$ und n die Anzahl der Exponenten in der Klammer, so besteht dieselbe aus Gliedern von der Form:

$$\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c \ldots . \alpha_{n-1}^h \alpha_n^k;$$

bilden wir aber das Produkt:

$$P = [a]\,[b]\,[c]\,\ldots\,[h]\,[k],$$

wo

$$[a] = \alpha_1^a + \alpha_2^a + \alpha_3^a + \ldots + \alpha_m^a$$
$$[b] = \alpha_1^b + \alpha_2^b + \alpha_3^b + \ldots + \alpha_m^b$$
$$[c] = \alpha_1^c + \alpha_2^c + \alpha_3^c + \ldots + \alpha_m^c$$

u. s. w.,

so werden, wie leicht einzusehen, in dem Produkte die Glieder

$$\alpha_1^{a+b+c+\ldots+k} = \alpha_1^r \text{ und } \alpha_1^a\,\alpha_2^b\,\alpha_3^c\ldots\alpha_n^k,$$

somit auch die entsprechenden sym. Funktionen vorkommen, so dass wir die Gleichung haben:

$$[a]\,[b]\,[c]\,\ldots\,[h]\,[k] = [r] + [a, b, c, d, \ldots h, k] + S,$$

woraus folgt:

$$U = [a, b, c, d, \ldots h, k] = [a]\,[b]\,[c]\,\ldots\,[h]\,[k] - [r] - S,$$

wo S ein Aggregat von anderen sym. Funktionen derselben Ordnung ist, auf welche nun dasselbe Verfahren wieder angewendet werden kann.

Beispiel. Es ist die Funktion $[3, 2, 1]$ durch Potenzsummen auszudrücken. Zu diesem Zwecke entwickeln wir das Produkt:

$$[3]\,[2]\,[1] = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$$
$$= \alpha_1^6 + \alpha_1^5\alpha_2 + \alpha_1^4\alpha_2^2 + \alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 + \ldots \text{ u. s. w.},$$

und haben somit, da Glieder einer anderen Form nicht entstehen können, jedes Glied von der Form $\alpha_1^3\alpha_2^3$ aber sich zweimal bildet:

$$[3]\,[2]\,[1] = [6] + [5, 1] + [4, 2] + 2[3, 3] + [3, 2, 1],$$

woraus:

$$[3, 2, 1] = [3]\,[2]\,[1] - [6] - [5, 1] - [4, 2] - 2[3, 3] \quad (m)$$

folgt. Ferner ist:

$$[5]\,[1] = (\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \ldots)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots) = \alpha_1^6 + \alpha_1^5\alpha_2 + \ldots$$
$$= [6] + [5, 1],$$

somit: $[5, 1] = [5]\,[1] - [6]$;

$$[4]\,[2] = (\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \ldots)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots) = \alpha_1^6 + \alpha_1^4\alpha_2^2 + \ldots$$
$$= [6] + [4, 2],$$

somit: $[4, 2] = [4]\,[2] - [6]$;

$$[3]\,[3] = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots)^2 = \alpha_1^6 + \ldots + 2\alpha_1^3\alpha_2^3 + \ldots =$$
$$= [6] + 2[3, 3],$$

somit: $2[3, 3] = [3]\,[3] - [6]$;

folglich, wenn man in (m) substituirt:

$$[3, 2, 1] = [3][2][1] - [5][1] - [4][2] - [3]^2 + 2[6].$$

Der folgende §. wird uns die Mittel liefern, die Potenz-Summen der Wurzeln mit Leichtigkeit zu berechnen.

103. Multipliciren wir die Gleichung:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0. \quad (1)$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ sein mögen, mit x^r, so erhalten wir:

$$A_0 x^{m+r} + A_1 x^{m+r-1} + A_2 x^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} x^{r+1} + A_m x^r = 0. \quad (2)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung werden dieselben sein, wie jene der Gl. (1); durch Substitution derselben in (2) erhalten wir daher die identischen Gleichungen:

$$A_0 \alpha_1^{m+r} + A_1 \alpha_1^{m+r-1} + A_2 \alpha_1^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha_1^{r+1} + A_m \alpha_1^r = 0,$$

$$A_0 \alpha_2^{m+r} + A_1 \alpha_2^{m+r-1} + A_2 \alpha_2^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha_2^{r+1} + A_m \alpha_2^r = 0,$$

. . . .

$$A_0 \alpha_m^{m+r} + A_1 \alpha_m^{m+r-1} + A_2 \alpha_m^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha_m^{r+1} + A_m \alpha_m^r = 0,$$

durch deren Addition sich folgende Gleichung ergibt:

$$A_0 [m+r] + A_1 [m+r-1] + A_2 [m+r-2] + \ldots + A_{m-1} [r+1] + \\ + A_m [r] = 0, \quad (I)$$

welche sofort in rekurrirender Form die sym. Funktion $[m+r]$, d. i. die Summe der $(m+r)^{ten}$ Potenzen der Wurzeln darbietet, wenn die Werthe der niedrigeren Potenzsummen bis zur r^{ten} herunter gegeben sind.

Setzt man in (I) $r = 0$, so erhält man, da

$$[0] = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 + \ldots + \alpha_m^0 = m$$

ist:

$$A_0 [m] + A_1 [m-1] + A_2 [m-2] + A_3 [m-3] + \ldots + \\ + A_{m-1} [1] + m A_m = 0. \quad (II)$$

Diese Gleichung liefert $[m]$, d. i. die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gl. (1) vom m^{ten} Grade, wenn die niedrigeren Potenzsummen gegeben sind, so dass es also nur noch auf diese ankommt.

Setzt man nun in (II) der Reihe nach $m = 2, 3, 4, \ldots$ so ergeben sich Ausdrücke, welche der Reihe nach die Summen der 2ten, 3ten, 4ten . . . Potenzen der Wurzeln von Gleichungen beziehungsweise des 2ten, 3ten, 4ten . . . Grades darstellen, deren Coefficienten, vom ersten angefangen, der Reihe nach mit jenen der Gl. (1) übereinstimmen, welche Ausdrücke aber nach dem im Eingange des vorigen §. Gesagten auch allgemein für die Gl. (1) gelten müssen. Substituiren wir also in (II) der Reihe nach $1, 2, 3, 4, \ldots m$ statt m, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}A_0[1]+A_1=0,\\ A_0[2]+A_1[1]+2A_2=0,\\ A_0[3]+A_1[2]+A_2[1]+3A_3=0,\\ A_0[4]+A_1[3]+A_2[2]+A_3[1]+4A_4=0,\\ \qquad\qquad\text{u. s. w.}\\ A_0[m]+A_1[m-1]+A_2[m-2]+\ldots+A_{m-1}[1]+mA_m=0,\end{array}\right\}\text{(III)}$$

aus welchen Gleichungen die Funktionen [1], [2], [3] u. s. w. successive berechnet werden können. An die letzte derselben schliesst sich unmittelbar die Gl. (I) an, wenn in derselben für r der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... gesetzt werden. Die Formeln (III) sind unter dem Namen des Newton'schen Satzes bekannt.

104. Lassen wir die Coefficienten der Gleichung:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0 \qquad (1)$$

in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen, so sind nach §. 99 die Wurzeln der neuen Gleichung:

$$A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+A_{m-2}x^{n-2}+\ldots+A_1x+A_0=0 \quad (2)$$

die reciproken Werthe der Wurzeln der Gl. (1), d. i.

$$\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{1}{\alpha_2},\ \frac{1}{\alpha_3},\ \ldots \frac{1}{\alpha_m},$$

oder auch:

$$\alpha_1^{-1},\ \alpha_2^{-1},\ \alpha_3^{-1},\ \ldots\ \alpha_m^{-1}.$$

Wendet man daher die Formeln des vorigen §. auf die Gl. (2) an, so geben dieselben unmittelbar die Summen der reciproken Potenzen, oder der Potenzen mit negativen ganzen Exponenten der Wurzeln der Gl. (1). Bezeichnet man diese daher mit:

$$[-1]=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\alpha_3^{-1}+ \\ +\ldots+\alpha_m^{-1},$$

$$[-2]=\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\frac{1}{\alpha_3^2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m^2}=\alpha_1^{-2}+\alpha_2^{-2}+\alpha_3^{-2}+ \\ +\ldots+\alpha_m^{-2},\ \text{u. s. w.},$$

so gehen die Formeln (III) und (I) in folgende über:

$$A_m[-1]+A_{m-1}=0,$$
$$A_m[-2]+A_{m-1}[-1]+2A_{m-2}=0,$$
$$A_m[-3]+A_{m-1}[-2]+A_{m-2}[-1]+3A_{m-3}=0,$$

u. s. w.

$$A_m[-m] + A_{m-1}[-(m-1)] + A_{m-2}[-(m-2)] + \ldots\ldots +$$
$$+ A_1[-1] + mA_0 = 0,$$
$$A_m[-(m+r)] + A_{m-1}[-(m+r-1)] + A_{m-2}[-(m+r-2] +$$
$$+ \ldots + A_1[-(r+1)] + A_0[-r] = 0,$$

welche zur Berechnung der Werthe der Summen der reciproken Potenzen der Wurzeln der Gl. (1) dienen.

V. AUFLÖSUNG DER ALLGEMEINEN GLEICHUNGEN DES DRITTEN UND VIERTEN GRADES, DER RECIPROKEN UND BINOMISCHEN GLEICHUNGEN.

105. Unter allgemeinen Gleichungen verstehen wir solche, deren Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ allgemeine, durch Buchstaben vorgestellte Zahlengrössen sind. Die Wurzeln derselben sind nothwendig Funktionen der Coefficienten und es besteht das Problem der Auflösung einer solchen Gleichung in der Herstellung eines geschlossenen Ausdruckes von der Form:

$$x = f(A_1, A_2, A_3, \ldots A_m),$$

welcher jede der m Wurzeln aus den Coefficienten finden lässt. Da man aber im Allgemeinen nicht angeben kann, welche von den m Wurzeln man haben will, so muss obiger Ausdruck nothwendig die Eigenschaft haben, sämmtliche Wurzeln zu liefern, wozu erfordert wird, dass dieser Ausdruck m verschiedener Werthe fähig sei. Ein Beispiel hiezu gibt uns die schon aus den Elementen bekannte Gleichung des 2ten Grades: $x^2 + A_1 x + A_2 = 0$, für welche man:

$$x = -\frac{A_1}{2} + \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

findet, ein Ausdruck, welcher, da jede Quadratwurzel sowohl positiv als negativ genommen werden kann, sofort beide Wurzeln der Gleichung darbietet. Solche Wurzelformen lassen sich jedoch, nach **Ruffini's** und **Abel's** Untersuchungen, nur noch für allgemeine Gleichungen des 3ten und 4ten Grades aufstellen; allgemeine Gleichungen, welche den 4ten Grad übersteigen, gestatten nur in besonderen Fällen eine weitere Behandlung, wo schon aus dem Baue der Gleichung ein Schluss auf die Natur der Wurzeln gezogen werden kann, wie z. B. bei den reciproken, binomischen, trinomischen und einigen anderen Gleichungen

a) Gleichungen des dritten Grades.

106. Jede Gleichung vom dritten Grade (*cubische* Gl.) hat, gehörig geordnet, die Form:

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0 \tag{1}$$

und lässt sich durch Wegschaffung des zweiten Gliedes, indem man:

$$x = y - \tfrac{1}{3} A_1$$

setzt, auf die Form:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

bringen; die Wurzeln dieser Gleichung, jede um $\frac{1}{3} A_1$ vermindert, sind sofort die Wurzeln der Gl. (1).

Um die Gl. (2) aufzulösen, setzen wir $y = u + v$, wo u und v noch unbestimmte Grössen bedeuten. Man hat nun:

$$y^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3,$$

oder, wenn man statt $u + v$ wieder y schreibt:

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0, \tag{3}$$

eine Gleichung, welche mit (2) von gleicher Form und von welcher eine Wurzel $= u + v$ bekannt ist. Bestimmen wir nun, was immer möglich, die Grössen u und v so, dass (3) mit (2) identisch wird, so haben wir hiemit auch eine Wurzel der Gl. (2). Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q;$$

aus der ersten dieser Gleichungen folgt $v = -\frac{p}{3u}$, welcher Werth in die zweite substituirt, die Gleichung:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

liefert. Diese Gleichung vom 6ten Grade lässt sich aber nach Art der quadratischen Gleichungen auflösen und gibt zunächst:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

woraus:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

folgt. Substituirt man ferner diesen Werth von u in die Gleichung $v^3 = -q - u^3$, so kommt:

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf die Gl. $y = u + v$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4}$$

eine Wurzel der Gl. (2), wo wir von den doppelten Zeichen nur die oberen beibehalten haben, da die unteren dasselbe Resultat geben. Dieser Ausdruck, welcher unter dem Namen der **Cardan'schen Formel** bekannt ist, liefert aber in Folge der Vieldeutigkeit der darin enthaltenen Cubikwurzeln **sämmtliche drei** Wurzeln der Gl. (2), wie sogleich gezeigt werden soll. Setzt man:

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=A, \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=B,$$

so hat man $y=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$. Nun ist aber, wenn man Kürze halber

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha, \text{ folglich } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha^2$$

setzt, und die arithmetischen Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ mit a und b bezeichnet, bekanntlich [§. 54 und 55]:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{A} &= a, & \sqrt[3]{B} &= b, \\ &= \alpha a, & &= \alpha b, \\ &= \alpha^2 a, & &= \alpha^2 b, \end{aligned}$$

so dass sich also durch Combination dieser Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ neun Werthe für y ergeben, von welchen jedoch nur jene Wurzeln der Gl. (2) sind, für welche das Produkt $uv=\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$ reell wird, wie es obige Gleichung $3uv=-p$ verlangt. Berücksichtiget man daher, dass α und α^2 imaginär sind, $\alpha^3=-1$ aber reell, so erhält man für die drei Wurzeln der Gl. (2) folgende Werthe:

$$y_1=a+b; \quad y_2=\alpha a+\alpha^2 b; \quad y_3=\alpha^2 a+\alpha b. \tag{5}$$

107. Um die Beschaffenheit dieser drei Wurzeln kennen zu lernen, müssen wir drei Fälle unterscheiden.

1) Ist $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ also **positiv**, so sind A und B, also auch a und b reelle Grössen; die Gl. (2) hat daher, wie aus (5) zu ersehen, in diesem Falle **eine** reelle und **zwei** imaginäre Wurzeln.

2) Ist $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, so wird $A=B=-\frac{1}{2}q$, $a=b=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, somit:

$$y_1=-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}, \quad y_2=y_3=-(\alpha+\alpha^2)\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}=+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q};$$

in diesem Falle sind daher alle drei Wurzeln reell und zwei davon einander gleich, deren Zeichen mit dem Zeichen von q übereinstimmt, und jenem der dritten Wurzel entgegengesetzt ist.

3) Ist $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, also **negativ**, so werden A und B, somit auch a und b imaginär und es erscheinen daher sämmtliche Wurzeln unter imaginärer Form; da jedoch die Gleichung, weil von ungerader Ordnung, eine reelle Wurzel haben muss, so müssen sich wenigstens in einer der Wurzeln die imaginären Bestandtheile aufheben; es lässt sich aber leicht zeigen, dass in diesem Falle alle drei Wurzeln reell sind.

Es sei nämlich $y_1 = w$ die in diesem Falle nothwendig existirende eine reelle Wurzel, so ist die Gl. (2) durch $y - w$ theilbar und der Quotient $= 0$ gesetzt, liefert die zwei anderen Wurzeln. Man erhält aber als Quotienten $y^2+yw+p+w^2$, und somit aus der Gleichung:

$$y^2+yw+p+w^2=0:$$

$$y_2=-\tfrac{1}{2}w+\sqrt{-\tfrac{3}{4}w^2-p},\quad y_3=-\tfrac{1}{2}w-\sqrt{-\tfrac{3}{4}w^2-p},$$

oder, wenn man Kürze halber $-\frac{3}{4}w^2-p=k$ setzt:

$$y_2=-\tfrac{1}{2}w+\sqrt{k},\quad y_3=-\tfrac{1}{2}w-\sqrt{k},$$

wo sich nun leicht zeigen lässt, dass k eine positive Grösse ist und daher auch diese beiden Wurzeln reell sind. Denn da w eine Wurzel der Gl. (2) ist, so hat man $w^3+pw+q=0$, woraus $q=-w^3-pw$, oder, weil $p=-\frac{3}{4}w^2-k$ ist, $q=-\frac{1}{4}w^3+wk$ folgt. Mit diesen beiden Werthen von p und q wird nun:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\tfrac{3}{4}k\left\{\tfrac{1}{4}w^4-\tfrac{2}{9}w^2k+\tfrac{4}{81}k^2\right\}=-\tfrac{3}{4}k\left\{\tfrac{1}{2}w^2-\tfrac{2}{9}k\right\}^2.$$

Hieraus folgt, dass, da der Faktor $\left\{\frac{1}{2}w^2-\frac{2}{9}k\right\}^2$ wesentlich positiv ist, das Zeichen von k jenem der Grösse $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ entgegengesetzt und folglich positiv ist, wenn, wie im jetzigen Falle, die Grösse $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ einen negativen Werth hat.

Es sind also alle drei Wurzeln reell und die Cardan'sche Formel, welche sie in imaginärer Form gibt, wird in diesem Falle (dem **casus irreducibilis** der älteren Algebraisten) zur Berechnung derselben unbrauchbar. Selbst im ersten Falle ist ihre Anwendung zur Berechnung [der] reellen Wurzel, der mühsamen Wurzelausziehungen wegen, höchst [un]bequem. Durch Einführung von trigonometrischen Funktionen lässt [sic]h derselben eine zur Rechnung bequemere Gestalt geben, wobei wir [nu]r den 1ten und 3ten Fall zu betrachten haben, weil im 2ten die Wurzeln [sch]on unter sehr einfacher Form erscheinen. Da, wie leicht einzusehen, [bei] positivem p immer der erste Fall, bei negativem aber der 1ste oder

3te Platz greift, je nachdem der Zahlenwerth von $\frac{p^3}{27} < $ oder $> \frac{q^2}{4}$ ist, so wollen wir im Folgenden nach dem Zeichen von p unterscheiden.

108. I. p positiv. Bringen wir den Ausdruck (4) auf die Form:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}}, \tag{6}$$

und setzen wir, da die Grösse $\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}$ jedes positiven Werthes fähig ist:

$$\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = \operatorname{tg}\varphi^2, \text{ also } \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}, \tag{7}$$

so erhalten wir aus (6), wenn wir zugleich für $\frac{q}{2}$ den aus (7) folgenden Werth: $\operatorname{cotg}\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ einführen und beachten, dass $\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$ ist:

$$y_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}\right],$$

somit, wenn wir noch:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi \tag{8}$$

setzen:

$$y_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{tg}\psi - \operatorname{cotg}\psi\right] = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\sin\psi^2 - \cos\psi^2}{\sin\psi\cos\psi}\right] =$$

$$= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{\cos 2\psi}{\sin 2\psi},$$

d. i.

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg}2\psi. \tag{9}$$

Hat man daher aus (7) und (8) die beiden Hilfswinkel φ und ψ berechnet, welche immer im ersten Quadranten genommen werden, posi oder negativ, je nachdem q positiv oder negativ ist, so findet m aus (9) die reelle Wurzel der Gl. (2); die zwei anderen sind in diese Falle imaginär, und da jetzt:

$$a = \sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tg}\psi, \quad b = \quad \sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg}\psi$$

ist, so findet man für dieselben nach Gl. (5) die Werthe:

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,[\operatorname{cotg} 2\psi \pm \operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-3}] =$$

$$= -\tfrac{1}{2} y_1 \pm \sqrt{p}.\operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-1}. \qquad (9^*)$$

II. p negativ und $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$.

Die Gl. (2) hat jetzt, wenn p den Zahlenwerth des Coefficienten von y bezeichnet, die Form:

$$y^3 - py + q = 0,$$

und es ist:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}};$$

aus der Relation $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$ folgt aber $\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} < 1$; setzen wir also:

$$\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = \sin\varphi^2, \text{ also } \sin\varphi = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}, \qquad (10)$$

wo der Bogen φ im ersten Quadranten genommen wird und das Zeichen von q erhält, so wird, wenn wir noch für $\frac{q}{2}$ den aus (10) folgenden Werth:

$$\frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

einführen:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} + \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}\right].$$

Setzt man noch:

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}, \qquad (11)$$

so kommt:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,[\operatorname{tg}\psi + \operatorname{cotg}\psi] = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi\cos\psi}\right],$$

d. i.

$$y_1 = -2\operatorname{cosec} 2\psi\sqrt{\frac{p}{3}}. \qquad (12)$$

Für die beiden imaginären Wurzeln findet man:

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,[\operatorname{cosec} 2\psi \pm \operatorname{cotg} 2\psi \sqrt{-3}] = -\tfrac{1}{2} y_1 \pm \sqrt{p}\,.\operatorname{cotg} 2\psi \sqrt{-1}.$$

III. Sei endlich p negativ und $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, welche Annahme dem irreduciblen Falle entspricht; lassen wir wieder p den Zahlenwerth des Coefficienten der ersten Potenz von y in Gl. (2) sein, wodurch dieselbe wie in II. die Form:

$$y^3 - py + q = 0$$

erhält, so können wir den Ausdruck (4) auf die Form bringen:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27}{4}\frac{q^2}{p^3} - 1}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27}{4}\frac{q^2}{p^3} - 1}}.$$

Da jetzt $\frac{27}{4} \cdot \frac{q^2}{p^3} < 1$, so setze man:

$$\frac{27}{4} \cdot \frac{q^2}{p^3} = \cos \varphi^2, \text{ also } \cos \varphi = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}, \tag{13}$$

wodurch $\frac{q}{2} = \cos \varphi \sqrt{\frac{p^3}{27}}$ wird, und der Ausdruck von y in folgenden:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi\right)^{\frac{1}{3}}$$

übergeht. Wendet man hierauf die Moivre'sche Binomialformel an [§. 52. Gl. 3], so kommt:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos \tfrac{1}{3}(\varphi + 2r\pi) - \sqrt{-1} \sin \tfrac{1}{3}(\varphi + 2r\pi)\right]$$
$$-\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos \tfrac{1}{3}(\varphi + 2r\pi) + \sqrt{-1} \sin \tfrac{1}{3}(\varphi + 2r\pi)\right],$$

d. i. nach Aufhebung der imaginären Glieder:

$$y = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \tfrac{1}{3}(\varphi + 2r\pi),$$

wo r eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man erhält aber sämmtliche verschiedene Werthe, deren dieser Ausdruck fähig ist, wenn man für r: 0, + 1, − 1 substituirt, und hat daher für die drei Wurzeln der Gleichung folgende Werthe:

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^0\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 120^0\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^0\right),$$

welche demnach, wie schon oben gezeigt wurde, sämmtlich reell si

Beispiele. 1. Die gegebene Gleichung sei: $y^3 + 2y - 5 = 0$, so ist $p = +2$ also positiv und die Rechnung steht nach den Formeln (7), (8), (9) in I. so:

$$\begin{aligned}
\log p &= 0{,}3010300 \\
\log 3 &= 0{,}4771213 \\
\log \tfrac{1}{3}p &= 9{,}8239087 \\
\log \sqrt{\tfrac{1}{3}p} &= 9{,}9119543 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\text{Cpl.} \log q &= 9{,}3010300\, n \\
\log \operatorname{tg} \varphi &= 9{,}3379230\, n \\
\varphi &= -12^0\, 17'\, 0'',36 \\
\tfrac{1}{2}\varphi &= -\ \ 6\ \ \ 8\ \ 30,18 \\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}0318351\, n \\
\log \operatorname{tg} \vartheta &= 9{,}6772784\, n \\
\vartheta &= -25^0\, 26'\, 15'',47 \\
2\vartheta &= -\ 50\ \ 52\ \ 30,94 \\
\lg \operatorname{cotg} 2\vartheta &= 9{,}9103016\, n \\
\log \sqrt{\tfrac{1}{3}p} &= 9{,}9119543 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log(-y_1) &= 0{,}1232859\, n \\
y_1 &= +1{,}328269
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der imaginären Wurzeln hat man:

$$\begin{aligned}
\log p &= 0{,}3010300 \\
\log \sqrt{p} &= 0{,}1505150 \\
\log \operatorname{cosec} 2\vartheta &= 0{,}1102648\, n \\
\log \sqrt{p} \operatorname{cosec} 2\vartheta &= 0{,}2607798\, n
\end{aligned}$$

somit nach (9*):

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = -0{,}664134 \pm 1{,}822971 \sqrt{-1}$$

2) Es sei die Gleichung: $x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ gegeben; setzt man, um das 2te Glied wegzuschaffen, $x = y + \frac{4}{3}$, so erhält man als transformirte Gleichung:

$$y^3 - \frac{22}{3}\, y - \frac{92}{27} = 0;$$

da der Coefficient von y negativ, und

$$\frac{q^2}{4} = \left(\frac{46}{27}\right)^2 < \frac{p^3}{27} = \left(\frac{22}{9}\right)^3,$$

so findet hier der dritte Fall statt und die Rechnung ist folgende:

$$\log \tfrac{1}{3} p = 0{,}3881802 \qquad \log 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0{,}4951201$$
$$\log \sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0{,}1940901 \qquad \log\cos\tfrac{1}{3}\varphi = 9{,}8915765$$
$$\log (\sqrt{\tfrac{1}{3}p})^3 = 0{,}5822703 \qquad \log\cos(\tfrac{1}{3}\varphi - 60^0) = 9{,}9696387$$
$$\log \tfrac{1}{2} q = 0{,}2313940\, n \qquad \log\cos(\tfrac{1}{3}\varphi + 60^0) = 9{,}1858484\, n$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}6491237\, n \qquad \log(-y_1) = 0{,}3866966$$
$$\varphi = 116^0\, 28'\, 24'',44 \qquad \log y_2 = 0{,}4647588$$
$$\tfrac{1}{3}\varphi = 38\;\; 49\;\; 28,\; 15 \qquad \log y_3 = 9{,}6809685\, n$$
$$\tfrac{1}{3}\varphi - 60^0 = -21\;\; 10\;\; 31.\; 85$$
$$\tfrac{1}{3}\varphi + 60^0 = 98\;\; 49\;\; 28,\; 15$$

$$y_1 = -2{,}436108 \qquad \text{endlich wegen} \qquad x_1 = -1{,}102775$$
$$y_2 = +2{,}915807 \qquad x = y + \tfrac{4}{3}: \qquad x_2 = +4{,}249140$$
$$y_3 = -0{,}479699 \qquad\qquad x_3 = +0{,}853634.$$

b) Gleichungen des vierten Grades.

109. Zum Behufe der Auflösung der Gleichung des vierten Grades:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

schaffe man zuerst mittelst der Substitution $x = y - \frac{1}{4}a$ das zweite Glied weg, wodurch man eine Gleichung von der Form:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{1}$$

erhält, deren Wurzeln, um $\frac{1}{4}a$ vermindert, die Wurzeln obiger Gleichung geben. Man setze nun nach Euler's Vorgange:

$$y = t + u + v, \tag{2}$$

so wird $y^2 = t^2 + u^2 + v^2 + 2\,(tu + tv + uv)$, und wenn man nochmals quadrirt:

$$y^4 = (t^2 + u^2 + v^2)^2 + 4\,(t^2 + u^2 + v^2)\,(tu + tv + uv) + \\ + 4\,(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) + 8tuv\,(t + u + v);$$

substituirt man diese Werthe von y^2 und y^4 in (1), so kommt:

$$\left.\begin{array}{l}(t^2 + u^2 + v^2)^2 + 4\,(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) + p\,(t^2 + u^2 + v^2) + r \\ \quad + [4\,(t^2 + u^2 + v^2) + 2p]\,(tu + tv + uv) \\ \quad + (8tuv + q)\,(t + u + v)\end{array}\right\} = 0. \tag{3}$$

Da die drei noch unbestimmten Grössen t, u, v erst an eine in (2) ausgesprochene Bedingung gebunden sind, so ist es gestattet, deren noch zwei aufzustellen, wofür wir folgende:

$$4\,(t^2 + u^2 + v^2) + 2p = 0, \qquad 8tuv + q = 0$$

wählen, aus welchen Gleichungen sofort:

$$t^2 + u^2 + v^2 = -\frac{p}{2} \ldots (4), \qquad t^2 u^2 v^2 = \frac{q^2}{64} \ldots (5)$$

folgt; hiedurch geht (3) über in:

$$\frac{p^2}{4} + 4(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) - \frac{p^2}{2} + r = 0,$$

woraus man:

$$t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \qquad (6)$$

findet. In Folge der Gleichungen (4), (5), (6) sind nun [§. 92] die Grössen t^2, u^2, v^2 die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0, \qquad (7)$$

welche nach dem vorigen §. aufgelöst werden kann. Findet man z_1, z_2, z_3 als Wurzeln derselben, so ist:

$$t = \pm \sqrt{z_1}, \quad u = \pm \sqrt{z_2}, \quad v = \pm \sqrt{z_3},$$

und somit:

$$y = \pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}.$$

Macht man nun alle möglichen Combinationen der Zeichen, so erhält man folgende 8 Werthe für y:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ y_2 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ y_3 &= +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ y_4 &= +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \end{aligned}\right\} (8) \qquad \left.\begin{aligned} y_5 &= +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ y_6 &= +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ y_7 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ y_8 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \end{aligned}\right\} (9)$$

welche zu je vieren in zwei Partien so zusammengestellt sind, dass das Produkt tuv in jeder Partie dasselbe Zeichen erhält, wie es die oben aufgestellte Bedingungsgleichung: $8\,tuv = -q$ verlangt, welche zeigt, dass das Produkt tuv negativ sein muss, wenn in (1) q positiv ist, und umgekehrt. Das System (8) stellt daher die 4 Wurzeln der Gl. (1) dar, während das System (9) die Wurzeln der Gleichung:

$$y^4 + py^2 - qy + r = 0$$

enthält. Dass wir hier die Wurzeln dieser beiden Gleichungen zugleich alten, hat darin seinen Grund, dass beiden Gleichungen dieselbe ucirte Gleichung (7) zugehört, da diese nur das Quadrat von q hält.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 72x + 40 = 0. \qquad (a)$$

Durch Wegschaffung des zweiten Gliedes, mittelst der Substitution: $x = y - 3$ ergibt sich die Gleichung:

$$y^4 - 9y^2 + 18y - 14 = 0; \qquad (b)$$

es ist also $p = -9$, $q = +18$, $r = -14$, mit welchen Werthen die cubische Gleichung (7) (die sogenannte Resolvente) folgende wird:

$$z^3 - \tfrac{9}{2} z^2 + \tfrac{137}{16} z - \tfrac{81}{16} = 0.$$

Schaffen wir aus dieser Gleichung, $z = \xi + \frac{3}{2}$ setzend, das zweite Glied weg, so erhalten wir:

$$\xi^3 + \tfrac{29}{16}\xi + \tfrac{33}{32} = 0,$$

eine Gleichung, welche, nach §. 108, I. aufgelöst, die Wurzeln:

$$\xi_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \xi_2 = \tfrac{1}{4} + \sqrt{-2}, \quad \xi_3 = \tfrac{1}{4} - \sqrt{-2}$$

darbietet. Hiemit werden die Wurzeln der Resolvente:

$$z_1 = +1, \quad z_2 = \tfrac{7}{4} + \sqrt{-2}, \quad z_3 = \tfrac{7}{4} - \sqrt{-2},$$

und mit diesen die Wurzeln der Gl. (b) (nach dem Schema (8), weil q positiv ist):

$$y_1 = -1 - \sqrt{\tfrac{7}{4} + \sqrt{-2}} - \sqrt{\tfrac{7}{4} - \sqrt{-2}},$$
$$y_2 = -1 + \sqrt{\tfrac{7}{4} + \sqrt{-2}} + \sqrt{\tfrac{7}{4} - \sqrt{-2}},$$
$$y_3 = +1 - \sqrt{\tfrac{7}{4} + \sqrt{-2}} + \sqrt{\tfrac{7}{4} - \sqrt{-2}},$$
$$y_4 = +1 + \sqrt{\tfrac{7}{4} + \sqrt{-2}} - \sqrt{\tfrac{7}{4} - \sqrt{-2}}.$$

Diese Werthe, um 3 vermindert, sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Beachtet man noch, dass nach einem bekannten Satze der Algebra*) die hier erscheinende Wurzelgrösse:

$$\sqrt{\tfrac{7}{4} \pm \sqrt{-2}} = \sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$

ist, so erhält man schliesslich als Wurzeln der Gl. (a):

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2}, \quad x_3 = -2 - \sqrt{-1},$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2}, \quad x_4 = -2 + \sqrt{-1},$$

110. Zu einer in mancher Beziehung etwas bequemeren numerischen Rechnung führt der schon von Cartesius eingeschlagene Weg, das Gleichungspolynom in zwei Faktoren des 2ten Grades zu zerlegen; es ergibt sich hiedurch folgende Auflösung, wobei wir der Darstellung Prof. Dr. J. Kolbe's folgen.

---

*) Es ist nämlich:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

mit:

$$-r_1, \quad -r_2, \quad -\varrho_1, \quad -\varrho_2,$$

so ist:

$$f(x) = (x + r_1)(x + r_2)(x + \varrho_1)(x + \varrho_2) = 0,$$

oder:

$$f(x) = [x^2 + (r_1 + r_2)x + r_1 r_2][x^2 + (\varrho_1 + \varrho_2)x + \varrho_1\varrho_2]; \tag{2}$$

setzt man also:

$$r_1 + r_2 = s, \quad r_1 r_2 = p, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = \sigma, \quad \varrho_1\varrho_2 = \pi, \tag{3}$$

so ist die Gl. (1) aufgelöst, sobald man s, p, σ, π kennt; denn es erübrigt sodann nur noch die Auflösung der beiden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 + sx + p = 0, \quad x^2 + \sigma x + \pi = 0, \tag{4}$$

von welchen die 1te die beiden Wurzeln $x_1 = -r_1$, $x_2 = -r_2$, die 2te die Wurzeln $x_1 = -\varrho_1, x_2 = -\varrho_2$ darbietet.

Aus der Gl. (2) folgt aber:

$$x^4 + (s + \sigma)x^3 + (s\sigma + p + \pi)x^2 + (s\pi + \sigma p)x + p\pi = 0,$$

und da diese Gleichung mit (1) identisch sein muss, so haben wir zur Ermittelung der Unbekannten s, σ, p, π folgende vier Gleichungen:

$$s + \sigma = a \tag{5}$$

$$s\sigma + p + \pi = b \tag{6}$$

$$s\pi + \sigma p = c \tag{7}$$

$$p\pi = d, \tag{8}$$

bei deren Auflösung wir uns von folgenden Bemerkungen leiten lassen:

a) Gibt man einer beliebigen der vier Unbekannten s, p, σ, π einen bestimmten Werth, so sind jedesmal die drei übrigen Unbekannten durch lineare Gleichungen eindeutig und vollkommen bestimmt.

b) Da man die vier einfachen Wurzel-Faktoren von $f(x)$ in sechs verschiedenen Ordnungen gruppiren kann, so muss jede der vier Unbekannten für sich im Allgemeinen sechs verschiedener Werthe fähig sein; so hat z. B. p die sechs Werthe:

$$r_1 r_2, \quad r_1\varrho_1, \quad r_1\varrho_2, \quad r_2\varrho_1, \quad r_2\varrho_2, \quad \varrho_1\varrho_2,$$

und jedem derselben entspricht je ein Werth von s, σ und π.

c) Hingegen kommen dem Ausdrucke $s\sigma$, den wir der Kürze wegen mit u bezeichnen wollen, nur die drei folgenden Werthe:

$$(r_1 + r_2)(\varrho_1 + \varrho_2), \quad (r_1 + \varrho_1)(r_2 + \varrho_2), \quad (r_1 + \varrho_2)(r_2 + \varrho_1)$$

zu, und eben so ist der Ausdruck $p + \pi$, welcher mit v bezeichnet werden mag, nur nachstehender drei Werthe fähig:

$$r_1 r_2 + \varrho_1 \varrho_2, \quad r_1 \varrho_1 + r_2 \varrho_2, \quad r_1 \varrho_2 + r_2 \varrho_1.$$

Gelingt es daher, die vier Gleichungen (5) bis (8) so zu verbinden, dass die resultirende Gleichung nur $s\sigma = u$ oder nur $p + \pi = v$ als Unbekannte enthält, so kann diese Gleichung nur vom 3ten Grade sein und daher aufgelöst werden. Mit jedem aus dieser Gleichung gezogenen Werthe von u oder v erhalten wir sodann für jede Unbekannte zwei Werthe, mithin mit den drei Werthen von u oder v, wie sie eine cubische Gleichung liefert, je sechs Werthe für jede Unbekannte.

Setzen wir also zuerst $s\sigma = u$, so folgt aus den Gleichungen:

$$p + \pi = b - u, \quad s\pi + \sigma p = c:$$

$$p = \frac{s(b - u) - c}{s - \sigma}, \quad \pi = \frac{c - \sigma(b - u)}{s - \sigma}. \tag{9}$$

Substituirt man diese Werthe in (8) und beachtet, dass $s + \sigma = a$, $(s - \sigma)^2 = (s + \sigma)^2 - 4s\sigma = a^2 - 4u$ ist, so erhält man nach leichter Reduction die cubische Gleichung:

$$u^3 - 2bu^2 + (b^2 + ac - 4d)\,u + (a^2d - abc + c^2) = 0, \tag{10}$$

deren Auflösung drei Werthe von $s\sigma = u$ liefert.

Ist irgend einer derselben $= u$ gefunden, so erhält man die beiden Grössen s und σ aus den Gleichungen:

$$s + \sigma = a, \quad s\sigma = u:$$

$$s = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4u}), \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4u}) \tag{11}$$

(oder umgekehrt), und die correspondirenden Werthe von p und π aus den Glgn. (9).

Setzen wir aber $p + \pi = v$, so erhalten wir aus den Gleichungen:

$$s + \sigma = a, \quad s\pi + \sigma p = c:$$

$$s = \frac{ap - c}{p - \pi}, \quad \sigma = \frac{c - a\pi}{p - \pi}, \tag{12}$$

welche Werthe in (6) substituirt, und mit Rücksicht, dass $(p - \pi)^2 = (p + \pi)^2 - 4p\pi = v^2 - 4d$ ist, die cubische Gleichung:

$$v^3 - bv^2 + (ac - 4d)\,v - (a^2d - 4bd + c^2) = 0 \tag{13}$$

darbieten. Mit irgend einer der drei Wurzeln derselben findet man sodann die beiden Grössen p und π aus den Gleichungen:

$$p + \pi = v, \quad p\pi = d:$$

$$p = \tfrac{1}{2}(v + \sqrt{v^2 - 4d}), \quad \pi = \tfrac{1}{2}(v - \sqrt{v^2 - 4d}) \tag{14}$$

(oder umgekehrt), und hiemit die correspondirenden Werthe von s und σ aus (12).

Sind auf diese Weise mit Hilfe der einen oder andern der beiden cubischen Gleichungen die Grössen s, σ, p, π bestimmt, so liefern die beiden quadratischen Gleichungen (4) sofort die Wurzeln der vorgelegten Gleichung (1). Es ist hiebei, wie schon bemerkt, gleichgiltig, welche von den drei Wurzeln der Gl. (10) oder (13) man wählen mag; um aber die Wurzeln der Gl. (1) sogleich in der einfachsten Form zu erhalten, wird man einen Werth von u oder v wählen, der auf reelle Werthe von s, σ, p und π führt, welche, wie aus der Bedeutung dieser Grössen erhellt, nothwendig existiren müssen. Eine leichte Ueberlegung lehrt aber, dass, wenn die Gl. (10) oder (13) nur eine reelle Wurzel zulässt, diese Wurzel die reellen Werthe für s, σ, p, π liefert; kommen aber diesen Gleichungen drei reelle Wurzeln zu, so wird von den Wurzeln der Gl. (10) die kleinste, von jenen der Gl. (13) die grösste das Verlangte leisten. Nur wenn die Gl. (1) vier reelle Wurzeln besitzt, ist die Wahl offenbar gleichgiltig und führt jeder der drei reellen Werthe von u oder v zu reellen Werthen von s, σ, p und π.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei, wie im vorigen §.:

$$x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 72x + 40 = 0.$$

Man findet:

$$u^3 - 90u^2 + 2729u - 27936 = 0,$$

und hieraus, $u = y + 30$ setzend:

$$y^3 + 29y - 66 = 0,$$

welche Gleichung nur eine reelle Wurzel $y = +2$ besitzt. Also hat auch die vorhergehende Gleichung nur die einzige reelle Wurzel $u = 32$, mit welchem Werthe aus (11): $s = 8$, $\sigma = 4$, sodann aus (9): $p = 8$, $\pi = 5$ gefunden wird. Hiemit werden die Glgn. (4):

$$x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 5 = 0,$$

deren Auflösung die 4 Wurzeln der Gl. (1), nämlich:

$$x_1 = -4 + 2\sqrt{2}, \quad x_3 = -2 + \sqrt{-1},$$
$$x_2 = -4 - 2\sqrt{2}, \quad x_4 = -2 - \sqrt{-1},$$

liefert. Benützt man aber lieber die Gl. (13), so wird diese:

$$v^3 - 45v^2 + 704v - 3744 = 0,$$

r, mittelst der Substitution: $v = z + 15$ vom 2ten Gliede befreit:

$$z^3 + 29z + 66 = 0,$$

lche Gleichung nur eine reelle Wurzel, $z = -2$ zulässt. Man hat o $v = 13$, und findet hiemit aus (14): $p = 8$, $\pi = 5$; aus (12) $= 8$, $\sigma = 4$, wie zuvor.

Wie man sieht, unterscheiden sich die beiden cubischen Gleichungen in y und z nur durch das Zeichen des letzten Gliedes ± 66, welcher Umstand nicht zufällig ist. Um nämlich aus den Resolventen (10) und (13) das 2te Glied wegzuschaffen, hat man in der ersteren $u - \frac{2}{3}b = y$, in der letzteren: $v - \frac{1}{3}b = z$ zu setzen. Vermöge der Gl. (6) ist aber: $s\sigma + p + \pi = b$, d. i. $u + v = b$, also $u - \frac{2}{3}b = -(v - \frac{1}{3}b)$ oder $y = -z$, so dass also die Wurzeln der beiden Gleichungen, welche aus den zwei Resolventen durch Wegschaffung des zweiten Gliedes entstehen, sich nur im Zeichen unterscheiden, daher auch diese Gleichungen selbst nur im Zeichen des letzten Gliedes verschieden sein können.

Aus den Glgn. (3) geht ferner hervor, dass eine blosse Aenderung der Zeichen der Wurzeln der Gl. (1) die Glgn. (10) und (13) nicht berührt.

Endlich findet man leicht, dass, wenn man die durch Wegschaffung des 2ten Gliedes aus der Euler'schen Resolvente [§. 109, Gl. (7)] entstehende Gleichung in eine andere transformirt, deren Wurzeln viermal grösser sind, die so erhaltene Gleichung identisch ist mit jener, welche aus (13) durch Befreiung vom 2ten Gliede hervorgeht.

c) Reciproke Gleichungen.

111. Gleichungen von der Form:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0, \quad (1)$$

in welchen das letzte Glied dem Coefficienten des ersten Gliedes gleich ist und je zwei vom ersten und letzten gleichweit abstehende Glieder gleiche Coefficienten haben, heissen reciproke Gleichungen. Sie haben die Eigenschaft, dass, wenn α eine Wurzel derselben ist, auch der reciproke Werth $\frac{1}{\alpha}$ eine Wurzel der Gleichung darstellt. Denn setzt man in (1) $x = \alpha$, so hat man identisch:

$$\alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots + A_2 \alpha^2 + A_1 \alpha + 1 = 0; \quad (2)$$

substituirt man aber $x = \frac{1}{\alpha}$, so erhält der erste Theil der Gleichung den Werth:

$$\frac{1}{\alpha^m} + A_1 \frac{1}{\alpha^{m-1}} + A_2 \frac{1}{\alpha^{m-2}} + \ldots + \frac{A_2}{\alpha^2} + \frac{A_1}{\alpha} + 1,$$

oder, wenn man mit α^m multiplicirt und dividirt:

$$\frac{1}{\alpha^m} (\alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots + A_2 \alpha^2 + A_1 \alpha + 1),$$

welcher in Folge von (2) ebenfalls $= 0$ ist.

Die Gleichung (1) verliert übrigens, wie leicht einzusehen, diese Eigenschaft nicht, wenn sämmtliche gleichnamige Coefficienten entgegengesetzte Zeichen haben, nur muss in diesem Falle, wenn sie von gerader Ordnung ist, das mittlere Glied fehlen, weil dasselbe sonst gleichzeitig positiv und negativ sein müsste, was ungereimt ist.

Jede reciproke Gleichung von ungerader Ordnung hat die Wurzel -1 oder $+1$, je nachdem die gleichnamigen Coefficienten mit gleichen oder entgegengesetzten Zeichen versehen sind. So haben die Gleichungen:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$$

und

$$x^5 - A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_2 x^2 - A_1 x + 1 = 0$$

die Wurzel -1; den Gleichungen:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$$

und

$$x^5 - A_1 x^4 + A_2 x^3 - A_2 x^2 + A_1 x - 1 = 0$$

entspricht hingegen die Wurzel $+1$, wie man sich durch Substitution leicht überzeugt. Jede reciproke Gl. von ungerader Ordnung ist daher durch $x + 1$ oder $x - 1$ theilbar und setzt man den Quotienten $= 0$, so hat man eine neue Gleichung von gerader Ordnung, welcher alle übrigen Wurzeln zukommen, die demnach wieder reciprok ist, und deren gleichnamige Coefficienten, wie man sich leicht überzeugt, gleiche Vorzeichen haben.

Eben so findet man leicht, dass reciproke Gleichungen gerader Ordnung, deren gleichnamige Coefficienten entgegengesetztes Zeichen haben, die Wurzeln $+1$ und -1 besitzen, und dass sie, durch $(x^2 - 1)$ dividirt, eine reciproke Gleichung gerader Ordnung mit gleich bezeichneten Gliedern geben.

Da wir also jede reciproke Gl. von ungerader Ordnung durch Division mit $x + 1$ oder $x - 1$, so wie jede reciproke Gleichung gerader Ordnung durch Division mit $x^2 - 1$ auf eine reciproke Gleichung gerader Ordnung, deren gleichnamige Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, zurückführen können, so haben wir uns nur mit letzteren zu beschäftigen. ei demnach:

$$x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0 \quad (3)$$

ine reciproke Gl. von gerader Ordnung, deren gleichnamige Coefficienten leiches Vorzeichen haben; dividirt man dieselbe durch x^m und nimmt zwei Glieder mit gleichen Coefficienten zusammen, so erhält man:

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + A_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + A_2\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots +$$

$$+ A_{m-2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + A_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_m = 0. \tag{4}$$

Man setze nun:

$$x + \frac{1}{x} = y, \tag{5}$$

so lassen sich alle Binome von der Form $x + \frac{1}{x^r}$ durch y rational ausdrücken; denn es ist:

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) y = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}},$$

folglich:

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) y - \left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right),$$

woraus zugleich erhellt, dass der Ausdruck von $x^r + \frac{1}{x^r}$ nach y vom r^{ten} Grade sein wird, da die Gl. (5) nach y vom 1sten Grade ist. Setzt man in der letzten Gleichung der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man:

für $r = 1 : x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$

- $r = 2 : x^3 + \frac{1}{x^3} = (y^2 - 2)\,y - y = y^3 - 3y,$

- $r = 3 : x^4 + \frac{1}{x^4} = (y^3 - 3y)\,y - (y^2 - 2) = y^4 - 4y^2 + 2,$

u. s. w.

Entwickelt man also diese Binome bis zu jenem:

$$x^m + \frac{1}{x^m},$$

und substituirt ihre Werthe in (4), so erhält man eine Gleichung vom m^{ten}, also halb so hohen Grade, als die gegebene Gl. (3) war. Lassen sich die m Wurzeln derselben, $y_1, y_2, \ldots y_m$ finden, so liefert für jede derselben die Gl. (5) zwei zu einander reciproke Werthe von x, nämlich:

$$x_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - 4}}, \tag{6}$$

wodurch die $2m$ Wurzeln der Gl. (3) gegeben sind.

Man kann demnach reciproke Gleichungen überhaupt bis zum 9ten Grade, und jene von gerader Ordnung, deren gleichnamige Coefficienten entgegengesetztes Zeichen haben, bis zum 10ten Grade allgemein auflösen.

Beispiel. Es sei die reciproke Gl. vom 7ten Grade gegeben:

$$x^7 - x^6 - x + 1 = 0;$$

da die mit gleichen Coefficienten versehenen Glieder gleiche Zeichen haben, so ist -1 eine Wurzel dieser Gleichung. Durch Division mit $x + 1$ erhält man:

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0, \tag{α}$$

oder durch x^3 dividirt:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0,$$

woraus, wenn $x + \frac{1}{x} = y$ gesetzt wird: $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$ folgt; dieser Gleichung entsprechen die Wurzeln:

$$y_1 = -1, \quad y_2 = +1, \quad y_3 = +2,$$

mit welchen man aus (6) folgende 6 Wurzeln der Gl. (α) erhält:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_5 = \frac{2 + 0}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{2}{-1 + \sqrt{-3}}, \quad x_4 = \frac{2}{1 + \sqrt{-3}}, \quad x_6 = \frac{2}{2 + 0} = 1.$$

d) Binomische Gleichungen.

112. Jede Gleichung von der Form:

$$x^m \pm a = 0 \tag{1}$$

heisst eine binomische Gleichung. Eine solche Gleichung lässt sich immer auf die einfachere:

$$z^m \pm 1 = 0$$

bringen, indem man $x = z\sqrt[m]{a}$ setzt, daher wir uns nur mit dieser zu beschäftigen haben. Betrachten wir zuerst die Gleichung:

$$z^m - 1 = 0, \tag{2}$$

so hat man, weil aus derselben $z = \sqrt[m]{+1}$ folgt, mit Rücksicht auf Gl. 7 §. 53, sofort:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}, \tag{3}$$

welcher Ausdruck sämmtliche m Wurzeln der Gl. (2) darstellt, wenn man darin statt k der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$ setzt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die a. a. O. entwickelten Ausdrücke (8) und (9) stellen diese Wurzeln in beiden Fällen dar.

Die, zwei conjugirten Wurzeln der Gl. (2), wie:

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} \text{ und } \cos\frac{2k\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}$$

entsprechenden Wurzelfaktoren:

$$z - \cos\frac{2k\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} \text{ und } z - \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}$$

geben, mit einander multiplicirt, das reelle Produkt:

$$z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{m} + 1, \tag{4}$$

aus welchem Ausdrucke sämmtliche quadratische Faktoren des Binoms $z^m - 1$ hervorgehen, wenn man für k obige Werthe der Reihe nach setzt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass für $k = 0$, für welchen Werth (4) in $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)(z - 1)$ übergeht, der Faktor $z - 1$ nur einmal zu setzen ist, weil die Wurzel $+1$ der Gl. (2) nur einmal zukommt, da in (3) für $k = 0$, $\sin\frac{2k\pi}{m} = 0$ wird. Aus demselben Grunde ist, wenn m gerade, aus dem für $k = \frac{m}{2}$ aus (4) entstehenden Ausdrucke $z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z + 1)$, der Faktor $(z + 1)$ nur einmal zu nehmen. Man hat daher:

Für m gerade:

$$z^m - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{m} + 1) \times \ldots$$
$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1). \tag{5}$$

Für m ungerade:

$$z^m - 1 = (z - 1)(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{m} + 1) \times \ldots$$
$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1). \tag{6}$$

113. Eben so hat man für die Gleichung:

$$z^m + 1 = 0, \tag{7}$$

wenn man beachtet, dass aus derselben $z = \sqrt[m]{-1}$ folgt, mit Rücksicht auf Gl. (11), §. 54, sogleich:

$$z = \cos\frac{2k+1}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{m}\pi, \tag{8}$$

wo für k der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2,... bis $\frac{m}{2} - 1$, oder $\frac{m-1}{2}$ zu setzen sind, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die Ausdrücke (12) und (13), §. 54, stellen in beiden Fällen die m Wurzeln der Gl. (7) entwickelt dar*).

Je zwei conjugirte Wurzelfaktoren liefern hier den reellen quadratischen Wurzelfaktor:

$$z^2 - 2z\cos\frac{2k+1}{m}\pi + 1,$$

und es ist daher für ein g e r a d e s m:

$$z^m + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(z^2 - 2z\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right), \tag{9}$$

und für ein u n g e r a d e s m: $z^m + 1 =$

$$(z+1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\ldots\times\left(z^2 - 2z\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right). \tag{10}$$

---

*) Will man den Werth von $\sqrt[m]{\pm 1}$ noch nicht als bekannt voraussetzen, so gelangt man zur Auflösung der Gleichungen $z^m \pm 1 = 0$ auf folgende Weise. Man setze:

$$z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

welche Form den unbekannten Wurzeln unserer Gleichung jedenfalls zukommen wird, und suche r und φ so zu bestimmen, dass dieser Werth von z der gegebenen Gleichung Genüge leiste. Substituirt man denselben zu diesem Ende in die Gleichung: $z^m - 1 = 0$, so erhält man:

$$r^m\cos m\varphi - 1 + \sqrt{-1}\,.\,r^m\sin m\varphi = 0,$$

welche Gleichung, da r von 0 verschieden sein muss, in folgende zwei zerfällt:

$$r^m\cos m\varphi - 1 = 0\ldots(\alpha), \qquad \sin m\varphi = 0\ldots(\beta).$$

Aus (β) folgt sogleich $m\varphi = h\pi$; berücksichtiget man jedoch, dass in Folge der Gl. (α) $\cos m\varphi$ positiv sein muss, so kann $m\varphi$ nur ein gerades

Aus den Wurzelformeln (3) und (8) der Gleichungen: $z^m \mp 1 = 0$ ersieht man, das je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln zu einander reciprok sind. Denn bezeichnet man Kürze halber den Bogen $\frac{2k\pi}{m}$ oder $\frac{2k+1}{m}\pi$ mit Θ, so sind $\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta$ und $\cos\Theta - \sqrt{-1}\sin\Theta$ zwei conjugirte Wurzeln; es ist aber nach der Moivre'schen Formel:

$$\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta = \frac{1}{(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)^{-1}} = \frac{1}{\cos\Theta - \sqrt{-1}\sin\Theta}.$$

In der That erhält man auch reciproke Gleichungen, wenn man die Gleichungen: $z^m - 1 = 0$ und $z^m + 1 = 0$ durch ihre reellen Wurzelfaktoren $z^2 - 1$, oder $z - 1$, oder $z + 1$ dividirt.

Die Ergebnisse dieser beiden §§. lassen sich leicht auf die allgemeinere Gleichung (1) übertragen, indem man allenthalben $z\sqrt[m]{a}$ an die Stelle von z setzt.

Auch sieht man sofort, dass die vorhergehenden Lehren die Mittel liefern, Gleichungen von der Form:

$$x^{4m} + ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + d = 0$$

allgemein aufzulösen.

VI. AUFLÖSUNG DER NUMERISCHEN GLEICHUNGEN.

114. Sind die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ einer Gleichung:

$$f(x) = x^n + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

in bestimmten Zahlen gegeben, so heisst die Gleichung eine numerische oder Zahlengleichung. Das Problem der Auflösung dieser Gleichungen ist von jenem der Auflösung allgemeiner Gleichungen wesentlich verschieden. Bei letzteren ist man darauf angewiesen, Formeln zu suchen, welche die Wurzeln der Gleichung als Funktionen der Coefficienten geben; ist es aber gelungen, auf diesem Wege eine Wurzel zu finden, so sind damit auch alle gefunden; denn da wir kein Mittel besitzen,

---

Vielfaches von π sein; wir haben daher $m\varphi = 2k\pi$, und hiemit aus (α), $r = 1$, somit:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m},$$

welcher Ausdruck sofort die m Wurzeln der Gl. $z^m - 1 = 0$ darbietet, wenn man darin der Reihe nach $m = 0, 1, 2, \ldots m-1$ setzt und aus den in §. 53 angeführten Gründen mit (3) übereinstimmt. — In gleicher Weise lässt sich die Gl. $z^m + 1 = 0$ behandeln.

die verschiedenen Wurzeln einer solchen Gleichung zu individualisiren und der Analysis eine bestimmte Wurzel und gerade nur diese abzuverlangen, so antwortet sie uns dadurch, dass sie in Einer Form alle Wurzeln gibt, wenn dies überhaupt mit Hilfe der bekannten Funktionen möglich ist. — Die Wurzeln von Zahlengleichungen hingegen sind wieder bestimmte reelle oder imaginäre Zahlen, und man ist, wie wir sehen werden, immer im Stande, dadurch, dass man jede Wurzel in beliebig enge Grenzen einschliesst, die Stellen in der natürlichen Zahlenreihe anzugeben, welche die verschiedenen Wurzeln einnehmen und auf diese Weise eine bestimmte Wurzel, die wir suchen wollen, zu bezeichnen. Dann bietet die Analysis aber auch mehr als ein Mittel dar, diese bestimmte Wurzel zu finden. Mit dieser wichtigen Aufgabe werden wir uns nun beschäftigen und dabei uns auf die Bestimmung der reellen Wurzeln beschränken, da die Berechnung der imaginären Wurzeln mehr ein bloss theoretisches als praktisches Interesse hat.

115. Man kann immer voraussetzen, dass die Coefficienten der Gl. (1) rationale Zahlen sind; denn wären einige davon irrational, so müssen dieselben zum Behufe der Auflösung näherungsweise durch rationale Brüche ausgedrückt werden, was bekanntlich immer mit beliebiger Genauigkeit möglich ist. Sind aber die Coefficienten rational, so kann man mittelst der in III. gelehrten Transformationen jede Gl. vom m^{ten} Grade auf die Form der obigen Gleichung (1) bringen, wobei sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind und jener des ersten Gliedes $= 1$ ist.

Bei dieser Beschaffenheit der Gl. (1) können die reellen Wurzeln derselben nur ganze oder irrationale Zahlen, nicht aber rationale Brüche sein.

Denn wäre $x = \frac{p}{q}$ eine Wurzel der Gl. (1), wo p und q ganze Zahlen bedeuten, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so müsste:

$$\frac{p^m}{q^m} + A_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \frac{p^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots + A_{m-1} \frac{p}{q} + A_m = 0$$

sein, d. h. wenn man mit q^{m-1} multiplicirt:

$$\frac{p^m}{q} + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} q + A_3 p^{m-3} q^2 + \ldots +$$
$$+ A_{m-1} p q^{m-2} + A_m q^{m-1} = 0,$$

was ungereimt ist, da ein Bruch gegen eine Summe ganzer Zahlen sich nicht aufheben kann.

116. Sind a und b zwei Zahlen, welche, in das Gleichungspolynom $f(x)$ substituirt, Resultate $f(a) = +A$ und $f(b) = -B$ mit entgegengesetztem Zeichen erzeugen, so liegt zwischen a und b nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Denn da [§. 91] $f(x)$ eine stetige Funktion von x ist, so kann dieselbe, während x von a bis b sich stetig ändert, von dem Werthe $f(a) = +A$ zu dem Werthe $f(b) = -B$ nicht übergehen, ohne alle zwischen $+A$ und $-B$ liegende Werthe zu durchlaufen; unter diesen befindet sich aber auch der Werth 0; folglich muss zwischen a und b ein Werth von x liegen, für welchen die Funktion $f(x)$ verschwindet, d. h. eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$.

Wie leicht einzusehen, kann $f(x)$ bei dem Uebergange von $+A$ zu $-B$ oder umgekehrt, auch 3, 5,... $(2n+1)$mal durch 0 gehen, so dass also unter der gemachten Voraussetzung zwischen a und b auch 3, 5, u. s. w. überhaupt mehrere Wurzeln, aber in ungerader Anzahl liegen können.

Haben aber $f(a)$ und $f(b)$ gleiche Zeichen, so liegt zwischen a und b entweder keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.

Anmerkung. Zu demselben Ergebnisse führt die geometrische Betrachtung der der Gleichung $y = f(x)$ entsprechenden Curve. Ist nämlich $y = f(a) = +A$, $y = f(b) = -B$, so liegen die den beiden Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Punkte der Curve auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, weil die zugehörigen Ordinaten $+A$, $-B$ entgegengesetzte Zeichen haben; daher muss die Curve auf ihrem Zuge von dem einen dieser Punkte zum anderen die Abscissenaxe mindestens einmal schneiden, doch kann dies auch 3, 5,... $(2n+1)$mal stattfinden; jedem Durchschnitte entspricht aber eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$. Haben hingegen die beiden zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ gleiche Zeichen, so liegen die beiden entsprechenden Punkte der Curve auf derselben Seite der Abscissenaxe, und die Curve führt von einem dieser Punkte zum anderen, entweder ohne die Axe zu schneiden, oder, wenn dies geschieht, in einer geraden Anzahl von Punkten.

117. Bei der Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung ist die Kenntniss von Grenzen, innerhalb welcher diese Wurzeln liegen müssen, von Wichtigkeit, da man dadurch oft viele unnütze und m[illegible] same Versuche erspart.

Unter der oberen und unteren Grenze der positiven Wurz[illegible] versteht man zwei Zahlen, von denen die erstere grösser als die gröss[illegible] die zweite kleiner als die kleinste positive Wurzel ist, wobei es wünsche[illegible] werth ist, dass das Intervall dieser Grenzen das möglichst kleinste

Zur oberen Grenze der positiven Wurzeln gelangt man auf folgendem von Newton angegebenen Wege. Man transformire die gegebene Gleichung mittelst der Substitution $x = y + a$, wo a eine noch unbestimmte Zahl bedeutet, in eine andere:

$$y^m + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} y^{m-1} + \frac{f^{(m-2)}(a)}{(m-2)!} y^{m-2} + \ldots + f'(a)\, y + f(a) = 0,$$

deren Wurzeln $y = x - a$ sämmtlich um die Zahl a kleiner sind als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Wählt man dann die Zahl a so, dass die Funktionen $f(a)$, $f'(a), \ldots f^{(m-1)}(a)$ sämmtlich positiv werden, so entspricht dieser Gl. keine positive Wurzel, weil sie keine Zeichenwechsel hat und der gewählte Werth von a muss demnach grösser sein als jede positive Wurzel der gegebenen Gleichung. Die kleinste Zahl a, welche die genannten Funktionen sämmtlich positiv macht, ist demnach die obere Grenze der positiven Wurzeln.

Um die untere Grenze zu erhalten, transformire man die gegebene Gleichung mittelst der Substitution $x = \frac{1}{y}$ in eine andere, deren grösste positive Wurzel offenbar der reciproke Werth der kleinsten Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Sucht man nun auf die eben gelehrte Weise die obere Grenze b der positiven Wurzeln der transformirten Gleichung, so ist offenbar $\frac{1}{b}$ kleiner, als die kleinste Wurzel der gegebenen Gleichung und demnach eine untere Grenze.

Die Grenzen der negativen Wurzeln verschafft man sich dadurch, dass man die gegebene Gleichung, indem man $-x$ an die Stelle von x setzt, in eine andere transformirt, deren Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen haben und für diese Gleichung nun die Grenzen der positiven Wurzeln sucht, welche, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, die Grenzen der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung sein müssen.

In der Regel genügt es, für die untere Grenze der positiven sowohl als negativen Wurzeln die Nulle zu nehmen.

Beispiel. Sei die Gleichung:

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - 76x^2 + 31x + 294 = 0$$

eben, so hat man:

$$\begin{aligned} f(a) &= a^4 + 6a^3 - 76a^2 + 31a + 294, \\ f'(a) &= 4a^3 + 18a^2 - 152a + 31, \\ f''(a) &= 12a^2 + 36a - 152 \\ f'''(a) &= 24a + 36 \end{aligned}$$

und man findet nach wenigen Versuchen $a = 6$ für den kleinsten Werth, welcher diese Funktionen sämmtlich positiv macht; es ist daher 6 die obere Grenze der positiven Wurzeln. Durch dasselbe Verfahren, auf die Gleichung der reciproken Wurzeln:

$$294y^4 + 31y^3 - 76y^2 + 6y + 1 = 0$$

angewendet, findet man $\frac{1}{2}$ als die obere Grenze der positiven Wurzeln dieser Gl., somit 2 als die untere Grenze der pos. Wurzeln der gegebenen Gleichung. Mittelst der Gleichung:

$$f(-x) = x^4 - 6x^3 - 76x^2 - 31x + 294 = 0$$

erhält man endlich -1 und -13 für die beiden Grenzen der negativen Wurzeln.

118. Das eben erklärte Verfahren zur Erfindung der oberen Grenze der positiven Wurzeln kann man auch in der Art ausführen, dass man die Wurzeln der gegebenen Gleichung successive immer um Eins vermindert, bis man auf eine transformirte Gleichung mit durchaus positiven Gliedern kommt; die Anzahl der vorgenommenen Transformationen ist offenbar die gesuchte obere Grenze. Wendet man dieses Verfahren auf die Gleichung des obigen Beispiels an, so erhält man als transformirte Gleichungen der Reihe nach:

$$\begin{array}{llllll} 1 + 10 - & 52 - & 99 + 256 & & & (1) \\ 1 + 14 - & 16 - & 169 + 116 & & & (2) \\ 1 + 18 + & 32 - & 155 - & 54 & & (3) \\ 1 + 22 + & 92 - & 33 - & 158 & & (4) \\ 1 + 26 + & 164 + & 221 - & 76 & & (5) \\ 1 + 30 + & 248 + & 631 + & 336 & & (6) \end{array}$$

wo nur die Coefficienten angesetzt sind und die eingeklammerten Zahlen anzeigen, um wie viele Einheiten die Wurzeln der nebenstehenden Gleichung kleiner sind, als die der gegebenen. Die 6te Gl. hat nur positive Glieder, folglich ist 6 die obere Grenze der positiven Wurzeln. Dasselbe Verfahren, auf die Gl. $f(-x) = 0$ angewendet, liefert die obere Grenze der negativen Wurzeln.

Ist die obere Grenze eine grössere Zahl, was bei einiger Uebung leicht erkannt wird, so kann man, um die Anzahl der vorzunehmenden Transformationen zu verringern, nach einem grösseren Intervalle fortschreiten.

Dieses Verfahren bietet einige Vortheile dar. Da die letzten von x freien Glieder der transformirten Gleichungen nichts anderes sind, als die Resultate der Substitution der Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. in die

gegebene Gleichung, so ist offenbar r eine Wurzel der Gleichung, wenn das absolute Glied der r^{ten} transformirten Gleichung $= 0$ wird. Man erhält also dadurch unmittelbar die rationalen Wurzeln. — Aus demselben Grunde geben sich aus den Zeichenwechseln der letzten Glieder irrationale Wurzeln zu erkennen [§. 116], welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen in ungerader Anzahl liegen. So hat obige Gleichung eine positive Wurzel zwischen 2 und 3, eine andere zwischen 5 und 6. — Wird endlich ein mittleres Glied einer transformirten Gleichung $= 0$ und haben die zwei Nachbarglieder gleiche Zeichen, so hat diese, somit auch die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln [§. 96].

Es ist übrigens einleuchtend, dass man durch successive Verminderung der Wurzeln einer Gleichung immer nothwendig zuletzt eine transformirte Gleichung mit lauter positiven Gliedern erhalten muss, da die Zahl, um welche die Wurzeln vermindert werden, immer so gross gewählt werden kann, dass sämmtliche reelle Wurzeln sowohl, als auch die reellen Theile aller imaginären Wurzeln negativ werden und daher das Gleichungspolynom nur mehr Faktoren von der Form $(x + a)$ und $(x + p - q\sqrt{-1})(x + p + q\sqrt{-1}) = (x + p)^2 + q^2$ enthält, die offenbar keinen Zeichenwechsel hervorbringen können. Daher können auch bei den obigen successiven Transformationen wohl Zeichenwechsel verloren gehen, aber keine gewonnen werden, und man kann folgenden Satz aussprechen:

Sind p und q zwei beliebige Zahlen und $q > p$, so kann die Gleichung $f(x + q) = 0$ nicht mehr Zeichenwechsel haben, als die Gleichung:

$$f(x + p) = 0,$$

wo $f(x + p) = 0$ und $f(x + q) = 0$ zwei Gleichungen sind, deren Wurzeln beziehungsweise um p und q kleiner sind, als die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

119. Wenn für jeden Werth von $x \overline{\overline{>}} g$ das Gleichungspolynom einen positiven Werth erhält, so kann nach §. 116 zwischen g und $+\infty$ keine Wurzel liegen und es ist daher g eine obere Grenze der positiven Wurzeln. Nach §. 16, *i* kann man daher den Werth $g = A_r + 1$ immer als eine obere Grenze der positiven Wurzeln nehmen, wenn A_r den Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten der Gleichung bezeichnet, indem der Fall offenbar der ungünstigste ist, wenn alle auf das erste folgenden Glieder mit diesem grössten negativen Coefficienten behaftet sind. Nur ist diese Grenze häufig viel zu gross.

Für obiges Beispiel würde sie $= 77$ werden.

Eine genauere Grenze erhält man in den meisten Fällen, wenn man $g = 1 + \sqrt[k]{A_r}$ nimmt, wo wieder A_r der Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten ist und k die Anzahl der Glieder — die etwa fehlenden mitgezählt — bedeutet, welche dem ersten negativen Coefficienten vorangehen. Es wird hiebei noch vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit sei.

Denn es sei die vorgelegte Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \dots - A_k x^{m-k} \pm A_{k+1} x^{m-k-1} \pm \dots \pm \\ \pm A_m = 0,$$

in welcher $A_k x^{m-k}$ das erste negative Glied ist und A_r der Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten sein soll, so wird offenbar $f(x)$ für alle Werthe von x positiv, für welche:

$$x^m \overline{\geq} A_r \{x^{m-k} + x^{m-k-1} + \dots + 1\}$$

d. i.

$$x^m \overline{\geq} A_r \frac{x^{m-k+1} - 1}{x - 1}$$

ist. Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn man

$$x^m \overline{\geq} A_r \frac{x^{m-k+1}}{x - 1}$$

d. i.

$$(x - 1)\, x^{k-1} \overline{\geq} A_r$$

setzt, folglich um so mehr, wenn man $(x - 1)(x - 1)^{k-1} \overline{\geq} A_r$, oder:

$$(x - 1)^k \overline{\geq} A_r \text{ d. h. } x \overline{\geq} 1 + \sqrt[k]{A_r}$$

nimmt. Hiemit würde man für obiges Beispiel $1 + \sqrt{76} = 9.7$ oder 10 als obere Grenze finden.

Das Aufsuchen der rationalen Wurzeln.

120. Sind die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0 \qquad (1)$$

ganze Zahlen und der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannter $= 1$, so können [§. 115] die rationalen Wurzeln wieder nur ganze Zahlen sein, welche sich, da das letzte Glied A_m das Produkt sämmtlicher Wurzeln ist, unter den Faktoren von A_m vorfinden müssen. Um daher die rationalen Wurzeln der Gleichung aufzufinden, wird man das absolute Glied A_m in seine einfachen

und zusammengesetzten Faktoren zerlegen und diese, sowohl positiv als negativ genommen, in die Gleichung substituiren; jene, welche die Gleichung identisch machen, sind Wurzeln derselben.

Hiebei bleiben selbstverständlich jene Faktoren ausgeschlossen, welche ausserhalb der oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln liegen.

Diese Versuche werden bequem nach folgendem von Newton herrührenden Verfahren vorgenommen. Es sei α eine rationale Wurzel der Gl. (1), also eine ganze Zahl, so hat man, wenn man α statt x substituirt und zugleich transponirt, identisch:

$$A_m = - A_{m-1}\alpha - A_{m-2}\alpha^2 - A_{m-3}\alpha^3 - \ldots - A_1\alpha^{m-1} - \alpha^m,$$

folglich, wenn man durch α dividirt:

$$\frac{A_m}{\alpha} = - A_{m-1} - A_{m-2}\alpha - A_{m-3}\alpha^2 - \ldots - A_1\alpha^{m-2} - \alpha^{m-1};$$

da der Voraussetzung nach sowohl die Coefficienten als auch α ganze Zahlen sind, so muss auch $\frac{A_m}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein; setzt man diese $= B_1$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{B_1 + A_{m-1}}{\alpha} = - A_{m-2} - A_{m-3}\alpha - \ldots - A_1\alpha^{m-3} - \alpha^{m-2};$$

aus obigen Gründen ist nun auch $\frac{B_1 + A_{m-1}}{\alpha}$ eine ganze Zahl; bezeichnet man sie mit B_2, so hat man ferner:

$$\frac{B_2 + A_{m-2}}{\alpha} = - A_{m-3} - \ldots - A_1\alpha^{m-4} - \alpha^{m-3},$$

so dass auch $\frac{B_2 + A_{m-2}}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein muss. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Gleichung:

$$\frac{B_{m-2} + A_2}{\alpha} = - A_1 - \alpha,$$

(wo B_{m-2} eine ganze Zahl), aus welcher man schliesst, dass auch

$$\frac{B_{m-2} + A_2}{\alpha}$$

ıe ganze Zahl sein muss; bezeichnet man diese mit B_{m-1}, so folgt $\frac{{}_{m-1} + A_1}{\alpha} = - 1$, und wenn man diesen letzten Quotienten, welcher ɾieder eine ganze Zahl sein muss (und zwar $= - 1) = B_m$ setzt,

endlich $B_m + 1 = 0$, wo die Einheit den Coefficienten des ersten Gliedes der Gl. (1) vorstellt. Umgekehrt wird daher α eine Wurzel der Gleichung sein, wenn die successiven Quotienten:

$$B_1,\ B_2,\ B_3, \ldots B_m$$

ganze Zahlen und $B_m + 1 = 0$ ist. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn das erste Glied der Gleichung einen Coefficienten A_0 hat; es müsste sich dann zuletzt $B_m + A_0 = 0$ ergeben.

Man schreibe daher die zu untersuchenden Divisoren neben einander, setze unter jeden derselben den Quotienten aus dem letzten Gliede getheilt durch den Divisor; zu diesem Quotienten addire man den vorletzten Coefficienten, dividire die Summe wieder durch den Divisor und addire zu dem erhaltenen Quotienten den nächsten Coefficienten u. s. w. Kann mit einem Divisor diese Operation fortgesetzt werden, bis alle Coefficienten der Gleichung an die Reihe gekommen sind, und ergibt sich als letzte Summe die Nulle, so ist dieser Divisor eine Wurzel. Sobald aber bei einer der auszuführenden Divisionen ein gebrochener Quotient zum Vorschein kommt, wird die Operation mit dem betreffenden Divisor abgebrochen, da dieser keine Wurzel sein kann.

B e i s p i e l. Es sei die Gl. $x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 102x + 90 = 0$ gegeben. Man findet als Divisoren des letzten Gliedes:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10, \ldots 90;$$

als obere Grenze der positiven und negativen Wurzeln $+7$, -3; man hat demnach die Divisoren -3, -2, $+2$, $+3$, $+5$, $+6$ zu versuchen, da, wie man sich leicht durch unmittelbare Substitution überzeugt, $+1$, -1 keine Wurzeln sind.

− 3,	− 2,	+ 2,	+ 3,	+ 5,	+ 6,
− 30	− 45	+ 45	+ 30	+ 18	+ 15,
+ 102	+ 102	+ 102	+ 102	+ 102	+ 102,
+ 72	+ 57	+ 147	+ 132	+ 120	+ 117,
− 24			+ 44	+ 24	
− 9			− 9	− 9	
− 33			+ 35	+ 15	
+ 11				+ 3	
− 8				− 8	
+ 3				− 5	
− 1				− 1	
+ 1				+ 1	
0				0	

Es sind demnach nur $+5$ und -3 Wurzeln der Gleichung. Da unsere Gleichung nur vom 4ten Grade, so ergeben sich die beiden anderen Wurzeln, wenn man das Gleichungspolynom durch $(x-5)(x+3)$ dividirt, und den Quotienten $x^2-6x-6=0$ setzt. Man erhält hieraus $x=3\pm\sqrt{15}$.

121. Hat das letzte Glied A_m eine grosse Anzahl von Divisoren, so bieten sich verschiedene Wege dar, um schon in voraus solche auszuscheiden, welche nicht Wurzeln sein können und hiedurch die Versuche abzukürzen. Einer der einfachsten ist folgender. Man substituire in dem Gleichungspolynome $f(x)$ statt x sowohl $+1$ als -1 und bemerke sich die Substitutionsresultate $f(+1)$ und $f(-1)$; beachtet man nun, dass diese beiden Zahlen nichts anderes sind als die absoluten Glieder zweier Gleichungen, deren Wurzeln beziehungsweise um 1 kleiner und grösser sind als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so erkennt man sogleich, dass nur jene Faktoren von A_m Wurzeln sein können, welche, wenn positiv genommen, um 1 vermindert in $f(+1)$, und um 1 vermehrt in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind; negativ genommen können aber nur jene Faktoren Wurzeln sein, welche um 1 vermehrt in $f(+1)$ und um 1 vermindert in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind. Faktoren, welche diesen Bedingungen nicht entsprechen, sind nicht weiter zu berücksichtigen und nur die übrigbleibenden der obigen Prüfung zu unterwerfen.

So findet man für obiges Beispiel:

$$f(+1)=176,\ f(-1)=-12,$$

und von den Faktoren des letzten Gliedes haben nur folgende:

$$+2,\ +3,\ +5,\ -3$$

die obenerwähnte Eigenschaft, daher nur diese weiter zu prüfen sind.

Bisweilen kann man dadurch jeden Versuch ersparen. So z. B. findet man für die Gleichung:

$$x^4-143x^3+21x^2-82x+360=0,$$

143 als obere Grenze der positiven Wurzeln; es wären demnach alle Faktoren von 360, mit Ausnahme von 180, 23 an der Zahl, der Probe zu unterziehen. Sucht man jedoch $f(+1)=157$, $f(-1)=607$, so erkennt man sogleich, dass diese Gl. keine rationalen Wurzeln hat, weil diese Zahlen, als Primzahlen, durch keinen der um 1 vermehrten oder verminderten Faktoren theilbar sind.

Hat man auf diese Weise die rationalen Wurzeln einer Gleichung gefunden, so können die übrigen Wurzeln, wenn sie deren noch besitzt,

nur irrational oder imaginär sein und man wird, bevor man zu deren Berechnung schreitet, das Gleichungspolynom durch die den rationalen Wurzeln entsprechenden Wurzelfaktoren dividiren, wodurch man es mit einer leichter zu behandelnden Gleichung von niedrigerem Grade zu thun bekömmt.

Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.

122. Bevor man zur Berechnung der irrationalen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung schreitet, ist es nöthig, die Stelle in der natürlichen Zahlenreihe anzugeben, an welcher dieselben liegen, indem man jede zwischen zwei Grenzen einschliesst. Man kann diese Untersuchung die Analyse der Gleichung nennen.

Ein erstes einfaches Mittel hiezu bietet uns der in §. 116 ausgesprochene Satz dar. Sind $+g$ und $-g'$ die oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln und substituirt man in dem Gleichungspolynome der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots g$ und ebenso $0, -1, -2, \ldots -g'$, so liegt zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden dieser Zahlen gewiss mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung, wenn die diesen zwei Zahlen entsprechenden Substitutionsresultate mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind. So findet man für die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0, \quad f(0) = +1, \quad f(1) = -5, \quad f(2) = -5,$$
$$f(3) = +7, \; f(-1) = +7, \; f(-2) = +7, \; f(-3) = -5;$$

es liegt demnach eine Wurzel zwischen 0 und 1; eine zweite zwischen 2 und 3; eine dritte zwischen -2 und -3, womit auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung entdeckt und getrennt sind.

Allein sehr häufig geben sich auf diesem Wege nicht so viele reelle Wurzeln zu erkennen, als der Ordnungsexponent der Gleichung Einheiten enthält, oder so viele, als nach den in §. 96 vorgetragenen Sätzen der Gleichung möglicherweise zukommen können, und es wäre voreilig zu schliessen, dass die fehlenden Wurzeln, wenn ihre Anzahl gerade, sämmtlich imaginär seien. Denn haben die den beiden Werthen $x = a$ und $x = a + 1$ entsprechenden Substitutionsresultate $f(a)$ und $f(a + 1)$ entgegengesetzte Zeichen, so können nach §. 116 zwischen a und $a + 1$ auch mehrere Wurzeln in ungerader Anzahl liegen. Hingegen kann eine gerade Anzahl von Wurzeln, oder auch gar keine zwischen a und $a + 1$ liegen, wenn $f(a)$ und $f(a + 1)$ gleiche Vorzeichen haben. Kommt eine zwischen a und $a + 1$ liegende Wurzel der Gleichung mehrmals z. B. $p$mal zu, so wird sich diese nur verrathen,

wenn p eine ungerade Zahl ist. Indessen können und werden wir im Folgenden vorläufig annehmen, dass die Gleichung keine gleichen Wurzeln besitze, da die in §. 100 gelehrten Vorschriften uns die Mittel liefern, dieselben zu entdecken und die Gleichung davon zu befreien.

Man sieht nun leicht ein, dass mehrere zwischen a und $a+1$ liegende Wurzeln sich sogleich trennen würden, wenn man statt x nach und nach a, $a+\delta$, $a+2\delta, \ldots a+1$ substituiren und dabei δ kleiner als die kleinste Differenz der dazwischen liegenden Wurzeln wählen würde. Allein davon abgesehen, dass die von Lagrange gelehrte Bestimmung einer solchen Zahl δ sehr weitläufige Rechnungen erfordert, wenn die Gleichung den dritten Grad übersteigt, so wird dieses Verfahren der vielen vorzunehmenden Substitutionen wegen geradezu unausführbar, wenn die Wurzeln einander sehr nahe liegen. Der folgende Lehrsatz führt in den meisten dieser ohnehin in der Praxis selten vorkommenden schwierigeren Fälle einfacher und, was ihm einen besonderen Werth verleiht, immer sicher und ohne alles Probiren zum Ziele.

123. Sturms Lehrsatz. Es sei $f(x)=0$ die gegebene Gleichung vom m^{ten} Grade, deren Wurzeln wir sämmtlich von einander verschieden voraussetzen wollen und $f'(x)$ die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$. Wenden wir auf die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ das bekannte Verfahren zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, mit dem Unterschiede, dass wir die bei den aufeinanderfolgenden Divisionen sich ergebenden Reste mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, so bestehen, wenn die so geänderten Reste mit

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ldots\ R_{m-1},$$

die zugehörigen Quotienten mit

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots\ldots\ Q_{m-1}$$

bezeichnet werden, offenbar folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= Q_1 f'(x) - R_1 \\ f'(x) &= Q_2 R_1 - R_2 \\ R_1 &= Q_3 R_2 - R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{m-3} &= Q_{m-1} R_{m-2} - R_{m-1}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

trachten wir die Reihe der Funktionen:

$$f(x),\ f'(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ldots\ R_{m-1}, \qquad (2)$$

ren jede, wie leicht einzusehen, im Allgemeinen immer von einem n eine Einheit niedrigeren Grade als die vorhergehende und deren

letzte R_{m-1} vom 0ten Grade oder von x unabhängig ist (weil der Voraussetzung nach die Gl. $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln, folglich $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen), so lässt sich folgender Satz erweisen:

Substituirt man in der Funktionenreihe (2) für x nach einander zwei Zahlen p und q, von welchen $p < q$ sein soll, so erhält man, indem man von den Zahlenwerthen der Substitutionsresultate ganz abstrahirt und nur auf die Zeichen derselben sieht, zwei Zeichenreihen, die eine für $x = p$, die andere für $x = q$; die letztere Zeichenreihe kann nie mehr Zeichenwechsel haben, als die erstere, wohl aber weniger, und es liegen zwischen p und q genau so viele reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, als die zweite Zeichenreihe (für $x = q > p$) weniger Zeichenwechsel hat als die erstere.

Zum Behufe des Beweises müssen wir folgende zwei Hilfssätze voranschicken.

1ter Hilfssatz. Ist die Funktion $f(x)$ in der Nähe irgend eines Werthes von $x = a$ im Zustande des Wachsens, so ist für diesen Werth von x, $f'(x)$ positiv; ist aber $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ im Zustande des Abnehmens, so ist $f'(x)$ für $x = a$ negativ. Umgekehrt: Die Funktion $f(x)$ ist in der Nähe des besonderen Werthes $x = a$ im Zustande des Wachsens oder Abnehmens, je nachdem $f'(a)$ positiv oder negativ ist.

Denn es ist, wenn man in $f(x)$, $a + \delta$ an die Stelle von x setzt, [§. 91]:

$$f(a + \delta) = f(a) + \delta f'(a) + \delta^2 \frac{f''(a)}{2!} + \delta^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots$$

oder:

$$f(a + \delta) - f(a) = \delta f'(a) + \delta^2 \frac{f''(a)}{2!} + \delta^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots,$$

aus welcher Gleichung unmittelbar die Richtigkeit des Satzes erhellt, wenn man bedenkt, dass einerseits $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ (als für sehr kleine Werthe von δ) im Zustande des Wachsens oder Abnehmens ist, jenachdem die Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ positiv oder negativ ist; anderseits für hinreichend kleine Werthe von δ das Zeichen des zweiten Theiles der Gleichung bloss von dem Zeichen von $f'(a)$ abhängt. [§. 16, k.]

Ist übrigens a eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$, so ist $f(a) = 0$ und es folgt somit aus der letzten Gleichung:

$$f(a + \delta) = \delta f'(a) + \delta^2 \frac{f''(a)}{2} + \delta^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots,$$

und wenn man hierin $-\delta$ statt δ schreibt:

$$f(a - \delta) = -\delta f'(a) + \delta^2 \frac{f''(a)}{2!} - \delta^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots,$$

woraus man sieht, dass die Funktion $f(x)$ vor dem Durchgange durch die Nulle mit $f'(a)$ entgegengesetztes Zeichen, nach dem Durchgange gleiches Zeichen besitzt, was für die Folge bemerkt zu werden verdient.

2ter Hilfssatz. Wenn irgend eine aus der Reihe der Funktionen (2), z. B. R_k, für einen besonderen Werth von $x = c$ verschwindet, so haben die beiden benachbarten Funktionen R_{k-1} und R_{k+1} für diesen Werth von $x = c$ entgegengesetzte Zeichen; nie können aber zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Funktionen für denselben Werth von x zugleich verschwinden.

Denn betrachtet man drei benachbarte Funktionen:

$$R_{k-1}, \; R_k \text{ und } R_{k+1},$$

so besteht zwischen ihnen die identische Gleichung:

$$R_{k-1} = Q_{k+1} \cdot R_k - R_{k+1}; \tag{3}$$

setzt man in dieser Gleichung $x = c$ und nimmt man an, dass für diesen Werth von x, $R_k = 0$ wird, so folgt aus (3) sogleich $R_{k-1} = -R_{k+1}$, wodurch der erste Theil des Satzes gerechtfertiget ist. Würde aber nebst R_k auch noch R_{k+1} für $x = c$ verschwinden, so müsste in Folge der Gl. (3) auch R_{k-1} für diesen Werth von x sich auf 0 reduciren, dann würden aber in Folge der Glgn. (1) auch alle vorhergehenden und nachfolgenden Funktionen für $x = c$ verschwinden, was nicht möglich ist, weil der Voraussetzung nach die Gl. $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat.

Denken wir uns nun in die Funktionenreihe (2) nicht nur die ...len p und q, sondern auch alle zwischenliegenden substituirt und ... resultirenden Zeichenreihen aufgeschrieben. Da jede dieser Funk...nen ihr Zeichen nur dann ändern kann, wenn sie durch 0 geht, so ...d die Anzahl und Lage der Zeichenwechsel, welche die aus der ...bstitution $x = p$ hervorgehende Zeichenreihe darbietet, in den folgen... Zeichenreihen so lange unverändert bleiben, bis x einen zwischen

p und q liegenden Werth erreicht, welcher eine dieser Funktionen $= 0$ macht. Wir behaupten nun:

I. Dass die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändert, wenn für irgend einen zwischen p und q liegenden Werth von x eine oder mehrere der Funktionen $f'(x)$, R_1, R_2, ... R_{m-1} der Nulle gleich werden.

II. Dass jedesmal ein Zeichenwechsel, aber nur einer verloren geht, so oft die erste Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von $x = p$ bis $x = q$ durch 0 geht.

ad I. Es sei c ein zwischen p und q liegender Werth von x, für welchen eine der Zwischenfunktionen z. B. R_k verschwindet, und δ eine so kleine Zahl, dass innerhalb des Intervalles $x = c - \delta$ bis $x = c + \delta$ keine der benachbarten Funktionen $= 0$ wird, so genügt es offenbar, das Verhalten der Zeichenreihe bloss für die drei Funktionen R_{k-1}, R_k und R_{k+1} zu untersuchen; berücksichtiget man nun den Hilfssatz 2), so ist klar, dass für die drei Werthe $x = c - \delta$, $x = c$, $x = c + \delta$ bloss folgende vier Zeichenstellungen möglich sind:

	R_{k-1},	R_k,	R_{k+1}	R_{k-1},	R_k,	R_{k+1}	R_{k-1},	R_k,	R_{k+1}	R_{k-1},	R_k,	R_{k+1}
für $x = c - \delta$	+	+	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+
- $x = c$	+	0	−	−	0	+	+	0	−	−	0	+
- $x = c + \delta$	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+

Vergleicht man die den Werthen $x = c - \delta$ und $x = c + \delta$ entsprechenden Zeichenreihen, so sieht man, dass nur die Lage, nicht aber die Anzahl der Zeichenwechsel sich geändert hat. Da sich nun dasselbe von jeder anderen der Funktionen $f'(x)$ bis R_{m-2} zeigen lässt, so wird demnach ein Zeichenwechsel weder verloren noch gewonnen, wie viele der zwischen der ersten und letzten liegenden Funktionen (2) und wie oft dieselben auch durch 0 gehen mögen, während x von dem Werthe p zu jenem q übergeht.

ad II. Nehmen wir nun aber an, dass für $x = c$ die erste Funktion $f(x)$ verschwinde, also c eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sei. Da die Gl. der Voraussetzung nach keine gleichen Wurzeln hat, so kann $f'(x)$ für $x = c$ nicht verschwinden, und da nach dem obe Bewiesenen die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändert, wei eine der folgenden Funktionen für $x = c$ verschwindet, so genügt e die beiden ersten Glieder der Zeichenreihen zu betrachten. Mit Rüc sicht auf den Hilfssatz 1) können hier nur folgende zwei Fälle ei treten:

	$f(x)$, $f'(x)$			$f(x)$, $f'(x)$	
für $x = c - \delta$	$+$	$-$	oder	$-$	$+$
- $x = c$	0	$-$		0	$+$
- $x = c + \delta$	$-$	$-$		$+$	$+$

woraus man ersieht, dass bei dem Uebergange von $x = c - \delta$ zu $x = c + \delta$ ein Zeichenwechsel verloren gegangen ist, aber auch nur einer, und zwar derjenige, welchen die beiden ersten Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ unmittelbar vor dem Durchgange durch die Wurzel $x = c$ darbieten.

Aus vorstehenden Sätzen ergeben sich nun folgende Schlüsse. Es seien a, b, c, ... reelle Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, welche zwischen den Zahlen p und q liegen, nach ihrer Grösse geordnet, so dass a die kleinste. Setzt man in der Reihe der Funktionen:

$$f(x),\ f'(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ R_{m-1}$$

p an die Stelle von x, so erhält man eine Zeichenreihe mit einer gewissen Anzahl von Zeichenwechseln. Lassen wir nun x stetig wachsen, so kann von $x = p$ bis $x = a - \delta$ die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändern, weil $f(x)$ in diesem Intervalle nicht durch 0 geht; höchstens können sie ihren Ort verändern, wenn eine der Zwischenfunktionen $f'(x)$ bis R_{m-2} verschwindet. Unmittelbar vor dem Durchgange durch 0, also für $x = a - \delta$ haben $f(x)$ und $f'(x)$ entgegengesetzte Zeichen, nach dem Durchgange gleiche Zeichen und der an dieser Stelle vorhandene Zeichenwechsel ist (nach II) bei diesem Durchgange verloren gegangen, oder mit anderen Worten, die Zeichenreihe für $x = a + \delta$ hat um einen Zeichenwechsel weniger als jene für $x = p$. Lassen wir nun x weiter von a gegen b hin wachsen. Von $x = a + \delta$ bis $x = b - \delta$ kann $f(x)$ sein Zeichen nicht ändern; die Zeichenfolge, welche die zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ für $x = a + \delta$ darbieten, muss aber an der Stelle $x = b - \delta$ wieder in einen Zeichenwechsel sich verwandelt haben (weil diese beiden Funktionen vor dem Durchgange durch 0 entgegengesetzte Zeichen haben); dieser Zeichenwechsel kann aber nur dadurch entstanden sein, dass $f'(x)$ von $x = a + \delta$ bis $x = b - \delta$ sein Zeichen geändert hat, also in diesem ervalle durch 0 gegangen ist, wodurch jedoch (nach I) die Gesammt-il der Zeichenwechsel, welche die Zeichenreihe für $x = a + \delta$ be-zt, keine Aenderung erfährt; es ist nur ein bereits vorhandener Zei-nwechsel an diese Stelle hingerückt. Wir haben demnach unmittelbar dem Durchgange durch die zweite Wurzel genau so viele Zeichen-hsel, als unmittelbar nach dem Durchgange durch die erste Wurzel;

zugleich sind die zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ vor dem Durchgange durch die zweite Wurzel wieder entgegengesetzten Zeichens. Dieser Zeichenwechsel geht bei dem Durchgange durch die zweite Wurzel (nach II) wieder verloren, folglich hat die Zeichenreihe für $x = b + \delta$ schon um zwei Zeichenwechsel weniger als jene für $x = p$. Diese Schlüsse gelten offenbar für jeden folgenden Durchgang von $f(x)$ durch 0, so dass bei jedem solchen Durchgange ein Zeichenwechsel verloren geht. Liegen demnach k reelle Wurzeln zwischen p und q, so muss die Zeichenreihe für $x = q$ genau um k Zeichenwechsel weniger haben, als jene für $x = p$.

Hat die Gl. $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln, so entdeckt sich dies von selbst, wenn man auf die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ das Verfahren des grössten gemeinschaftlichen Divisors anwendet, indem dabei einer der Reste, z. B. $R_{k+1} = 0$ wird. Der vorhergehende, R_k ist das grösste gemeinschaftliche Maass der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ und die Gl. $f(x) : R_k = \psi(x) = 0$ enthält bekanntlich sämmtliche Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, jede nur einmal; es kann nun die Gl. $\psi(x) = 0$, wenn es nöthig sein sollte, nach dem Sturm'schen Lehrsatze analysirt werden.

In Bezug auf die praktische Anwendung der Sturm'schen Methode zur Analyse der Gleichungen mögen noch folgende Bemerkungen eine Stelle finden.

1) Man substituire in der Funktionenreihe (2) zuerst die Werthe $-\infty$, 0, $+\infty$; haben die drei dadurch entstehenden Zeichenreihen beziehungsweise α, β, γ Zeichenwechsel, so ist $\alpha - \gamma$ die Gesammtzahl der reellen Wurzeln, unter denen sich $\alpha - \beta$ negative und $\beta - \gamma$ positive befinden. Hierauf kann man statt x successive die Werthe $+1$, $+2$, $+3, \ldots, -1$, -2, $-3, \ldots$ setzen, bis man zwei Zeichenreihen erhält, die eine für $x = +g$, die andere für $x = -g'$, welche beziehungsweise mit jenen für $x = +\infty$ und $= -\infty$ übereinstimmen, so kann offenbar zwischen $+g$ und $+\infty$, und zwischen $-g'$ und $-\infty$ keine reelle Wurzel mehr liegen; es sind g und $-g'$ die oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln und die Substitutionen brauchen nicht weiter fortgesetzt zu werden; die Vergleichung der verschiedenen aufeinanderfolgenden Zeichenreihen gibt sofort den Ort jeder einzelnen reellen Wurzel.

2) Das Mühsamste bei diesem Verfahren bleibt immer die Entwickelung der Funktionen R_1 bis R_{m-1}, weil dabei, namentlich wenn die Gleichung von höherem Grade ist und grosse Coefficienten hat, oft sehr grosse Zahlen zu multipliciren kommen. Einige Erleichterung ver-

schafft bisweilen die Bemerkung, dass, wenn man auf einen Rest R_k kommt, welcher innerhalb der Grenzen p, q sein Zeichen nicht ändert, die Operation hiebei abgebrochen und die folgende Untersuchung auf die Funktionen:

$$f(x),\ f'(x),\ R_1,\ R_2, \dots R_k$$

beschränkt werden kann. Der Grund erhellt leicht, wenn man bedenkt, dass unter der gemachten Voraussetzung in der Reihe der Funktionen $R_k, R_{k+1}, \dots R_{m-1}$ von $x=p$ bis $x=q$ keine Aenderung in der Zahl der Zeichenwechsel eintreten kann. Diese Bemerkung lässt sich mit Vortheil auf den Rest R_{m-3} vom 2ten Grade anwenden, welcher zwischen den Grenzen:

$$p=-\infty,\ q=+\infty$$

sein Zeichen nicht ändert, wenn das Quadrat des 2ten Coefficienten kleiner ist als das vierfache Produkt des ersten und letzten, weil in diesem Falle die zwei Wurzeln der Gleichung $R_{m-3}=0$ imaginär sind.

3) Da der letzte Rest von x unabhängig ist, so braucht man seinen Zahlenwerth nicht zu entwickeln; es genügt die Kenntniss seines Zeichens; dieses ist aber nach dem Hilfssatze 2) das entgegengesetzte von jenem, welches der Rest vom 2ten Grade für jenen Werth von x erhält, welcher den Rest vom 1ten Grade auf Null reducirt.

Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1tes **Beispiel.** Sei die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$$

gegeben, so ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 7,$$

und man findet:

$$R_1 = 14x - 3,\ R_2 = +\ 1345;$$

man erhält daher folgende Zeichenreihen:

		Anz. d. Zeich.-Wechs.
für $x=-\infty$:	$-\ +\ -\ +$	3
- $x=-3$	$-\ +\ -\ +$	3
$x=-2$	$+\ +\ -\ +$	2
$x=-1$	$+\ -\ -\ +$	2
$x=0$	$+\ -\ -\ +$	2
$x=+1$	$-\ -\ +\ +$	1
$x=+2$	$-\ +\ +\ +$	1
$x=+3$	$+\ +\ +\ +$	0

Es sind daher alle drei Wurzeln reell, und sie liegen zwischen -2 und -3; 0 und 1; $+2$ und $+3$, wie bereits §. 122 gefunden wurde.

2[tes] Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 4x - 1 = 0$$

zur Analyse vorgelegt, so erhalten wir:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 4x - 1; \quad f'(x) = 5x^4 - 24x^2 + 4;$$
$$R_1 = 16x^3 - 16x + 5; \quad R_2 = 304x^2 + 25x - 64;$$
$$R_3 = 14467x - 5456; \quad R_4 = +$$

der Werth von R_4 wurde nicht gerechnet, sondern nur sein Zeichen bestimmt, welches $+$ sein muss, da für den aus $R_3 = 0$ folgenden Werth von x, R_2 negativ wird. Man findet:

		Anz. d. Zeich.-Wechs.
für $x = -\infty$:	$- + - + - +$	5
- $x = -3$	$- + - + - +$	5
- $x = -2$	$+ - - + - +$	4
- $x = -1$	$+ - + + - +$	4
- $x = 0$	$- + + - - +$	3
- $x = +1$	$- - + + + +$	1
- $x = +2$	$- - + + + +$	1
- $x = +3$	$+ + + + + +$	0

Die Gleichung bezitzt daher 5 reelle Wurzeln, von denen 2 negativ in den Intervallen $\{-2; -3\}$ und $\{0; -1\}$ und 3 positiv sind; von letzteren liegen zwei in dem Intervalle $\{0; 1\}$ und eine in dem Intervalle $\{2; 3\}$.

Um die zwei in dem Intervalle $\{0; 1\}$ liegenden Wurzeln zu trennen, versuchen wir zuerst, ob dies nach §. 116 gelingt, indem wir in $f(x)$ der Reihe nach die Werthe 0,1; 0,2; 0,3 u. s. w. substituiren; wir erhalten:

$f(0) = -1$
$f(0,1) = -0,608$
$f(0,2) = -0,264$
$f(0,3) = -0,014$
$f(0,4) = +0,098$
$f(0,5) = +0,031$
$f(0,6) = -0,250$
u. s. w.

und schliessen sofort aus den Zeichenwechseln, dass eine dieser Wurzeln zwischen 0,3 und 0,4, die andere zwischen 0,5 und 0,6 liege. Hiemit sind sämmtliche Wurzeln der Gl. getrennt, und können nun nach den später zu erklärenden Näherungsmethoden berechnet werden.

3[tes] Beispiel. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0;$$

es kommt:

$$f(x) = x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48$$
$$f'(x) = 2x^3 + 60x^2 + 185x - 99$$
$$R_1 = 415x^2 + 2147x - 1086$$
$$R_2 = 11478077x - 5327841$$
$$R_3 = +$$

für $x = -\infty$	$+ - + - +$	4 Zeich.-W.
- $x = -40$	$+ - + - +$	4 - -
- $x = -30$	$- - + - +$	3 - -
- $x = -10$	$- + + - +$	3 - -
- $x = 0$	$+ - - - +$	2 - -
- $x = +1$	$+ + + + +$	0 - -

Die Gl. hat daher vier reelle Wurzeln, wovon 2 negative in den Intervallen $\{0; -10\}$, $\{-30; -40\}$ (deren Grenzen nach §. 116 leicht enger zusammengezogen werden) und zwei positive in dem Intervalle $\{0; 1\}$ liegen.

Zur Trennung der letzteren haben wir zuerst wieder nach §. 116:

$f(0) = +48$	Da die Substitutionsresultate das Zeichen nicht
$f(0.1) = +30{,}0901$	ändern, so liegen die Wurzeln zwischen zwei
$f(0{,}2) = +16{,}1216$	aufeinanderfolgenden dieser nur um 0,1 ver-
$f(0{,}3) = +6{,}3381$	schiedenen Werthe von x und zwar, wie man
$f(0{,}4) = +0{,}9856$	aus dem Gange dieser Resultate vermuthet,
$f(0{,}5) = +0{,}3125$	zwischen 0,4 und 0,5. Um uns hievon zu über-
$f(0{,}6) = +4{,}5696$	zeugen, substituiren wir diese beiden Werthe
u. s. w.	in die Reihe der Sturm'schen Funktionen und

erhalten:

für $x = 0{,}4$	$+ - - - +$	2 Zeich.-W.
$x = 0{,}5$	$+ + + + +$	0 - -

wo nun der Verlust von zwei Zeichenwechseln andeutet, dass in der That zwischen 0,4 und 0,5 zwei reelle Wurzeln liegen, deren gemeinschaftliche Anfangsziffern somit 0,4 sind.

Man könnte nun auf diese Weise fortfahren und zunächst nach §. 116 versuchen, ob sich die beiden Wurzeln in der zweiten Dezimalstelle trennen und wo nicht, die denselben gemeinschaftliche zweite Dezimalstelle nach Sturm bestimmen u. s. w. Wir werden jedoch später [§. 131] ein Verfahren kennen lernen, nach welchem die weitere Trennung solcher nahe gleichen Wurzeln gleichzeitig mit der Berechnung derselben mit Leichtigkeit ausgeführt wird, so dass es immer genügt, durch die hier vorgetragene Analyse die den nahe gleichen

Wurzeln gemeinschaftliche Ziffer an der ersten Dezimalstelle zu bestimmen.

124. Auch von dem folgenden, von Budan herrührenden Lehrsatze kann man zum Behufe der Trennung der Wurzeln öfter vortheilhaften Gebrauch machen.

Es seien a und b zwei beliebige Zahlen und $b > a$; man bilde aus der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ die Gleichungen:

$$f(x+a) = 0 \ldots (1), \qquad f(x+b) = 0 \ldots (2)$$

deren Wurzeln beziehungsweise um a und b kleiner sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Hat nun die Gl. $f(x) = 0$ h zwischen a und b liegende reelle Wurzeln, so besitzt die Gleichung $f(x+b) = 0$ mindestens um h Zeichenwechsel weniger als die Gl. $f(x+a) = 0$.

Beweis. Setzen wir zuvörderst voraus, die Gl. $f(x) = 0$ habe nur eine reelle Wurzel innerhalb der Grenzen a und b, so müssen die letzten von x freien Glieder in den Gleichungen (1) und (2) nach §. 116 entgegengesetzte Zeichen, daher diese beiden Gleichungen selbst eine ungleiche Anzahl von Zeichenwechseln haben, indem, wie man sich leicht überzeugt, eine Gleichung, deren erstes und letztes Glied mit gleichen Zeichen behaftet sind, nur eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln zulässt, diese Anzahl hingegen ungerade sein muss, wenn das erste und letzte Glied entgegengesetzte Zeichen haben Da solchergestalt die Gleichungen (1) und (2) nicht gleichviel Zeichenwechsel haben können, anderseits aber nach dem am Schlusse des §. 118 angeführten Satze die Gl. (2) nicht mehr Zeichenwechsel haben kann, als die (1), so muss sie deren weniger und zwar mindestens um einen Wechsel weniger besitzen.

Dies vorausgesetzt, seien die h zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$ von der kleinsten angefangen nach ihrer Grösse geordnet:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_h;$$

ferner seien

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{h-1}$$

Zahlen, welche beziehungsweise zwischen α_1 und α_2, α_2 und α_3, α und α_4, ... α_{h-1} und α_h liegen, und denken wir uns endlich de Reihe nach die Gleichungen:

$$f(x+a) = 0,\ f(x+\beta_1) = 0,\ f(x+\beta_2) = 0,\ f(x+\beta_3) = 0, \ldots$$
$$f(x+\beta_{h-1}) = 0,\ f(x+b) = 0,$$

$h + 1$ an der Zahl, gebildet, so hat nach Obigem die 2te dieser Gleichungen mindestens um einen Zeichenwechsel weniger als die 1te; die 3te mindestens um einen Wechsel weniger als die 2te, somit mindestens um zwei weniger als die erste u. s. w., endlich die $(h+1)^{te}$, $f(x+b)=0$, mindestens um h Wechsel weniger als die erste $f(x+a)=0$; womit der aufgestellte Satz erwiesen ist.

Umgekehrt: Gehen bei dem Uebergange von der Gl. (1) zur Gl. (2) h Zeichenwechsel verloren, so liegen höchstens h reelle Wurzeln zwischen a und b.

Wiewohl dieser Satz uns nicht lehrt, wie viele reelle Wurzeln zwischen zwei Grenzen a und b liegen müssen, sondern nur, wie viele höchstens dazwischen liegen können, da der Verlust von Zeichenwechseln auch von den der Gleichung zukommenden imaginären Wurzeln herrühren kann, so leistet er doch selbst in der oben ausgesprochenen einfachen Form oft erspriessliche Dienste. Zur Erleichterung der Anwendung dienen noch folgende Bemerkungen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen wird:

1) Geht beim Uebergange von (1) zu (2) eine ungerade Anzahl $(2n+1)$ von Zeichenwechseln verloren, so liegen zwischen a und b mindestens eine und höchstens $(2n+1)$, jedenfalls aber eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln.

2) Gehen jedoch Zeichenwechsel in gerader Anzahl $2n$ verloren, so liegt zwischen a und b entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln.

3) Hat die Gleichung $f(x)=0$ bloss relle Wurzeln, so ist die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln genau gleich dem Unterschiede der Anzahl der Zeichenwechsel in den Glgn. (1) und (2). [Vergl. §. 96, IV].

Näherungsmethoden zur Berechnung der irrationalen Wurzeln.

Die in den vorhergehenden §§. entwickelten Methoden setzen uns in den Stand, jede reelle irrationale Wurzel einer Gl. $f(x)=0$ zwischen zwei Grenzen a und $a+y$ einzuschliessen, wo y eine kleine Zahl bedeutet, so dass also a ein genäherter Werth der gesuchten Wurzel ist. Wir setzen im Folgenden voraus, dass zwischen diesen Grenzen nur eine Wurzel liege. Auch können wir uns auf die Berechnung der positiven Wurzeln beschränken, da sich jene der negativen auf die

Berechnung der positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$ zurückführen lässt.

125. Newton's Näherungsmethode. Bezeichnen wir mit x_1 die zu berechnende Wurzel der Gleichung:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \tag{1}$$

und mit a einen genäherten Werth derselben, so zwar, dass:

$$x_1 - a < \frac{1}{10}$$

sein soll. Setzen wir in (1) $x = a + y$, so erhalten wir [§. 97] die neue Gleichung:

$$A_0 y^m + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} y^{m-1} + \ldots + \frac{f''(a)}{2!} y^2 + f'(a) y + f(a) = 0, \tag{2}$$

deren Wurzeln sämmtlich um a kleiner sind als die Wurzeln der Gl. (1) und welche demnach nothwendig eine Wurzel $y = x_1 - a$ besitzt, welche kleiner ist als $\frac{1}{10}$; aber auch nur eine solche Wurzel, weil, wenn deren mehrere existiren würden, die Gl. (1) eben so viele zwischen a und $a + \frac{1}{10}$ liegende Wurzeln haben müsste, was gegen die Voraussetzung streitet. Wir finden diese Wurzel näherungsweise aus der Gleichung: $f'(a) y + f(a) = 0$, indem wir in (2) die höheren Potenzen von y vernachlässigen, und erhalten daraus:

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ und somit } x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{3}$$

als genaueren Werth der gesuchten Wurzel. Diesen betrachten wir als neuen Näherungswerth a_1, setzen also:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \text{ und } x_1 = a_1 + y_1,$$

so ergibt sich auf demselben Wege:

$$y_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \text{ und } x_1 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

welcher Werth von x_1 wieder genauer sein wird, als der frühere u[illegible] mit welchem, als neuem Näherungswerthe, die Operation wiederho[illegible] wird, bis eine genügende Anzahl richtiger Dezimalstellen gefunden is[illegible]

Bezeichnet man den Fehler des angenommenen Näherungswerth[illegible] a mit f, mit $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Fehler der successive berechneten Näh[illegible]rungswerthe und ist $f < \delta$, so ist im Allgemeinen $f_1 < \delta^2$, $f_2 < \delta$[illegible]

$f_3 < \delta^8$, $f_4 < \delta^{16}$ u. s. w. Hat man daher die Wurzel x_1 zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, deren Unterschied nur $\frac{1}{10}$ beträgt und nimmt man für a das arithmetische Mittel aus beiden, so ist $f < 0{,}05$; es wird daher der erste berechnete Näherungswerth im Allgemeinen in der 2ten oder 3ten Dezimalstelle, der zweite in der 4ten oder 5ten, der dritte in der 9ten bis 10ten Dezimalstelle u. s. w. noch richtig sein. Meistens wird die Näherung noch rascher erfolgen und zwar um so rascher, je grösser $f'(a)$ gegen $f(a)$ ist.

Da jedoch bei einer gewissen Beschaffenheit der Wurzeln die nach einander erhaltenen Näherungswerthe der Wurzel, statt dem wahren Werthe immer näher zu kommen, sich von demselben auch entfernen können (welcher Fall übrigens sehr selten eintritt), so kann man sich von dem Grade der Annäherung, welchen man erreicht hat, wenn man bei einem gewissen Näherungswerthe a_r stehen bleibt, leicht dadurch überzeugen, dass, wenn a_r in der k^{ten} Dezimalstelle noch richtig sein soll, $f(a_r)$ und $f(a_r')$ entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wenn a'_r den in der k^{ten} Dezimalstelle um eine Einheit erhöhten Werth von a_r bezeichnet.

Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

gegeben; durch Anwendung des Satzes §. 116 findet man, dass die Wurzeln derselben in den Intervallen $\{-1; -2\}$, $\{0,1\}$ und $\{4,5\}$ liegen. Soll nun z. B. die letzte Wurzel berechnet werden, so ist weiter $f(4) = -4$, $f(4{,}1) = -2{,}519$, $f(4{,}2) = -0{,}872$, $f(4{,}3) = +0{,}947$; die Wurzel liegt also zwischen 4,2 und 4,3 und wir nehmen als genäherten Werth $a = 4{,}25$ an. Da nun $f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$, so steht die Rechnung so:

$$a = 4{,}25, \text{ gibt } f(a) = +0{,}015625, \quad f'(a) = +18{,}1875,$$
$$y = -0{,}000859$$

somit ist:

$$x = a + y = 4{,}249141$$

der erste nach (3) berechnete Näherungswerth. Da dieser im Allgemeinen in der 3ten Dezimalstelle nicht sicher ist, so hätten wir eigentlich $f(a)$ und $f'(a)$ nur in so viel Dezimalstellen zu entwickeln gebraucht, dass sich in y die 3te Dezimale noch richtig ergibt; aus dem Umstande, dass $f(a)$ so klein ist, schliessen wir jedoch, dass $a = 4{,}25$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt und daher in diesem Falle diese erste Näherung schon zu einem Werthe der Wurzel geführt haben wird, der

mindestens in der 4[ten] oder 5[ten] Stelle noch richtig ist, wovon uns die nächste Näherung sogleich überzeugen wird. Wir setzen nun:

$$a_1 = 4{,}249141\text{; dies gibt } f(a_1) = +\ 0{,}000008393325$$
$$f'(a_1) = +\ 18{,}17247\text{; somit } y_1 = -\ 0{,}00000046187$$

und
$$x = a_1 + y_1 = 4{,}2491405381,$$

ein Werth, welcher in der 9[ten] Dezimalstelle noch richtig ist. Auf gleiche Weise findet man für die beiden anderen Wurzeln 0,853634511 und — 1,102775049, deren letzte als positive Wurzel der Gleichung $f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ berechnet ist.

126. Horner's Methode. Es sei:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung; transformiren wir dieselbe in eine andere, deren Wurzeln um a kleiner sind, als die Wurzeln der Gl. (1) und wählen wir für a einen solchen Werth, dass das letzte Glied der transformirten Gleichung:

$$A_0 y^m + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} y^{m-1} + \ldots + f'(a) y + f(a) = 0 \qquad (2)$$

so klein wird, dass wir es näherungsweise als 0 ansehen können, so ist offenbar $y = 0$ eine Wurzel der Gl. (2), somit $x = a$ eine Wurzel der Gl. (1). Auf diese Bemerkung gründet sich folgendes Verfahren.

Es sei:

$$x_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots \qquad (3)$$

die zu berechnende Wurzel und $x = a_0 + \frac{a_1}{10}$ ein genäherter Werth derselben, d. i. die untere von zwei nur um 0, 1 auseinander liegenden Grenzen, zwischen welchen die Wurzel liegt; vermindern wir die Wurzeln der Gl. (1) um $a_0 + \frac{a_1}{10}$, so erhalten wir die transformirte Gleichung:

$$V_0 x^m + V_1 x^{m-1} + V_2 x^{m-2} + \ldots + V_{m-2} x^2 + V_{m-1} x + V_m = 0, \quad (4)$$

in welcher der Kürze wegen:

$$V_0, \quad V_1, \quad V_2, \ldots \quad V_{m-2}, \quad V_{m-1}, \quad V_m$$

statt:

$$A_0, \frac{f^{(m-1)}\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)}{(m-1)!}, \frac{f^{(m-2)}\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)}{(m-2)!}, \ldots \frac{f''\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)}{2!}$$
$$f'\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right), \ f\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)$$

gesetzt ist. Die Gleichung (4) besitzt nun eine Wurzel:

$$x = \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots, \tag{5}$$

welche $< \frac{1}{10}$ ist; aber auch nur eine von dieser Eigenschaft, weil wir auch hier die in der Vorerinnerung zu §. 125 gemachte Voraussetzung festhalten, dass zwischen $a_0 + \frac{a_1}{10}$ und $a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$ nur **eine** Wurzel der Gl. (1) liege. Da nun die Wurzel (5) der Gl. (4) $< \frac{1}{10}$ ist, so wird man einen genäherten Werth derselben $= \frac{a_2}{100}$ erhalten, wenn man in (4) die höheren Potenzen von x vernachlässigt und

$$V_{m-1}\, x + V_m = 0$$

setzt, woraus:

$$x = \frac{a_2}{100} = -\frac{V_m}{V_{m-1}} \tag{6}$$

folgt. Wir erhalten daher die zweite Dezimalstelle a_2 der Wurzel (oder allgemeiner die nächste auf a_1 folgende von 0 verschiedene Dezimalstelle), indem wir das letzte Glied der Gl. (4) durch den Coefficienten des vorletzten dividiren und dabei nur die erste bedeutende Stelle des Quotienten suchen.

Sofort vermindern wir die Wurzeln der Gl. (4) um $\frac{a_2}{100}$, so besitzt die neue transformirte Gleichung:

$$V'_0 x^m + V'_1 x^{m-1} + \ldots + V'_{m-2} x^2 + V'_{m-1} x + V'_m = 0 \tag{7}$$

eine Wurzel $x = \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots$, welche $< \frac{1}{100}$ ist und sich demnach wieder näherungsweise aus der Gleichung:

$$V'_{m-1}\, x + V'_m = 0 \text{ ergibt, woraus } x = \frac{a_3}{1000} = -\frac{V'_m}{V'_{m-1}} \tag{8}$$

folgt. Die dritte, oder allgemeiner die nächste auf a_2 folgende bedeutende Dezimalstelle der Wurzel ergibt sich also abermals durch Division des letzten Gliedes der Gl. (7) durch den Coefficienten des vorletzten Gliedes.

Hierauf vermindere man die Wurzeln der Gl. (7) um $\frac{a_3}{1000}$, so erhalten wir eine neue transformirte Gleichung:

$$V''_0 x^n + V''_1 x^{n-1} + \ldots + V''_{m-2} x^2 + V''_{m-1} x + V''_m = 0, \tag{9}$$

deren eine Wurzel $x = \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \ldots$ sich näherungsweise aus:

$$V''_{m-1} x + V''_m = 0, \quad \text{d. i.} \quad x = \frac{a_4}{10000} = -\frac{V'_m}{V''_{m-1}} \tag{10}$$

ergibt. Auf diese Weise wird fortgefahren, bis eine genügende Anzahl von Dezimalstellen der Wurzel entwickelt ist. Der ganze Rechnungsmechanismus ist, wenn man dabei das in §. 97 gelehrte Budan'sche Transformationsverfahren in Anwendung bringt, höchst einfach und gleichförmig. Die absoluten Glieder der aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen werden immer kleiner und im Verlaufe der Rechnung nur mit so vielen Dezimalstellen (oder höchstens um eine mehr) entwickelt, als man in der Wurzel verlangt. Dabei haben die absoluten Glieder von V_m an immer dasselbe Zeichen, weil der wahre Werth der Wurzel immer auf derselben Seite der successiven Näherungswerthe $a_0 + \frac{a_1}{10}$, $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$, u. s. w. liegt, nämlich grösser ist als diese. Das absolute Glied V_m der ersten transformirten Gleichung hingegen hat mit A_m gleiches oder entgegengesetztes Zeichen, je nachdem zwischen 0 und $a_0 + \frac{a_1}{10}$ eine gerade (die 0 mit einbegriffen) oder ungerade Anzahl von Wurzeln liegt.

Was die Sicherheit betrifft, mit welcher die Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$, $-\frac{V'_m}{V'_{m-1}}$ u. s. w. die aufeinanderfolgenden Dezimalstellen $a_2, a_3, \ldots$ ergeben, so ist zu bemerken, dass es allerdings namentlich zu Anfang der Rechnung in Folge der vernachlässigten Glieder geschehen kann, dass sich eine oder die andere derselben zu klein oder zu gross ergibt. Dies zeigt sich jedoch in der folgenden transformirten Gleichung. Wäre z. B. $-\frac{V_m}{V_{m-1}} = \frac{a_2}{100}$ zu klein, so würde die folgende transformirte Gleichung $-\frac{V'_m}{V'_{m-1}} = \frac{a_3}{1000}$ und $a_3 > 9$ ergeben, was nicht sein kann. Man wird daher a_2 um eine Einheit erhöhen und die Operation wiederholen. Wäre jedoch a_2 zu gross, so würde in der folgenden transformirten Gleichung das absolute Glied sein Zeichen ändern, weil die Wurzel in diesem Falle zwischen $a_0 + \frac{a_1}{10}$ und $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$ läge und bekanntlich:

$$V_m = f\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) \text{ und } V'_m = f\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}\right)$$

ist.

Auch ist leicht einzusehen, dass die zwei letzten Glieder in den transformirten Gleichungen immer entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wodurch sich das negative Vorzeichen in (6), (8), (10) erklärt. Denn da der Zahlenwerth des letzten Gliedes in den aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen immer kleiner und kleiner wird, so ist das Polynom $f(x)$ in der Nähe des Werthes:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots.$$

im Zunehmen oder Abnehmen begriffen, je nachdem das letzte Glied der transformirten Gleichungen negativ oder positiv ist. Im ersten Falle muss aber [§. 123, 1. Hilfssatz] der Coefficient des vorletzten Gliedes, als die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$, für eben diesen Werth von x, somit auch für die genäherten Werthe:

$$a_0 + \frac{a_1}{10}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \text{ u. s. w.}$$

positiv, im zweiten negativ sein.

127. Zur Erläuterung dieser Methode, welche unter allen bekannten ohne Zweifel den grössten praktischen Werth hat,*) mögen folgende Beispiele dienen. Es ist schon oben bemerkt worden, dass man die absoluten Glieder mit so vielen Dezimalstellen entwickelt und bis zu Ende fortführt, als man in der Wurzel sichere Dezimalstellen verlangt. Hingegen werden in den übrigen Gliedern der transformirten Gleichungen nur immer so viele Stellen beibehalten, als auf die letzte Stelle des absoluten Gliedes von Einfluss sind.

1. Beispiel. Nehmen wir die bereits oben behandelte Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

vor, deren Wurzeln in den Intervallen $\{0;\ 1\}$, $\{4;\ 5\}$, $\{-1;\ -2\}$ liegen und berechnen wir die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel mit 9 Dezimalstellen. Sie liegt, wie man leicht findet, zwischen 0,8 und 9; es ist also:

---

*) Prof. S. Spitzer hat diese Methode wesentlich ausgebildet und auch auf die Berechnung imaginärer Wurzeln, die Auflösung höherer Gleichungen mit mehreren Unbekannten und transcendenter Gleichungen mit Erfolg angewendet. (Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Von S. Spitzer. Wien, 1851.)



$$x = 0{,}8 \left(= a_0 + \frac{a_1}{10}\right)$$

ein genäherter Werth; wir vermindern die Wurzeln der Gl. um 0,8 und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -4 & -2 & +4 \\
0{,}8] & 1 & -3{,}2 & -4{,}56 & +0{,}352 \\
 & & -2{,}4 & -6{,}48 & \\
 & & -1{,}6. & &
\end{array}$$

Die erste transformirte Gleichung ist sonach:

$$x^3 - 1{,}6x^2 - 6{,}48x + 0{,}352 = 0,$$

woraus man:

$$\frac{a_2}{100} = -\frac{0{,}352}{-6{,}48} = 0{,}05$$

findet; somit ist $x = 0{,}85$. Wir vermindern jetzt die Wurzeln dieser Gleichung um 0,05 und haben:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -1{,}6 & -6{,}48 & +0{,}352 \\
0{,}05] & 1 & -1{,}55 & -6{,}5575 & +0{,}024125 \\
 & & -1{,}50 & -6{,}6325 & \\
 & & -1{,}45 & &
\end{array}$$

Es ist daher die zweite transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1{,}45x^2 - 6{,}6325x + 0{,}024125 = 0,$$

woraus man:

$$\frac{a_3}{1000} = -\frac{0{,}0241\ldots}{-6{,}63\ldots} = 0{,}003$$

findet, wodurch $x = 0{,}853$ wird. Wir vermindern sofort die Wurzeln der letzten Gleichung um 0,003 und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr}
{}_{2} & 1, & -1{,}45 & -6{,}6325 & +0{,}024125 \\
0{,}03] & & -1{,}447 & -6{,}636841 & +0{,}004214477 \\
 & & -1{,}444 & -6{,}641173 & \\
 & & -1{,}441 & &
\end{array}$$

die 3[te] transformirte Gleichung ist also:

$$x^3 - 1{,}441x^2 - 6{,}641173x + 0{,}004214477 = 0,$$

welche die 4[te] Dezimalstelle:

$$\frac{a_4}{10000} = -\frac{0{,}0042\ldots}{-6{,}64\ldots} = 0{,}0006$$

liefert; dies gibt $x = 0{,}8536$ und wenn wir die Wurzeln der letzte Gleichung wieder um 0,0006 vermindern:

$_3$ 1	— 1,441	— 6,641173	+ 0,004214477
0,06]	— 1,441	— 6,642038	+ 0,000229254
	— 1,44	— 6,64290	
	— 1,44		

als transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1,4x^2 - 6,64290x + 0,000229254 = 0,$$

aus welcher die 5te Dezimalstelle:

$$\frac{a_5}{100000} = -\frac{0,000229\ldots}{-6,64\ldots} = 0,00003$$

folgt; es ist also $x = 0,85363$.

Wir haben hier im 2ten und 3ten Coefficienten bereits Dezimalstellen weggelassen; denn da wir im letzten Gliede 9 richtige Dezimalstellen brauchen, der nächste Operationsfaktor 0,00003 jedoch schon 5 Dezimalstellen hat, so bedürfen wir im vorletzten Coefficienten nur $9 - 5 = 4$ Stellen und eine zur Correctur, also im ganzen nur 5, im 2ten Coefficienten daher $5 - 5 + 1 = 1$ Stelle. Vermindern wir jetzt die Wurzeln der letzten Gleichung um 0,00003, so folgt:

$_4$ 1,	— 1,4	— 6,64290	+ 0,000229254
0,03]	— 1,4	— 6,64294	+ 0,000029966
		— 6,6430	

somit als nächste transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1,4x^2 - 6,6430x + 0,000029966 = 0,$$

in welcher, da der nächste Operationsfaktor 6 Dezimalstellen hat, der vorletzte Coefficient nur mit 4, der zweite eigentlich mit $4 - 6 + 1 = -1$ Stellen anzusetzen ist, so dass wir in diesem auch die Einheit nicht mehr brauchen. Daraus folgt, dass der vorletzte Coefficient keine Aenderung mehr erleidet, und von jetzt an verwandelt sich das Aufsuchen der noch fehlenden vier letzten Dezimalstellen der Wurzel, wie eine leichte Ueberlegung, oder der Versuch, die folgenden Transformationen wirklich vorzunehmen, lehrt, in eine einfache Division:

$$0,000029966 : 6,643 = 0,000004511$$

3394
73
7

Wurzel ist somit auf 9 Dezimalstellen richtig: $x = 0,853634511$.

Berechnen wir eben so die zweite in dem Intervalle $\{4;\ 5\}$ liegende positive Wurzel. Wenn, wie es hier der Fall ist, die Wurzel einen ganzen Bestandtheil hat, so ist es kaum nöthig, sie in engere Grenzen einzuschliessen und die Zehntel noch nach §. 116 zu suchen, da sich diese immer schon wenigstens sehr nahe durch die Horner'sche Methode ergeben. Die folgende Rechnung wird nun ohne weitere Bemerkung verständlich sein; die successiven Transformationen sind durch einen Horizontalstrich getrennt; die letzten zunächst über einem Strich stehenden Zahlen jeder Verticalcolumne sind die Coefficienten der transformirten Gleichung und für die folgende Transformation nicht neuerdings angesetzt.

	1	— 4	— 2	+ 4	$x = 4{,}249140538$
4]		0	— 2	— 4*)	
		+ 4	+ 14		
		+ 8		4 : 14 = 0,2	
0,2]		+ 8,2	+ 15,64	— 0,872	
		8,4	17,32		
		8,6		0,872 : 17, . . . = 0,04	
0,04]		+ 8,64	+ 17,6656	— 0,165376	
		8,68	18,0128		
		8,72		0,165 . . . : 18 = 0,009	
$0{,}0^{2}9$]		+ 8,729	+ 18,091361	— 0,002553751	
		8,738	18,170003		
		8,747		0,00255 . . . : 18 = 0,0001	
$0{,}0^{3}1$]		+ 8,747	+ 18,170878	— 0,000736662	
			18,17175		
				0,000736 ... : 18 = 0,00004	
$0{,}0^{4}4$]		+ 8,7	+ 18,17210	— 0,000009778	
			18,1724		

0,000009778 : 18,17 = 0,000000538
693
148

Die Wurzel ist demnach $x = 4{,}249140538$.

Die dritte in dem Intervalle $\{-1,\ -2\}$ liegende Wurzel berechnen wir endlich aus der Gleichung $f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ wie folgt:

*) Dieser Zeichenwechsel rührt von der zwischen 0 und 4 liegenden Wurzel 0,8 . . . her.

	1	+ 4	− 2	− 4	$x = 1{,}102775049$
1]		5	+ 3	− 1	
		6	9		
		7		1 : 9 = 0,1	
0,1]		7,1	9,71	− 0,029	
		7,2	10,43		
		7,3		0,029 : 10 = 0,002	
^{2}0,02]		7,302	10,444604	− 0,008110792	
		7,304	10,459212		
		7,306		0,0081 : 10,4 = 0,0007	
^{3}0,07]		7,307	10,464327	− 0,000785763	
		7,31	10,46944		
				0,00078 : 10 = 0,00007	
^{4}0,07]			10,46995	− 0,000052867	
			10,4705		

0,000052867 : 10,4705 = 0,000005049
5145
957

somit die dritte Wurzel $x = -1{,}102775049$. Die Summe der drei Wurzeln ist $= 4$, wie es sein soll.

128. Die Regula falsi. Man versteht hierunter eine Auflösungsmethode der Gleichungen, welche aus zwei bekannten genäherten Werthen der Wurzel und den Substitutionsresultaten derselben einen genaueren Werth finden lehrt. Es seien:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0 \tag{1}$$

die gegebene Gleichung, x_1 die gesuchte Wurzel und a_1, a_2 zwei genäherte Werthe derselben (die Hypothesen), so kann man $x_1 = a_1 + \delta_1$ und $x_1 = a_2 + \delta_2$ setzen, wo also δ_1, δ_2 die Fehler der Hypothesen sind und kleiner als 1 angenommen werden. Substituiren wir $a_1 = x_1 - \delta_1$ und $a_2 = x_1 - \delta_2$ in die gegebene Gleichung, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} f(a_1) &= f(x_1 - \delta_1) = f(x_1) - \delta_1 f'(x_1) + \delta_1^2 \frac{f''(x_1)}{2!} - \ldots \pm \delta_1^m \frac{f^{(m)}(x_1)}{m!} \\ f(a_2) &= f(x_1 - \delta_2) = f(x_1) - \delta_2 f'(x_1) + \delta_2^2 \frac{f''(x_1)}{2!} - \ldots \pm \delta_2^m \frac{f^{(m)}(x_1)}{m!}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Beachtet man nun, dass, weil x_1 die gesuchte Wurzel, $f(x_1) = 0$ ist, und dass δ_1, δ_2 kleine Grössen sind, deren höhere Potenzen wir, da es sich bloss um eine Näherung handelt, vernachlässigen können, so gehen die letzten Gleichungen über in:

$$f(a_1) = -\delta_1 f'(x_1) \text{ und } f(a_2) = -\delta_2 f'(x_1),$$

aus welchen durch Division:

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \tag{3}$$

folgt, eine Gleichung, welche zeigt, dass die Substitutionsresultate zweier genäherten Werthe der Wurzel sich näherungsweise verhalten, wie die Fehler dieser Werthe, eine Regel, welche man gewöhnlich so ausspricht: Die Fehler der Resultate verhalten sich wie die Fehler der Hypothesen.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass dieser Satz immer nur näherungsweise gilt und um so richtiger ist, je kleiner die Fehler δ_1, δ_2 der Hypothesen sind. Aus (3) folgt nun:

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{x_1 - a_1}{x_1 - a_2},$$

woraus man:

$$x_1 = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{f(a_1) - f(a_2)} = a_1 + \frac{(a_2 - a_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)} \tag{4}$$

als genaueren Werth der Wurzel zieht. Verbindet man diesen mit einem der früheren Näherungswerthe, a_1 oder a_2, je nachdem numerisch $f(a_1) <$ oder $> f(a_2)$ ist, oder auch mit einem anderen plausibleren Werthe und wiederholt die Rechnung nach Formel (4), so erhält man abermals einen genaueren Werth u. s. f. Für den Praktiker ist diese Methode ihrer Einfachheit wegen und namentlich desshalb von grossem Werthe, weil sie auch auf transcendente Gleichungen unverändert Anwendung findet, was darin seinen Grund hat, dass, wie wir später sehen werden, jede Funktion $f(x)$ in die Form der Glgn. (2) entwickelt werden kann, nur mit dem hier nicht in Betracht kommenden Unterschiede, dass der rechte Theil der Glgn. (2) eine unendliche Reihe wird, wenn $f(x)$ eine transcendente Funktion ist.

1[tes] Beispiel. Berechnen wir die zwischen 4 und 5 liegende Wurzel der Gleichung $x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$, so erhalten wir:

für $a_1 = 4$	$f(a_1) = -4$	
$a_2 = 5$	$f(a_2) = +19,$	somit $x_1 = 4{,}2$
für $a_1 = 4$	$f(a_1) = -4$	
$a_2 = 4{,}2$	$f(a_2) = -0{,}872$	$x_1 = 4{,}25$
für $a_1 = 4{,}2$	$f(a_1) = -0{,}872$	
$a_2 = 4{,}25$	$f(a_2) = +0{,}015625$	$x_1 = 4{,}2491$
für $a_1 = 4{,}2491$	$f(a_1) = -0{,}00073667$	
$a_2 = 4{,}25$	$f(a_2) = +0{,}015625$	$x_1 = 4{,}24914052$
für $a_1 = 4{,}2491$	$f(a_1) = -0{,}00073667$	
$a_2 = 4{,}24914052$	$f(a_2) = -0{,}00000033$	$x_1 = 4{,}249140538$

so wie oben. Um auch die Anwendung dieser Methode auf transcendente Gleichungen zu erläutern, wählen wir als

2tes Beispiel die Gleichung $f(x) = x \log x - 17 = 0$, unter log briggische Logarithmen verstanden. Man findet mit Hilfe der Logarithmentafeln sehr leicht, dass x zwischen 14 und 15 liegt und setzt also:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 14 & f(a_1) = -0{,}954 & \\ a_2 = 15 & f(a_2) = +0{,}641 & x = 14{,}6 \\ a_1 = 14{,}6 & f(a_1) = -0{,}000448 & \\ a_2 = 14{,}7 & f(a_2) = +0{,}159564 & x = 14{,}600280. \end{array}$$

Für diesen Werth von x reducirt sich der Ausdruck $x \log x - 17$ in den ersten 6 Dezimalstellen schon auf 0 und die Näherung lässt sich daher, wenn man nur mit siebenstelligen Logarithmen rechnet, nicht weiter treiben, da mit solchen der Werth von $x \log x$ sich nur mit 6 Dezimalstellen richtig ergibt.

3tes Beispiel. Man suche den Bogen x aus der Gleichung:

$$f(x) = x - 0{,}2 \sin x - \text{arc}(82^0\ 24'\ 37'',85) = 0.$$

Aus einer Tafel, welche die Längen der Kreisbogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt enthält, findet man zunächst:

$$\text{arc}(82^0\ 24'\ 37'',85) = 1{,}4383348,$$

so dass die Gleichung eigentlich lautet:

$$f(x) = x - 0{,}2 \sin x - 1{,}4383348 = 0;$$

beachtet man nun, dass $x > 82^0$ sein muss und in dieser Gegend $\sin x$ nahe $= 1$ ist, so ersieht man sogleich aus derselben Tafel, dass x zwischen 93^0 und 94^0 liegen muss, da $\text{arc}\,93^0 = 1{,}623\ldots$, und $\text{arc}\,94^0 = 1{,}641\ldots$ ist. Man setze also:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 93^0, \text{ so wird } & f(a_1) = -0{,}01490 \\ a_2 = 94^0, \quad - \quad - & f(a_2) = +0{,}00277, \end{array}$$

und man erhält, da $a_2 - a_1 = 1^0$ ist, nach (4) als genaueren Werth:

$$x = 93^0 + 1^0 . \frac{-0{,}01490}{-0{,}01767} = 93^0 + 0^0{,}843 = 93^0\ 50',6.$$

Setzen wir ferner:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 93^0\ 50', \text{ so wird } & f(a_1) = -0{,}0001867 \\ a_2 = 93^0\ 51', \quad - \quad - & f(a_2) = +0{,}0001080 \text{ und hiemit:} \end{array}$$

$$x = 93^0\ 50' + 1' . \frac{-0{,}0001867}{-0{,}0002947} = 93^0\ 50'\ 38'',01,$$

welcher Werth bis auf eine Einheit in der 7ten Dezimalstelle der Gleichung Genüge leistet.

Berechnung gleicher und nahe gleicher Wurzeln.

129. Enthält eine Gleichung wiederholte Wurzeln, so kann man nach der in §. 100 entwickelten Theorie aus derselben andere Gleichungen ableiten, welche entweder alle Wurzeln, aber jede nur einmal, oder bloss die ungleichen Wurzeln, oder bloss die wiederholten Wurzeln, jede nur einmal enthält und welche sofort nach den in den vorhergehenden §§. dargestellten Methoden aufgelöst werden können. Man kann jedoch auch die Aufgabe stellen, eine wiederholte Wurzel unmittelbar aus der gegebenen Gleichung zu berechnen. Dass die obigen Methoden nicht ohne weiteres auch auf solche Wurzeln angewendet werden können, ist leicht einzusehen. Sowohl bei Newton's als Horner's Methode wird die Verbesserung eines schon genäherten Werthes a einer Wurzel x_1 durch den Quotienten $-f(a):f'(a)$ gegeben; ist nun diese Wurzel eine wiederholte, so ist nebst $f(x_1)$ auch $f'(x_1)=0$ und in den successiven Näherungen convergiren sowohl Zähler als Nenner jenes Quotienten gegen die Nulle, wodurch derselbe unfähig wird, die gesuchte Verbesserung auszudrücken. Die Regula falsi würde, wie dies aus den Glgn. (2), §. 128, hervorgeht, die Auflösung einer Gleichung vom ν^{ten} Grade erfordern, wenn die Wurzel in der gegebenen Gleichung νmal vorkommt, wodurch diese Methode auch unbrauchbar wird. Die Horner'sche Methode lässt sich hingegen mit geringen Modificationen auch auf diesen Fall anwenden.

Sei nämlich $x=a+w$ eine wiederholte Wurzel der gegebenen Gleichung und a ein genäherter Werth derselben. Vermindern wir die Wurzeln der gegebenen Gleichung um a, so erhalten wir als transformirte Gleichung:

$$\varphi(w)=V_0w^m+V_1w^{m-1}+\ldots+V_{m-4}w^4+V_{m-3}w^3+ \\ +V_{m-2}w^2+V_{m-1}w+V_m=0, \qquad (1)$$

welche nun die Wurzel w mehrmals enthält.

Ist nun diese Wurzel eine doppelte, so ist nebst $\varphi(w)$ auch noch $\varphi'(w)=0$, d. h. es besteht die Gleichung:

$$\varphi'(w)=mV_0w^{m-1}+\ldots+3V_{m-3}w^2+2V_{m-2}w+V_{m-1}=0, \qquad (2)$$

in welcher wohl $V_{m-1}=f'(a)$, nicht aber $2V_{m-2}=f''(a)$ gegen Null convergirt, weil die Wurzel nur als zweifache vorausgesetzt wurde und somit der Gl. $\varphi'(w)=0$ nur einmal zukommt. Man kann daher

näherungsweise $2V_{m-2}w + V_{m-1} = 0$ setzen, woraus als genäherter Werth:

$$w = -\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$$

folgt. Dieser Ausdruck tritt daher bei einer doppelten Wurzel an die Stelle des Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$ in §. 126. Um daher die successiven Dezimalstellen einer doppelten Wurzel zu erhalten, wird man in den aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen den vorletzten Coefficienten durch den vorvorletzten dividiren und vom Quotienten die Hälfte nehmen.

Ist die Wurzel eine dreifache, so besteht nebst der Gl. (2) auch noch die folgende:

$$\varphi''(w) = m(m-1)V_0 w^{m-2} + \ldots + 2.3V_{m-3}w + 2V_{m-2} = 0,$$

aus welcher sofort näherungsweise $2.3V_{m-3}w + 2V_{m-2} = 0$, d. i.

$$w = -\frac{V_{m-2}}{3V_{m-3}}$$

folgt; die successiven Dezimalstellen einer dreifachen Wurzel ergeben sich daher, wenn man den drittvorletzten Coefficienten durch den viertvorletzten dividirt und vom Quotienten ein Drittel nimmt.

Auf diese Weise fortfahrend kommt man zu dem Schlusse, dass sich bei Anwendung des Horner'schen Verfahrens die successiven Dezimalstellen der Wurzel aus den Quotienten:

$$-\frac{V_m}{V_{m-1}},\quad -\frac{1}{2}\frac{V_{m-1}}{V_{m-2}},\quad -\frac{1}{3}\frac{V_{m-2}}{V_{m-3}},\quad \ldots\ldots -\frac{1}{p}\frac{V_{m-p+1}}{V_{m-p}}, \qquad (3)$$

ergeben, je nachdem die Wurzel eine 1, 2, 3, ... oder $p$fache ist.

Ein ausgeführtes Beispiel dürfte bei der Einfachheit der Sache unnöthig sein; man kann z. B. das Verfahren auf die Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

anwenden, welche 2 Paare gleicher Wurzeln enthält, das eine zwischen 1,6 und 1,7, das andere zwischen $-0,6$ und $-0,7$ (nämlich $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$).

180. Man kann die obigen Ausdrücke (3) noch in einer anderen Form darstellen. Nehmen wir zuerst an, die fragliche Wurzel sei eine doppelte, so enthält auch die Gl. (1) im vor. §. die Wurzel w zweimal; betrachten wir nun w als eine kleine Grösse erster Ordnung, so sind die drei letzten Glieder der Gl. (1) von der 2ten, die übrigen jedoch

von höherer Ordnung, so dass wir, mit Vernachlässigung dieser Glieder, w aus der Gleichung:

$$V_{m-2}w^2 + V_{m-1}w + V_m = 0$$

näherungsweise bestimmen können. Nebst dieser besteht aber noch, weil w eine doppelte Wurzel, näherungsweise die Gleichung:

$$2V_{m-2}w + V_{m-1} = 0$$

aus welcher der bereits oben für w gefundene Werth $-\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$ folgt; eliminirt man aber aus beiden letzten Gleichungen die Grösse V_{m-2}, so erhält man $w = -\frac{2V_m}{V_{m-1}}$; so dass sich also aus beiden Ausdrücken:

$$-\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} \text{ und } -\frac{2V_m}{V_{m-1}}$$

nahe derselbe genäherte Werth für w ergeben muss und zwar werden die beiden Werthe einander um so näher kommen, je kleiner w ist.

Ist die Wurzel eine dreifache, so bestehen näherungsweise die Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_{m-3}w^3 + V_{m-2}w^2 + V_{m-1}w + V_m &= 0, \\ 3V_{m-3}w^2 + 2V_{m-2}w + V_{m-1} &= 0, \\ 6V_{m-3}w + 2V_{m-2} &= 0, \end{aligned}$$

deren letzte den schon oben gefundenen Ausdruck für $w = -\frac{V_{m-2}}{3V_{m-3}}$ liefert; aus den beiden anderen erhält man durch successive Elimination von V_{m-3} und V_{m-2} noch die Ausdrücke:

$$w = -\frac{V_{m-1}}{V_{m-2}} \text{ und } w = -\frac{3V_m}{V_{m-1}}.$$

Bei einer 4fachen Wurzel würde man auf demselben Wege für w die Ausdrücke:

$$-\frac{V_{m-3}}{4V_{m-4}},\quad -\frac{2V_{m-2}}{3V_{m-3}},\quad -\frac{3V_{m-1}}{2V_{m-2}},\quad -\frac{4V_m}{V_{m-1}}$$

finden u. s. w. und immer kommen die numerischen Werthe dieser verschiedenen Ausdrücke einander um so näher, je kleiner w schon ist.

131. Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die Horner'sche Methode auch auf die Trennung und gleichzeitige Berechnung nahe gleicher Wurzeln mit Vortheil anzuwenden.

Nehmen wir an, eine Gleichung besitze zwei nahe gleiche Wurzeln, welche den ganzen Bestandtheil a_0 und die r ersten Dezimalstellen a_1, a_2, a_3, ... a_r gemeinschaftlich haben, so dass sich dieselben erst in

der $(r+1)^{ten}$ Stelle trennen. Hat man sich nun durch die Analyse der Gleichung, etwa nach dem Sturm'schen Lehrsatze, den gemeinschaftlichen Näherungswerth $a_0 + \frac{a_1}{10}$ verschafft, so vermindere man zuerst die Wurzeln der Gleichung um diese Grösse und erhält sofort die übrigen gemeinschaftlichen Wurzelziffern aus den successiven transformirten Gleichungen mittelst des Quotienten $-\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$, indem in Bezug auf diese Stellen die beiden Wurzeln offenbar als gleiche zu betrachten sind; die so erhaltenen Dezimalziffern müssen mit jenen übereinstimmen, welche der Quotient $-\frac{2V_m}{V_{m-1}}$ gibt, was als Probe gilt, dass dieselben beiden Wurzeln angehören. Auf diese Weise fährt man fort bis zu jener Dezimalstelle, an welcher sich beide Wurzeln trennen; diese wird sich dadurch verrathen, dass sie sich nicht gleichlautend aus den beiden obigen Quotienten ergibt, oder, wenn dies bisweilen noch der Fall ist, die aus $-\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$ sich ergebende Dezimalziffer einen Zeichenwechsel des letzten Gliedes bewirkt, was offenbar andeutet, dass man über die kleinere Wurzel bereits hinweggegangen ist. Die folgenden ungleichen Dezimalstellen beider Wurzeln ergeben sich nun auf gewöhnliche Weise aus dem Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$, wobei nur die ersten ungleichen Ziffern a_{r+1} und a'_{r+1} beider Wurzeln einige Versuche erfordern werden; für a_{r+1} ist offenbar die grösste Zahl zu nehmen, für welche das Zeichen des letzten Gliedes der transformirten Gleichung, welche auf jene folgt, die die letzte gemeinschaftliche Dezimalstelle geliefert hat, noch ungeändert bleibt; für a'_{r+1} die grösste Zahl, für welche dieses Glied noch einen Zeichenwechsel erleidet.

Aehnlich ist der Vorgang, wenn die Gleichung in einem bestimmten Intervalle mehr als zwei, z. B. p nahe gleiche Wurzeln besitzt. Bezeichnet wieder $a_0 + \frac{a_1}{10}$ einen gemeinschaftlichen Näherungswerth und hat man zunächst die Wurzeln der Gl. um $a_0 + \frac{a_1}{10}$ vermindert, so ›ben sich die folgenden gemeinschaftlichen Wurzelziffern aus dem ›tienten $-\frac{V_{m-p+1}}{p \cdot V_{m-p}}$ und müssen mit den aus dem Quotienten $-\frac{pV_m}{V_{m-1}}$ eleiteten stimmen. Die Wurzeln trennen sich an der Stelle, bei cher diese Uebereinstimmung aufhört oder ein Zeichenwechsel im

letzten Gliede andeutet, dass die kleinste Wurzel überschritten ist, welche sodann aus der letzten transformirten Gleichung mittelst des gewöhnlichen Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$ weiter entwickelt werden kann. Aus derselben transformirten Gleichung erhält man die übrigen Wurzeln ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die im letzten Gliede eintretenden Zeichenwechsel, wenn sämmtliche p Wurzeln an der ersten auf die letzte gemeinschaftliche Ziffer folgenden Stelle verschiedene Ziffern haben. Haben aber einige dieser Wurzeln an der genannten Stelle wieder gemeinschaftliche Ziffern, so wird sich die Abtrennung der einzelnen Gruppen durch den Verlust mehrerer Zeichenwechsel — übereinstimmend mit dem Budan'schen Lehrsatze — verrathen und es ist dann das Verfahren der nahe gleichen Wurzeln wieder auf eine jede solche einzelne Gruppe anzuwenden. — Da übrigens dieser Fall in der Praxis nicht leicht vorkommt, so möge diese kurze Andeutung hier genügen, indem einige die Rechnung abkürzende Kunstgriffe dem aufmerksamen Rechner sich theils selbst darbieten, theils nur bei grösserer Uebung geläufig bleiben.

Als Beispiel wollen wir die bereits in §. 123 analysirte Gleichung: $x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0$ wählen, welche zwei nahe gleiche Wurzeln in dem Intervalle $\{0,4$ und $0,5\}$ besitzt; vermindern wir daher zunächst die Wurzeln der Gleichung um 0,4 und verfahren sodann nach obiger Vorschrift, so steht die Rechnung so:

	1 + 40	+ 185	— 198	+ 48
0,4]	40,4	201,16	117,536	0,9856
	40,8	217,48	30,544	
	41,2	233,96	$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,06$,	$\frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,06$
	41,6			
0,06]	1 + 41,66	+ 236,4596	— 16,356424	+ 0,00421456
	41,72	238,9628	2,018656	
	41,78	241,4696	$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,004$,	$\frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,004$
	41,84			
0,04]	1 + 41,85	+ 241,6370	— 1,052108	+ 0,00000613
		241,8044	0,084890	
		241.9718		

$$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,0001, \quad \frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,00007$$

Bis zur 3ten Dezimalstelle geben die beiden Quotienten $\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$ und $\frac{2V_m}{V_{m-1}}$ dieselbe Ziffer; es sind daher 0,464 die gemeinschaftlichen Anfangsziffern beider Wurzeln, welche sich in der 4ten Dezimalstelle trennen. Vermindert man nun die Wurzeln der letzten transformirten Gleichung um 0,0001, so bleibt das letzte Glied positiv; vermindert man um 0,0002, so wird es negativ und wird abermals positiv, wenn man um 0,0003 vermindert. Daher ist 1 die vierte Stelle der einen, 2 die der anderen Wurzel, welche somit jetzt getrennt sind und nach dem gewöhnlichen Verfahren weiter entwickelt werden können.

Für die kleinere Wurzel hat man:

3	1	+ 42	+ 241,972	— 0,08489	+ 0,00000613
0,01]			+ 241,98	— 0,06069	+ 0,00000006
				— 0,03649	

Das letzte Glied durch das vorletzte dividirt, gibt 0,000002 und die Wurzel heisst also auf 6 Dezimalstellen genau: 0,464102.

Für die andere Wurzel steht die Rechnung wie folgt:

3	1	+ 42	+ 241,972	— 0,08489	+ 0,00000613
0,02]			241,98	— 0,03649	— 0,00000117
			241,99	+ 0,01191	
			242		
4					
0,04			242	+ 0,0216	— 0,00000031
				0,0313	

Die Wurzel ist demnach = 0,464249.

B. Gleichungen mit zwei und mehreren Unbekannten.

132. Wenn zwischen zwei Unbekannten x, y zwei algebraische Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grade gegeben sind, so können dieselben, indem man sie nach Potenzen der einen Unbekannten ordnet, immer von folgender Form vorausgesetzt werden:

$$= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0, \quad (1)$$

$$= B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + B_3 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} x + B_m = 0, \quad (2)$$

die Coefficienten A und B ganze rationale Funktionen der zweiten bekannten y sind. Der Grad einer solchen Gleichung bestimmt sich rch die höchste vorkommende Exponentensumme der in einem Gliede ltiplicirten Potenzen von x und y, wobei auch einer der Exponen-

ten Null sein kann. Eine **vollständige** Gleichung des n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten, wie (1), enthält daher alle Potenzen von x und y, welche diesen Grad nicht übersteigen, so wie alle Produkte dieser Unbekannten, in welchen die Summe ihrer Exponenten die Zahl n nicht überschreitet. Fehlen einige dieser Glieder, so heisst die Gleichung **unvollständig**.

Sollen demnach die Gleichungen (1) und (2), wie vorausgesetzt wurde, beziehungsweise vom n^{ten} und m^{ten} Grade sein, so dürfen die Coefficienten A_0, B_0, y nicht enthalten; ferner sind A_1, B_1 ganze Funktionen von y höchstens vom 1sten; A_2, B_2 höchstens vom 2ten; A_3, B_3 höchstens vom 3ten u. s. w., A_n, B_m beziehungsweise höchstens vom n^{ten} und m^{ten} Grade. Da A_0, B_0 von y unabhängig sind, so können wir die Gleichungen durch diese Coefficienten dividirt denken, was wir in der Folge als geschehen annehmen wollen.

Jedes System von Werthen der beiden Unbekannten, $x=\alpha$, $y=\beta$, welche, in (1) und (2) substituirt, diesen Gleichungen Genüge leisten, heisst eine **Auflösung** oder ein **Wurzelpaar**. Ueberschreiten diese Gleichungen den ersten Grad, so lassen sie immer mehrere Auflösungen zu, deren Anzahl jedoch, wie später gezeigt werden wird, nicht grösser sein kann, als das Produkt mn Einheiten hat. Man gelangt zu diesen Auflösungen, indem man aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, etwa x, **eliminirt**, d. h. aus ihnen eine neue Gleichung ableitet, welche nur y enthält und aus welcher sofort die Werthe dieser Unbekannten gefunden werden können, welche in Verbindung mit den korrespondirenden Werthen von x die Gleichungen (1) und (2) identisch machen. Diese Gleichung in y, die sogenannte **Eliminationsgleichung**, muss offenbar die Eigenschaft besitzen, dass sie nicht durch mehr und nicht durch weniger Werthe von y erfüllt wird, als die Gleichungen (1), (2) Auflösungen zulassen.

Sei $x=\alpha$, $y=\beta$ ein Wurzelpaar der Glgn. (1), (2), und denken wir uns den Werth $y=\beta$ aus der Eliminationsgleichung bereits gefunden und in beide Gleichungen substituirt, so enthalten dieselben nur mehr die Unbekannte x und müssen offenbar für $x=\alpha$ **beide** identisch werden, somit den gemeinschaftlichen Wurzelfaktor $(x-\alpha)$ besitzen. Hieraus folgt, dass man die zu irgend einem Wurzelwerthe von y gehörigen Werthe von x finden wird, wenn man β statt y in d[illegible] Polynomen (1) und (2) substituirt, zwischen beiden den grössten g[illegible] meinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ sucht und die Gl. $\varphi(x)=0$ auflöst. Je[illegible] Wurzel der Gl. $\varphi(x)=0$ gibt in Verbindung mit $y=\beta$ eine Au[illegible] lösung der Gleichungen (1) und (2). Beachtet man die oben angeführ[illegible]

wesentliche Eigenschaft der Eliminationsgleichung, so folgt aus dem eben Gesagten, dass, wenn die Gl. $\varphi(x) = 0$ vom k^{ten} Grade ist, die Wurzel β der Eliminationsgleichung $k$mal zukommen muss, und umgekehrt.

Wie man sieht, kommt es daher nur noch auf die Bildung der Eliminationsgleichung an, wozu wir verschiedene Methoden besitzen.

133. Das aus den Elementen unter dem Namen der Substitutionsmethode bekannte Verfahren, aus zwei Gleichungen des ersten Grades eine Unbekannte zu eliminiren, lässt sich auch auf höhere Gleichungen mit gutem Erfolge anwenden. Es besteht bekanntlich darin, aus der einen Gleichung, etwa (1), den Werth von x in Funktion von y ausgedrückt zu nehmen und in (2) zu substituiren, wodurch man eine Gleichung in y erhält, welche sämmtliche Werthe dieser Unbekannten darbieten wird, für welche beide Gleichungen zusammen bestehen können.

Da aber die Gleichung (1), nach x aufgelöst, n Werthe für diese Unbekannte liefert, etwa:

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y), \ldots x_n = \varphi_n(y),$$

so haben wir jede dieser Wurzeln in (2) zu substituiren; wir erhalten dadurch n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= x_1^m + B_1 x_1^{m-1} + B_2 x_1^{m-2} + \ldots + B_m = 0 \\ Y_2 &= x_2^m + B_1 x_2^{m-1} + B_2 x_2^{m-2} + \ldots + B_m = 0 \\ Y_3 &= x_3^m + B_1 x_3^{m-1} + B_2 x_3^{m-2} + \ldots + B_m = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= x_n^m + B_1 x_n^{m-1} + B_2 x_n^{m-2} + \ldots + B_m = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und jeder Werth von y, welcher irgend eine dieser Gleichungen identisch macht, liefert eine Auflösung der Gleichungen (1), (2); und zugleich kann kein anderer Werth von y, der nicht eine Wurzel irgend einer dieser Gleichungen ist, eine Auflösung sein. Multipliciren wir daher die Gleichungen (3), so erhalten wir eine neue Gleichung in y:

$$Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \ldots Y_n = 0, \qquad (4)$$

welche offenbar für alle Werthe von y identisch wird, welche irgend einer der Glgn. (3) genügen, aber auch nur für diese und somit die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Nun lassen sich zwar die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gl. (1), welche in (4) erscheinen, allgemein nicht finden; es ist aber die linke Seite der Gl. (4) eine symmetrische Funktion dieser Wurzeln, da durch Vertauschung der Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ unter einander die Faktoren wechselseitig in einander übergehen, wodurch nur die Ordnung derselben, nicht aber der Werth des Produktes geändert wird. Dieses wird daher, gehörig entwickelt, verschiedene in die Coefficienten B_1,

$B_2 \ldots B_m$ multiplicirte symmetrische Funktionen der Wurzeln x_1, $x_2, \ldots x_n$ der Gl. (1) enthalten, welche sofort, ohne diese Wurzeln zu kennen, durch die Coefficienten $A_1, A_2 \ldots A_n$ der Gl. (1) nach den in §§. 101, 102 und 103 entwickelten Vorschriften rational ausgedrückt werden können.

Das Verfahren ist so einfach, dass ein Beispiel zur Verdeutlichung genügen wird. Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x^2 + (2y - 10)\,x + y^2 - 10y + 21 = 0, \qquad (\alpha)$$
$$x^2 - (2y - 6)\,x + y^2 - 6y + 5 = 0. \qquad (\beta)$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gl. (α), da sie nach x vom 2ten Grade ist, mit x_1, x_2, und substituiren wir selbe in (β), so kommt:

$$Y_1 = x_1^2 - (2y - 6)\,x_1 + y^2 - 6y + 5 = 0,$$
$$Y_2 = x_2^2 - (2y - 6)\,x_2 + y^2 - 6y + 5 = 0;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 x_2^2 - (2y-6)(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1) + (y^2 - 6y + 5)(x_1^2 + x_2^2) &+ \\ + (2y - 6)^2 x_1 x_2 & \\ - (2y - 6)(y^2 - 6y + 5)(x_1 + x_2) &+ \\ + (y^2 - 6y + 5)^2 & \end{aligned}\right\} = 0. \quad (\gamma)$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -(2y - 10) \\ x_1 x_2 &= y^2 - 10y + 21 \end{aligned}\right\} \text{nach §. 92,}$$

folglich:

$$x_1^2 x_2^2 = y^4 - 20y^3 + 142y^2 - 420y + 441,$$
$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -2y^3 + 30y^2 - 142y + 210,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2y^2 - 20y + 58.$$

Diese Ausdrücke in (γ) substituirt und reducirt, erhält man als Eliminationsgleichung:

$$y^4 - 16y^3 + 92y^2 - 224y + 192 = 0.$$

Als Wurzeln derselben findet man:

$$y = 2,\ 6,\ 4,\ 4$$

und als zugehörige Werthe von x nach dem im vorigen §. angegebenen Verfahren:

$$x = 1,\ 1,\ 3,\ -1.$$

Diese Methode wird leider ziemlich beschwerlich, wenn die Gleichungen den zweiten Grad übersteigen; sie ist übrigens die einzige, welche immer, ohne besondere Vorsicht, die richtige Eliminationsgleichung liefert.

134. Es kann der Fall eintreten, dass die Eliminationsgleichung (4) identisch wird für jeden Werth von y, wenn nämlich einer oder mehrere der Faktoren Y, d. h. eine oder mehrere der Gleichungen (3) für jeden Werth von y identisch $= 0$ werden. Hiezu wird erfordert, dass einer oder mehrere der Wurzelwerthe x_1, x_2, ... x_n der Gl. (1) auch die Gl. (2) identisch machen, d. h. dass die beiden Gleichungspolynome P und Q einen oder mehrere gemeinschaftliche Faktoren von der Form $x - x_0$ besitzen, wo x_0 im Allgemeinen eine Funktion von y ist, jedoch auch eine constante Grösse sein kann; die gegebenen Gleichungen (1), (2) haben dann die Form:

$$F \,.\, P' = 0, \quad F \,.\, Q' = 0,$$

wo F eine Funktion von x und y oder bloss von x ist, und werden erfüllt, wenn man $F = 0$ setzt, woraus in jedem Falle eine unendliche Anzahl von Auflösungen hervorgeht. Ausser diesen lassen die gegebenen Gleichungen noch jene Auflösungen in beschränkter Anzahl zu, welche aus dem Systeme der Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$ resultiren; welche Gleichungen demnach für sich zu behandeln sind, nachdem man den gemeinschaftlichen Faktor F, welcher offenbar den Coefficienten sämmtlicher Potenzen von x in beiden Gleichungen zukommen muss, durch Division weggeschafft hat.

Auch kann es geschehen, dass man als Eliminationsgleichung erhält $N = 0$, wo N eine von y unabhängige Grösse; in diesem Falle widersprechen sich die gegebenen Gleichungen und lassen keine Auflösung zu, da eine bestimmte Grösse N nicht $= 0$ sein kann.

Hat endlich eine der gegebenen Gleichungen, z. B. (2), einen bloss von y abhängigen Faktor, ist also von der Form $Q = F(y) \,.\, Q' = 0$, so wird man zur Vereinfachung der Rechnung dieselbe zuerst durch $F(y)$ dividiren, aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q' = 0$ die Unbekannte x eliminiren, und sodann die gefundene Eliminationsgleichung noch mit $[F(y)]^n$ multipliciren, da letztere das Produkt der Gleichungen (3) sein soll, welche in diesem Falle offenbar sämmtlich die Form $F(y) .\, Q' = 0$ haben.

135. Die Eliminationsgleichung, welche aus zwei Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten hervorgeht, ist höchstens vom mn^{ten} Grade.

Dies wird bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, dass kein Glied der Eliminationsgleichung den mn^{ten} Grad überschreiten kann. Nun ist irgend ein Glied derselben, da sie durch Multiplikation der Gleichungen (3) entsteht, offenbar:

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{a}} \,.\, B_{\mathfrak{b}} \,.\, B_{\mathfrak{c}} \,.\, B_{\mathfrak{d}} \ldots B_{\mathfrak{n}} \,.\, x_1^{m-\mathfrak{a}} \,.\, x_2^{m-\mathfrak{b}} \,.\, x_3^{m-\mathfrak{c}} \,.\, x_4^{m-\mathfrak{d}} \ldots x_n^{m-\mathfrak{n}} = M \,.\, N.$$

Es sind aber die Coefficienten $B_{\mathfrak{a}}$, $B_{\mathfrak{b}}$, $B_{\mathfrak{c}}$, ... $B_{\mathfrak{n}}$, ganze Funktionen von y beziehungsweise höchstens vom $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$, $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$, $\mathfrak{c}^{\text{ten}}$, ... $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Grade; folglich ist das Produkt M derselben eine ganze Funktion von y höchstens vom μ^{ten} Grade, wenn wir:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \ldots + \mathfrak{n} = \mu$$

setzen, wo die Zahl μ den Werth mn nicht überschreiten kann, da keine der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{n}$ grösser als m und ihre Anzahl nicht grösser als n ist. Der zweite Faktor N ist in Bezug auf die Grössen x_1, x_2, x_3, ... x_n von der Ordnung:

$$m - \mathfrak{a} + m - \mathfrak{b} + m - \mathfrak{c} + \ldots + m - \mathfrak{n} = nm - \mu,$$

gehört also einer symmetrischen Funktion von derselben Ordnung an, welche sich wieder nach §. 102 durch Summen der verschiedenen Potenzen der Wurzeln x_1, x_2, x_3. ... x_n, von der 1sten bis zur $(mn - \mu)^{\text{ten}}$ Potenz ausdrücken lässt. Berücksichtiget man nun, dass die Coefficienten A_1, A_2, A_3, ... A_m der Gleichung (1) Funktionen von y respektive höchstens vom 1sten, 2ten, 3ten, ... m^{ten} Grade sind, so folgt sogleich aus den Gleichungen (III) und (I) des §. 103, dass diese Potenzsummen, durch die eben erwähnten Coefficienten ausgedrückt, Funktionen von y sein werden, welche den $(mn - \mu)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen können. Da solchergestalt der eine Faktor M des in Rede stehenden Gliedes höchstens vom μ^{ten}, der zweite höchstens vom $(mn - \mu)^{\text{ten}}$ Grade ist, so kann das Glied selbst höchstens vom $(mn - \mu + \mu)^{\text{ten}}$, d. i. höchstens vom mn^{ten} Grade sein.

136. Eine andere Eliminationsmethode ist folgende.

Die gegebenen Gleichungen seien:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0, \quad (1)$$
$$B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1} x + B_m = 0, \quad (2)$$

wo wir beide von demselben Grade annehmen, was immer gestattet ist, da sie im Gegenfalle durch Multiplikation der niedrigeren mit einer passenden Potenz von x leicht auf gleichen Grad gebracht werden können. Multiplicirt man (1) mit B_0 und (2) mit A_0 und subtrahirt, so erhält man eine neue Gleichung vom $(m-1)^{\text{ten}}$ also niedrigeren Grade:

$$C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + C_3 x^{m-3} + \ldots + C_m = 0, \quad (3)$$

wo, wie leicht einzusehen:

$$C_1 = A_1 B_0 - A_0 B_1, \quad C_2 = A_2 B_0 - A_0 B_2,$$

u. s. w. ist.

Wird aber (1) mit B_m und (2) mit A_m multiplicirt und wieder subtrahirt, so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors x eine zweite Gleichung vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade:

$$D_1 x^{m-1} + D_2 x^{m-2} + D_3 x^{m-3} + \ldots + D_m = 0. \tag{4}$$

Wir haben somit die gegebenen Gleichungen auf zwei andere, (3) und (4), von einem um eine Einheit niedrigeren Grade reducirt, auf welche nun dieselbe Operation wieder angewendet wird, wodurch sich zwei Gleichungen ergeben, die nach x vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade sein werden. Auf diese Weise fortfahrend muss man schliesslich zu zwei Gleichungen des 1sten Grades nach x gelangen, aus welchen man zwei Werthe von x in Funktion von y zieht, welche, einander gleichgesetzt, die gesuchte Gleichung in y liefern. Es ist aber nicht zu übersehen, dass diese Gleichung, welche man hier passender die Final- oder Endgleichung nennen kann, zwar immer die Eliminationsgleichung enthalten muss, in Folge der eingeführten Faktoren jedoch auch Wurzeln aufgenommen haben kann, welche den gegebenen Gleichungen fremd sind.

Beispiel. Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x^2 - (2y+5)x + (y^2+5y+6) = 0, \tag{1}$$
$$x^2 - 4yx \qquad + (4y^2-1) \qquad = 0. \tag{2}$$

Beide Gleichungen subtrahirt, geben:

$$x(2y-5) - 3y^2 + 5y + 7 = 0;$$

hieraus:

$$x = \frac{3y^2 - 5y - 7}{2y - 5}. \tag{3}$$

Die 1ste Gleichung mit $(4y^2-1)$, die zweite mit (y^2+5y+6) multiplicirt und subtrahirt, erhält man:

$$x(3y^2 - 5y - 7) - 4y^3 + 26y + 5 = 0,$$

und hieraus:

$$x = \frac{4y^3 - 26y - 5}{3y^2 - 5y - 7}; \tag{4}$$

beide Werthe von x gleichgesetzt, geben, nach y geordnet:

$$y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24 = 0$$

als Eliminationsgleichung in y, deren Wurzeln 1, 2, 3, 4 sind. Substituirt man diese Werthe in (3) oder (4), so erhält man die zugehörigen Werthe von x, nämlich für:

$$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$x = 3,\ 5,\ 5,\ 7.$$

137. Ist $x = \alpha$, $y = \beta$ ein Wurzelpaar der Gleichungen (1), (2) [§. 132], und man substituirt β statt y in die Gleichungspolynome, so haben dieselben [§. 132] den gemeinschaftlichen Faktor $x - \alpha$, welcher zum Vorschein kommt, wenn man auf beide das Verfahren des grössten gemeinschaftlichen Theilers anwendet, wobei man offenbar zuletzt einen Rest $= 0$ erhält. Hierauf gründet sich eine dritte Eliminationsmethode, die wir noch in Kürze anführen wollen. Man wende auf die beiden Gleichungspolynome das Verfahren des g. g. Theilers an, so wird man zuletzt zu einem Reste $= R$ gelangen, welcher nur mehr y enthält und offenbar für $y = \beta$ verschwinden muss, da für diesen Werth von y die beiden Gleichungspolynome einen gemeinschaftlichen Faktor $x - \alpha$ besitzen; aus demselben Grunde muss aber dieser Rest für jeden Werth von y verschwinden, welcher zu einer Auflösung der gegebenen Gleichungen gehört. Setzt man daher diesen Rest $= 0$, so drückt man dadurch die Bedingung aus, welche jene Werthe von y erfüllen müssen, für welche beide Gleichungen zusammen bestehen können. Die Gleichung $R = 0$ ist daher die gesuchte Endgleichung in y. Aus dieser erhält man sofort die den Glgn. (1), (2) genügenden Werthe von y, welche sodann, in den vorletzten Rest, welcher von der Form $x\varphi(y) + \psi(y)$ sein wird und $= 0$ zu setzen ist, substituirt, die zugehörigen Werthe von x geben.

Zur Erzielung ganzer Quotienten pflegt man bekanntlich bei dem Verfahren des g. g. Theilers eines oder das andere der Dividende mit einem Faktor F zu multipliciren, welcher in unserem Falle eine Funktion von y sein wird; hiedurch können aber in die Finalgleichung fremde, den gegebenen Gleichungen nicht zukommende Wurzeln eingeführt werden. Hat ferner irgend ein Divisor einen von y abhängigen Faktor F', so pflegt man diesen zur Vereinfachung der Rechnung zu unterdrücken, wodurch aber aus der Endgleichung Wurzeln abhanden kommen können. In beiden Fällen ist dann diese nicht die wahre Eliminationsgleichung. Ohne in ein weiteres Detail einzugehen, wird man an der Hand eines leicht zu entwerfenden Schema's ohne Schwierigkeit zu folgenden Schlüssen gelangen:

a) Hat man einen Dividend D mit einem von y abhängigen Faktor F multiplicirt und ist T der zugehörige Divisor, so schliesst die Finalgleichung auch die Auflösungen des Systems der Gleichungen $F = 0$, $T = 0$ in sich, welche demnach, wenn solche existiren, aus der Finalgleichung zu entfernen sind.

b) Hat man aber in einem Divisor einen von y abhängigen Faktor F unterdrückt und ist D der zugehörige Dividend, so werden im All-

gemeinen die aus dem Systeme der Gleichungen $F = 0$, $D = 0$ sich ergebenden Auflösungen, die den gegebenen Gleichungen noch zukommen, in der Finalgleichung fehlen, und diese ist, um die Eliminationsgleichung zu erhalten, mit F^r zu multipliciren, wenn D in Bezug auf x vom r^{ten} Grade ist.

Es ist kaum nöthig zu erinnern, dass die in §. 134 angeführten Bemerkungen bei den zwei letzten Methoden unverändert Anwendung finden.

138. Kann eines von beiden Gleichungspolynomen oder beide in Faktoren zerlegt werden, so wird man die einzelnen Faktoren combiniren und dadurch einfacher zum Ziele gelangen. Sind z. B. die Gleichungen gegeben:

$$(xy - 3)(x - 2) = 0 \text{ und } (2xy^2 + 6)(y + x) = 0,$$

so erhält man:

aus:	$xy - 3 = 0$	und	$2xy^2 + 6 = 0$	als Elim.-Gl.	$y + 1 = 0$
-	$xy - 3 = 0$	-	$y + x = 0$	- - -	$y^2 + 3 = 0$
-	$x - 2 = 0$	-	$2xy^2 + 6 = 0$	- - -	$2y^2 + 3 = 0$
-	$x - 2 = 0$	-	$y + x = 0$	- - -	$y + 2 = 0$

und die vollständige Eliminationsgleichung ist daher:

$$(y + 1)(y^2 + 3)(2y^2 + 3)(y + 2) = 0.$$

Was endlich die Auflösung von Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten betrifft, so lässt sich diese immer auf die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen zurückführen. Wären z. B. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ drei Gleichungen zwischen drei Unbekannten x, y, z, so eliminire man zuerst etwa x aus $A = 0$, $B = 0$ und aus $B = 0$, $C = 0$, wodurch man zwei neue Gleichungen erhält: $D = 0$, $E = 0$, welche nur mehr y und z enthalten, aus welchen wieder etwa y eliminirt werden kann, wodurch sich endlich die Eliminationsgleichung in z ergibt.

SIEBENTES KAPITEL.

UEBER DIE DIFFERENZ- UND SUMMENREIHEN, DIE ARITHMETISCHEN REIHEN, UND UEBER DIE INTERPOLATION DER REIHEN.

139. Es sei:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots .\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots . \tag{1}$$

eine Reihe von Grössen, welche nach irgend einem bekannten oder unbekannten Gesetze aufeinander folgen; zieht man jede Grösse von der nächstfolgenden ab, so erhält man eine Reihe von Differenzen:

$$u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2,\ \ldots .\ u_{n+1} - u_n,$$

welche man die D i f f e r e n z r e i h e und zum Unterschiede von den folgenden die e r s t e D i f f e r e n z r e i h e der H a u p t r e i h e (1) nennt. Man bezeichnet diese Differenzen dadurch, dass man dem abgezogenen Gliede die Charakteristik Δ vorsetzt; es ist demnach:

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ u_2 - u_1 = \Delta u_1,\ \ldots .\ u_{n+1} - u_n = \Delta u_n,$$

und somit:

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3,\ \ldots\ \Delta u_n\ \ldots \tag{2}$$

die erste Differenzreihe.

Mit dieser verfahren wir auf gleiche Weise, indem wir jedes Glied von dem folgenden abziehen und dadurch eine neue Reihe:

$$\Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta u_3 - \Delta u_2,\ \ldots .\ \Delta u_{n+1} - \Delta u_n,\ \ldots .$$

erhalten, welche sofort die erste Differenzreihe der Reihe (2) und die z w e i t e D i f f e r e n z r e i h e der Hauptreihe (1) sein wird. Gemäss der oben eingeführten Bezeichnung haben wir nun $\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta . \Delta u_0$ zu setzen, wofür man Kürze halber $\Delta^2 u_0$ schreibt; so dass also:

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1,\ \ldots\ \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta^2 u_n$$

ist. Dasselbe Verfahren auf die zweite Differenzreihe:

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \Delta^2 u_3,\ \ldots .\ \Delta^2 u_n,\ \ldots . \tag{3}$$

angewendet, liefert die d r i t t e D i f f e r e n z r e i h e:

$$\Delta^3 u_0,\ \Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \Delta^3 u_3,\ \ldots .\ \Delta^3 u_n,\ \ldots .$$

in welcher $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0, \ldots \Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n$ ist. M sieht, wie man auf diese Weise fortfahren und im Allgemeinen e beliebige Anzahl von Differenzreihen aus der Hauptreihe (1) ableiten ka Der Gang der Ableitung erhellt am deutlichsten aus folgendem Schem

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
u_0, & & u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4, & & u_5, & & u_6, \ldots \\
& \Delta u_0 & & \Delta u_1 & & \Delta u_2 & & \Delta u_3 & & \Delta u_4 & & \Delta u_5 \ldots & \\
& & \Delta^2 u_0 & & \Delta^2 u_1 & & \Delta^2 u_2 & & \Delta^2 u_3 & & \Delta^2 u_4 \ldots & & \\
& & & \Delta^3 u_0 & & \Delta^3 u_1 & & \Delta^3 u_2 & & \Delta^3 u_3 \ldots & & & \\
& & & & \Delta^4 u_0 & & \Delta^4 u_1 & & \Delta^4 u_2 \ldots & & & &
\end{array}
$$

u. s. w.

wo irgend ein Glied gefunden wird, wenn man von den zwei darüber stehenden das vorhergehende von dem folgenden abzieht.

Zwischen den Grössen u_0, u_1, u_2, ... der Hauptreihe und den Gliedern der aufeinanderfolgenden Differenzreihen bestehen gewisse allgemeine Beziehungen, welche von der Beschaffenheit der Grössen:

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots$$

ganz unabhängig sind und die wir daher zunächst entwickeln wollen.

140. Es ist:

$$
\begin{aligned}
\Delta u_0 &= u_1 - u_0, \\
\Delta^2 u_0 &= \Delta u_1 - \Delta u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0, \\
\Delta^3 u_0 &= \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = \Delta u_2 - \Delta u_1 - \Delta^2 u_0 \\
&= u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0) \\
&= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \\
\Delta^4 u_0 &= \Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0,
\end{aligned}
$$

u. s. w.

In den Coefficienten dieser Ausdrücke der Differenzen:

$$\Delta u_0, \; \Delta^2 u_0, \; \Delta^3 u_0, \; \Delta^4 u_0, \; \ldots$$

spricht sich das Gesetz der Binomialcoefficienten aus; wir schliessen daher, dass man allgemein haben wird:

$$\Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \binom{n}{3} u_{n-3} + \ldots + (-1)^n u_0. \quad (5)$$

Dass diese Gleichung in der That für jeden Werth von n gelte, lässt sich durch den bekannten Induktionsbeweis leicht nachweisen, indem man zeigt, dass, wenn dieselbe für irgend einen Werth $n = r$ gelte, sie auch für den folgenden Werth $n = r + 1$ richtig sein müsse. Es ist aber:

$$\Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0. \quad (\alpha)$$

Nimmt man nun die Gl. (5) für $n = r$ als richtig an und beachtet, dass $\Delta^r u_1$ aus den Grössen u_1, u_2, u_3, ... u_{r+1} auf dieselbe Art gebildet sein muss, wie $\Delta^r u_0$ aus den Grössen u_0, u_1, u_2, ... u_r, so ist:

$$\Delta^r u_1 = u_{r+1} - \binom{r}{1} u_r + \binom{r}{2} u_{r-1} - \binom{r}{3} u_{r-2} + \ldots + (-1)^r u_1$$

$$\Delta^r u_0 = \qquad u_r - \binom{r}{1} u_{r-1} + \binom{r}{2} u_{r-2} - \ldots - (-1)^r r u_1 + \\ + (-1)^r u_0;$$

substituirt man diese Werthe in (α), so erhält man, da allgemein:

$$\binom{r}{m+1} + \binom{r}{m} =$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(r-m)}{1.2.3\ldots m(m+1)} + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(r-m)+r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(m+1)}{1.2.3\ldots m(m+1)}$$

$$= \frac{[r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)]\,[(r-m)+(m+1)]}{1.2.3\ldots m(m+1)}$$

$$= \frac{(r+1)r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m(m+1)} = \binom{r+1}{m+1} \text{ ist:}$$

$$\Delta^{r+1} u_0 = u_{r+1} - \binom{r+1}{1} u_r + \binom{r+1}{2} u_{r-1} - \binom{r+1}{3} u_{r-2} + \\ + \ldots + (-1)^{r+1} u_0.$$

Allein dieselbe Gleichung ergibt sich auch aus (5), wenn man daselbst $n = r + 1$ setzt, woraus folgt, dass diese Gleichung für $n = r + 1$ richtig ist, wenn sie es für $n = r$ ist. Da nun das in (5) ausgesprochene Gesetz sich für $n = 1, 2, 3, 4$, bewährt, so muss es nothwendig auch für alle folgenden Werthe von n gelten.

Die Gl. (5) drückt das erste Glied der n^{ten} Differenzreihe durch die $(n+1)$ ersten Glieder der Hauptreihe aus.

Eben so lässt sich aber ein beliebiges Glied, z. B. das r^{te} Glied der n^{ten} Differenzreihe, $\Delta^n u_r$, durch Glieder der Hauptreihe ausdrücken. Denkt man sich nämlich die Hauptreihe mit dem Gliede u_r anfangend, so muss offenbar $\Delta^n u_r$ aus den Gliedern u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ... u_{r+n} so gebildet sein, wie $\Delta^n u_0$ aus:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n;$$

man hat daher nach (5):

$$\Delta^n u_r = u_{r+n} - \binom{n}{1} u_{r+n-1} + \binom{n}{2} u_{r+n-2} - \ldots + (-1)^n u_r.$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen sich symbolisch in folgen Form darstellen:

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n$$
$$\Delta^n u_r = u_r (u-1)^n,$$

wenn man nur nach geschehener Entwickelung des Binoms die Exponenten in Stellenzeiger verwandelt und in (8) die Rechnungsregeln für Potenzen auf die mit Stellenzeigern versehenen Buchstaben überträgt.

141. Jedes Glied der Hauptreihe lässt sich durch das erste Glied derselben und die Anfangsglieder Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... der aufeinanderfolgenden Differenzreihen ausdrücken.

In der That ist:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0, \\
u_2 &= u_1 + \Delta u_1 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \\
u_3 &= u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 \\
&= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \\
&= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \\
u_4 &= u_3 + \Delta u_3 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0,
\end{aligned}
$$

u. s. w.

und allgemein:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0, \tag{9}$$

wo u_n das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Hauptreihe ist.

Von der Richtigkeit dieses Gesetzes kann man sich auf ähnliche Weise wie oben leicht überzeugen. Symbolisch lässt sich die Gl. (9) in folgender Weise schreiben:

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0, \tag{10}$$

wenn man nach der Entwickelung des Binoms die Exponenten von Δ als Wiederholungszeiger betrachtet.

142. Bildet man der Reihe nach die Summen von 1, 2, 3, ... n Gliedern der Hauptreihe (1) und setzt:

$$\Sigma_1 = u_0, \quad \Sigma_2 = u_0 + u_1, \quad \Sigma_3 = u_0 + u_1 + u_2, \ldots$$
$$\Sigma_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

so erhält man eine neue Reihe:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_n, \Sigma_{n+1}, \ldots \tag{11}$$

welche die Summenreihe und zwar die erste Summenreihe der Hauptreihe (1) heisst. Wie man sieht, ist:

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1} + u_{n-1}, \tag{12}$$

folglich:

$$u_{n-1} = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = \Delta \Sigma_{n-1}, \tag{13}$$

woraus erhellt, dass die Hauptreihe die erste Differenzreihe der ersten Summenreihe ist, vorausgesetzt, dass man letzterer ein Glied $= 0$

vorausschickt, indem (13) für $n=1$ in $u_0 = \Sigma_1 - \Sigma_0$ übergeht, woraus wegen $\Sigma_1 = u_0$, $\Sigma_0 = 0$ folgt.

In gleicher Weise kann man aus der ersten Summenreihe durch successives Summiren der Glieder derselben eine zweite Summenreihe, aus dieser eine dritte u. s. w. ableiten, und man überzeugt sich leicht, dass die Hauptreihe die r^{te} Differenzreihe der r^{ten} Summenreihe ist, wenn man die letztere mit r Gliedern, jedes $= 0$, beginnen lässt.

Mittelst dieser Bemerkung ist es leicht, mit Hilfe der Gl. (9) ein beliebiges Glied einer beliebigen Summenreihe der Hauptreihe, durch das erste Glied der letzteren und die Anfangsglieder ihrer aufeinanderfolgenden Differenzreihen auszudrücken.

Um nämlich das n^{te} Glied der r^{ten} Summenreihe Σ_n^r zu finden, betrachten wir die r^{te} Summenreihe als Hauptreihe, deren r^{te} Differenzreihe die Reihe (1) ist, zu welchem Zwecke wir der r^{ten} Summenreihe r Glieder jedes $= 0$ voransetzen, wodurch also das gesuchte Glied Σ_n^r eigentlich das $(n+r)^{te}$ dieser Reihe wird; wenden wir sodann auf diese neue Hauptreihe die Formel (9) an, so erhalten wir, da das erste Glied der Hauptreihe, sowie die Anfangsglieder der $(r-1)$ ersten Differenzreihen verschwinden, somit die Gl. (9) erst mit dem $(r+1)^{sten}$ Gliede beginnt, sogleich:

$$\Sigma_n^r = \binom{r+n-1}{r} u_0 + \binom{r+n-1}{r+1} \Delta u_0 + \binom{r+n-1}{r+2} \Delta^2 u_0 + \\ + \ldots + \Delta^{n-1} u_0. \quad (14)$$

Setzt man in dieser Gleichung $r = 1$, so erhält man als Ausdruck für das n^{te} Glied Σ_n der ersten Summenreihe:

$$\Sigma_n = n u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^{n-1} u_0, \quad (15)$$

womit auch die Summenformel oder das summatorische Glied der Reihe (1) gegeben ist, da:

$$\Sigma_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}.$$

In Bezug auf die Gleichungen (9) und (15), welche sehr häufige Anwendung finden, muss jedoch bemerkt werden, dass dieselben, falls nicht, von einer gewissen Differenz $\Delta^k u_0$ angefangen, alle folgenden $\Delta^{k+1} u_0$, $\Delta^{k+2} u_0, \ldots$ verschwinden, nichts finden lassen, was nicht schon bekannt sein müsste. Denn um aus (9) u_n zu erhalten, müssen die Grössen u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots \Delta^n u_0$ gegeben sein, wozu die Kenntniss von u_0, u_1, u. s. w. bis u_n erfordert wird. Dasselbe ist bei Gl. (15) der Fall. Es sprechen diese Gleichungen eben nur ein unter allen Umständen stattfindendes Bildungsgesetz aus.

VON DEN ARITHMETISCHEN REIHEN.

148. Eine arithmetische Reihe ist eine Folge von Grössen, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Glieder einer ihrer Differenzreihen sämmtlich einander gleich werden und daher alle folgenden Differenzreihen verschwinden. Sie ist vom k^{ten} Range oder der k^{ten} Ordnung, wenn die Glieder der k^{ten} Differenzreihe einander gleich sind.

Lassen wir daher jetzt in den vorhergehenden Entwickelungen die Hauptreihe (1):

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_{n-1},\ u_n, \ldots \tag{1}$$

eine arithmetische Reihe vom k^{ten} Range sein, so ist $\Delta^k u_0$ das constante Glied der k^{ten} Differenzreihe, $\Delta^{k+1} u_0 = \Delta^{k+2} u_0 = \ldots = 0$ und es folgt somit als Ausdruck des allgemeinen (unserer Bezeichnung gemäss des $(n+1)^{\text{ten}}$) Gliedes der arithmetischen Reihe vom k^{ten} Range aus (9):

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{k} \Delta^k u_0, \tag{16}$$

und als Ausdruck des summatorischen Gliedes aus (15):

$$\Sigma_n = n u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{k+1} \Delta^k u_0. \tag{17}$$

Jeder dieser Ausdrücke besteht, wie man sieht, aus $(k+1)$ Gliedern und nimmt zu seiner Bildung $(k+1)$ Glieder der Reihe (1) in Anspruch. Von einer arithmetischen Reihe des 1sten Ranges werden demnach zwei, des 2ten Ranges drei Anfangsglieder u. s. w. erfordert, um die Ausdrücke des allgemeinen und summatorischen Gliedes bilden zu können.

Aus den Formeln (16) und (17) erhält man:

Für arithmetische Reihen der 1sten Ordnung:

$$u_n = u_0 + n \Delta u_0,$$

$$\Sigma_n = n u_0 + \frac{n(n-1)}{2} \Delta u_0;$$

für arithmetische Reihen der 2ten Ordnung:

$$u_n = u_0 + n \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0,$$

$$\Sigma_n = n u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 u_0;$$

u. s. w.

144. Entwickelt man in (16) und (17) die Coefficienten und ordnet nach den Potenzen von n, so erhält man offenbar:

$$u_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots + A_k n^k, \qquad (18)$$

$$\Sigma_n = B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + \ldots\ldots + B_{k+1} n^{k+1}; \qquad (19)$$

wo die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_k; B_1, B_2, \ldots B_{k+1}$ bloss von den Grössen $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots \Delta^k u_0$ abhängen und $A_0 = u_0$ ist. Hieraus folgt, dass jede ganze rationale Funktion von n von der Form:

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k$$

als das allgemeine Glied und jede ganze rationale Funktion von der Form:

$$B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + \ldots + B_{k+1} n^{k+1}$$

als das Summenglied einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung betrachtet werden kann.

Man sieht leicht, dass das letzte Glied $A_k n^k$ in (18) bloss aus dem letzten Gliede in (16) hervorgeht, da bloss dieses Glied k Faktoren enthält, deren jeder in Bezug auf n vom ersten Grade ist. Es muss daher:

$$A_k n^k = \frac{n^k}{1.\ 2.\ 3\ldots k}\,\Delta^k u_0$$

sein, woraus:

$$\Delta^k u_0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot A_k \qquad (20)$$

folgt, welche Gleichung sogleich die constante Differenz einer arithmetischen Reihe gibt, deren allgemeines Glied als Funktion von n in der Form (18) gegeben ist. Hat man z. B. $u_n = 1 - 3n + 4n^2$, so ist $\Delta^2 u_0 = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$; und in der That liefert dieser Ausdruck, wenn man der Reihe nach, 0, 1, 2,... statt n setzt, die arithmetische Reihe der 2ten Ordnung: 1, 2, 11, 28, 53, 86, ..., deren zweite Differenzreihe 8 zum constanten Gliede hat.

145. Eine unmittelbare Folge des Ausdruckes (18) des allgemeinen Gliedes einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung ist, dass, wenn die correspondirenden Glieder zweier oder mehrerer arithmetischen Reihen addirt oder subtrahirt werden, die resultirende Reihe wieder eine arithmetische ist, deren Ordnungsexponent gleichnamig ist mit dem höchsten der verbundenen Reihen. — Werden hingegen mehrere arithmetische Reihen Glied für Glied multiplicirt, so ist die dadurch entstehende Reihe ebenfalls eine arithmetische, deren Ordnungsexponent gleich ist der Summe der Ordnungsexponenten der verbundenen Reihen. — Erhebt man hingegen jedes Glied einer arithmetischen Reihe der k^{ten}

Ordnung zur r^{ten} Potenz, so erhält man eine arithmetische Reihe der $(kr)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Hiernach bilden die k^{ten} Potenzen der Reihe der natürlichen Zahlen: $1^k, 2^k, 3^k, 4^k \ldots n^k, \ldots$ eine arithmetische Reihe der k^{ten} Ordnung, deren constante Differenz, da das allgemeine Glied $u_n = (1+n)^k = 1 + kn + \ldots + n^k$, somit in (18) $A_k = 1$ ist, nach (20):

$$\Delta^k u_0 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots . \,k$$

wird. Es lässt sich daher nach (17) die Summe:

$$\Sigma(n^k) = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots . + n^k$$

für die verschiedenen Werthe von k leicht finden. Man hat für:

$$k = 1 : u_0 = 1, \quad \Delta u_0 = 1, \quad \Delta^2 u_0 = \Delta^3 u_0 = \ldots = 0,$$

somit:

$$\Sigma(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . + n = n + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}.$$

Für $k = 2$: $u_0 = 1$, $\Delta u_0 = 3$, $\Delta^2 u_0 = 2$,

$$\Sigma(n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots . + n^2 = n + \binom{n}{2} . 3 + \binom{n}{3} . 2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Für $k = 3 : u_0 = 1$, $\Delta u_0 = 7$, $\Delta^2 u_0 = 12$, $\Delta^3 u = 6$,

$$\Sigma(n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

u. s. w.

Zu einem allgemeinen Ausdrucke von $\Sigma(n^k)$ werden wir an einem späteren Orte gelangen.

146. Bildet man, von einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung ausgehend, die auf einander folgenden Summenreihen, so sind diese nach §. 142 wieder arithmetische Reihen bezüglich der $(k+1)^{\text{ten}}$, $(k+2)^{\text{ten}}$ u. s. w. Ordnung, deren allgemeine und summatorische Glieder sich ohne Schwierigkeit nach dem bisher Gesagten finden lassen. Lässt man insbesondere die Stammreihe eine arithmetische Reihe der 1sten Ordnung sein:

$$1, \quad 1+d, \quad 1+2d, \quad 1+3d, \ldots . \; 1+nd, \qquad (\alpha)$$

so ist deren erste Summenreihe:

$$1, \quad 2+d, \quad 3+3d, \quad 4+6d, \quad 5+10d, \ldots . \qquad (\beta)$$

für welche als arithmetische Reihe der zweiten Ordnung:

$$u_n = \frac{1}{2}(1+n)(2+nd), \quad \Sigma_n = \frac{1}{6} n(n+1)[(n-1)d+3]$$

gefunden wird. Als 2[te] Summenreihe erhält man:

$$1, \quad 3+d, \quad 6+4d, \quad 10+10d, \quad 15+20d, \ldots \qquad (\gamma)$$

für welche, als arithmetische Reihe der 3[ten] Ordnung:

$$u_n = \frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+nd),$$

$$\Sigma_n = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)[(n-1)d+4]$$

sich ergibt u. s. w. Diese aufeinanderfolgenden Summenreihen, (β), (γ), ... sind unter dem Namen **figurirte Zahlenreihen** beziehungsweise der 1[sten], 2[ten], u. s. w. Ordnung bekannt; insbesondere heisst (β) die Reihe der **Polygonal- oder Vieleckszahlen**, (γ) die Reihe der **Pyramidalzahlen**. Setzt man in diesen Reihen nach einander,

$$d=1, \quad d=2, \quad d=3, \ldots . \; d=m-2,$$

so ergeben sich aus (β) die besonderen Reihen der Dreiecks-, Vierecks-, Fünfecks-, ... m Ecks-Zahlen, aus (γ) jene der dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, ... m seitigen Pyramidalzahlen.

147. Unter den mannigfaltigen Anwendungen der Differenzreihen wollen wir noch den Gebrauch derselben zur Berechnung von Tafeln in Kürze erläutern.

Es sei:

$$y = f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Mx^m \qquad (\alpha)$$

eine ganze rationale Funktion von x und eine Tafel zu berechnen, welche die Werthe der Funktion $y = f(x)$ für nach gleichen Intervallen fortschreitende Werthe von x, z. B. $x = 1, 2, 3, \ldots$ enthält. Die aufeinanderfolgenden Werthe von y werden eine Reihe bilden, deren allgemeines Glied für den Stellenzeiger x offenbar der Ausdruck (α) ist, woraus nach §. 144 folgt, dass die Werthe von y eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung bilden werden und es genügt daher, $m+1$ Anfangsglieder derselben zu kennen, um mit Hilfe der Differenzen alle folgenden Glieder durch einfache Addition bilden zu können.

Gesetzt z. B., es handle sich um die Berechnung einer Tafel für die 3[ten] Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3,... bis 1000; bezeichnen wir irgend eine dieser Zahlen mit x, den Cubus derselben mit y, so haben wir $y = x^3$ zu setzen, woraus sogleich folgt, dass die 3[ten] Potenzen der Zahlen 1, 2, 3,... eine arithmetische Reihe der 3[ten] Ordnung bilden, wie wir dies schon oben gefunden haben. Wir berechnen nun die vier ersten Glieder der Reihe, für $x = 1, 2, 3, 4$ und erhalten:

x	y	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		
4	64			

und die weitere Rechnung steht nun, wie folgt:

3. Diff.	2. Diff	1. Diff.	$y = x^3$	x
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
6	30	91	216	6
6	36	127	343	7
6	42	169	512	8
6	48	217	729	9

u. s. w.

Um sich gegen Rechnungsfehler zu schützen, wird man von Zeit zu Zeit einen Werth von y unmittelbar aus der Formel rechnen. Lassen sich die Werthe von y nur näherungsweise ausdrücken, wie dies z. B. der Fall ist, wenn einer oder mehrere der Coefficienten in (α) irrationale Zahlen sind, oder rationale Brüche, welche sich durch Dezimalbrüche nicht genau darstellen lassen, so muss die Rechnung mit einigen Dezimalstellen mehr angelegt werden, als man am Ende beizubehalten gesonnen ist, weil sonst, wie leicht einzusehen, durch das wiederholte Addiren in Folge der vernachlässigten Dezimalstellen die gesuchten Werthe sich mehr und mehr von der Wahrheit entfernen würden.

Dieser Vorgang findet mit geringen Modifikationen auch dann noch Anwendung, wenn die Funktion $y = f(x)$, für welche eine Tafel berechnet werden soll, keine ganze rationale Funktion von x ist. Die aufeinanderfolgenden Werthe von y bilden dann zwar keine arithmetische Reihe mehr im strengen Sinne, können jedoch näherungsweise dafür genommen werden, indem im Allgemeinen die Differenzreihen, von einer bestimmten angefangen, aus so kleinen Gliedern bestehen werden, dass dieselben als verschwindend angenommen werden können, und die Rechnung kann dann immer so angeordnet werden, dass die Vernachlässigung derselben keinen Einfluss auf die letzte Dezimalstelle nimmt, welche man noch sicher zu erhalten wünscht.

Denken wir uns nämlich die Funktion $y = f(x)$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickelt, was im Allgemeinen immer möglich ist; sei also:

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m + \ldots$$

und $x = x_0$ ein besonderer Werth von x, für welchen die Reihe convergirt und das Glied $A_{m+1} x^{m+1}$, so wie alle folgenden, auf die n^{te} Dezimalstelle keinen Einfluss mehr nimmt, so ist klar, dass für Werthe von x, welche in der Nähe von x_0 liegen, bis auf n Dezimalstellen genau:

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

ist, vorausgesetzt, dass die Funktion in dieser Gegend stetig ist. Hieraus folgt sogleich, dass die Werthe von y, welche den in der Nähe von x_0 liegenden Werthen von x entsprechen, bis zur n^{ten} Decimalstelle eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung bilden.

Da obige Reihe für verschiedene Werthe von x ungleich stark convergiren wird, so wird sich hiedurch auch der Rang der arithmetischen Reihe, somit auch die Anzahl der in Rechnung zu nehmenden Differenzreihen successive ändern. Man wird daher die Rechnung in Partien theilen und in gehörigen Intervallen die erforderliche Anzahl von Gliedern der Reihe sammt den zugehörigen Differenzen aus der Formel $y = f(x)$ unmittelbar rechnen.

VON DER INTERPOLATION.

148. Eine der wichtigsten Anwendungen der Lehre von den Differenzreihen ist das Interpoliren oder Einschalten. Man versteht hierunter folgende Aufgabe:

Es sei $u = \varphi(x)$ eine ihrer Form nach unbekannte Funktion von x und man kenne eine gewisse Anzahl Werthe derselben:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots \ldots u_n, \tag{1}$$

welche den gleichfalls bekannten Werthen von x:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n$$

entsprechen, (so dass $u_0 = \varphi(x_0)$ u. s. w.); es soll für irgend einen anderen zwischen x_0 und x_n gelegenen Werth von x, z. B. x', der zugehörige Werth von u, $= u'$ gefunden werden.

Offenbar kommt es hier darauf an, eine Funktion $f(x)$ zu finden, welche wir zur Berechnung statt der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ benützen können. Diese Funktion $f(x)$ muss nothwendig die Eigenschaft haben, dass sie für $x = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$ die Werthe $u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n$

annimmt; es ist dies aber zugleich die einzige Bedingung, welche uns zur Auffindung dieser Funktion zu Gebote steht. Hat man eine solche gefunden, so wird die Gleichung $u = f(x)$ das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ offenbar um so genauer darstellen, je grösser die Anzahl der gegebenen zusammengehörigen Werthe von x und u ist, je näher dieselben einander liegen und je regelmässiger sie aufeinanderfolgen.

Die Grösse x, von welcher die Funktion u abhängt, pflegt man bei Interpolationsrechnungen das Argument zu nennen.

Es ist leicht zu übersehen, dass diese Aufgabe eigentlich eine unbestimmte ist, d. h. dass es unendlich viele Funktionen geben wird, welche die Eigenschaft haben, für $x = x_0, x_1, \ldots x_n$ die Werthe $u_0, u_1, \ldots u_n$ anzunehmen, was durch eine einfache geometrische Betrachtung am anschaulichsten wird. Denkt man sich die gegebenen Werthe von x als Abscissen, die zugehörigen Werthe von u als Ordinaten [§. 14], so werden durch die zusammengehörigen Werthe:

$$x_0, u_0; x_1, u_1; \ldots x_n, u_n$$

offenbar $n+1$ Punkte in der Ebene bestimmt, welche zu einer krummen Linie gehören, deren unbekannte Gleichung $u = \varphi(x)$ ist. Aber durch dieselben Punkte lassen sich unzählige, bestimmten Gesetzen unterworfene Curven ziehen und jede derselben ist eine Auflösung unserer Aufgabe. Erst durch Hinzufügung anderer Bedingungen, z. B. dass die Funktion $f(x)$ eine rationale ganze Funktion vom n^{ten} Grade sein soll, wird die Aufgabe eine bestimmte.

In den meisten Fällen liegen die gegebenen Werthe des Argumentes x in gleichen Abständen von einander, so dass:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

u. s. w. ist, welchen Fall wir zuerst betrachten wollen.

149. Bezeichnen wir mit $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots \Delta^n u_0$ die Anfangsglieder der aufeinanderfolgenden Differenzreihen der Reihe (1), so ist [§. 141]:

$$= u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Setzen wir nun $u = f(x)$, das constante Intervall des Argumen- $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$, so wird $u_0 = f(x_0)$, $u_1 = f(x_1)$ $f(x_0 + h)$, $u_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h)$, ... $u_n = f(x_0 + nh)$, wir haben:

$$f(x_0+nh)=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0+\ldots$$

oder, wenn wir:

$$x_0+nh=x,\ nh=k,\ \text{somit } n=\frac{k}{h} \text{ setzen;}$$

$$f(x_0+k)=f(x)=u_0+\frac{k}{h}\Delta u_0+\frac{k(k-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 u_0+\frac{k(k-h)(k-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 u_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{k(k-h)(k-2h)\ldots[k-(n-1)h]}{1.2.3\ldots n.h^n}\Delta^n u_0. \qquad (2)$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist eine ganze rationale Funktion von x vom n^{ten} Grade, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt k seinen Werth $x-x_0$ einführt, und nimmt der Reihe nach die Werthe $u_0\ u_1, u_2, \ldots u_n$ an, wenn man darin $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ an die Stelle von x setzt. Man erhält nämlich [vergl. §. 141]:

für $x=x_0$, wegen $k=0$, $f(x_0)=u_0$,
- $x=x_1$, - $k=h$, $f(x_1)=u_0+\Delta u_0=u_1$,
- $x=x_2$, - $k=2h$, $f(x_2)=u_0+2\Delta u_0+\Delta^2 u_0=u_2$

u. s. w.

Diese Funktion $f(x)$ kann demnach, in Ermangelung von $\varphi(x)$, als ein genäherter Ausdruck des Gesetzes der Abhängigkeit der Grösse u von x betrachtet und zur Interpolation benutzt werden. Setzt man nämlich statt x irgend einen zwischen x_0 und x_n fallenden Werth x', so wird dieselbe einen Werth u' liefern, welcher dem wahren Werthe $\varphi(x')$ so nahe kommen wird, als es die gegebenen Daten überhaupt erlauben. Dabei ist h das Intervall, nach welchem das Argument fortschreitet und $k=x'-x_0$ zu setzen, wo x_0 jenen Werth des Argumentes bedeutet, welcher dem Werthe u_0 entspricht, von welchem die Formel (2) ausgeht.

150. Die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen in (2) bricht ab, wenn die gegebenen Werthe von u eine arithmetische Reihe bilden und ist in diesem Falle nichts anderes als der Ausdruck des allgemeinen, dem Stellenzeiger x_0+k entsprechenden Gliedes der Reihe (1); in diesem Falle ist natürlich der Ausdruck völlig genau und kann auch für solche Werthe des Argumentes angewendet werden, welche ausserhalb der Grenzen x_0 und x_n liegen.

Ist aber die Reihe der u keine arithmetische (und dies ist der gewöhnlichere Fall), so ist die Reihe in (2) unendlich und zur Berechnung nur geeignet, wenn sie convergirt, wozu erfordert wird, dass die aufeinanderfolgenden Differenzen Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, .. immer kleiner

werden, so dass man die folgenden Glieder mit Rücksicht auf den verlangten Grad der Genauigkeit vernachlässigen kann.

Ist das Intervall des Argumentes $h = 1$, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit, $x_0 = 0$, folglich $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, u. s. w. annehmen; die Gleichung (2) liefert sodann, wie leicht einzusehen, dasjenige Glied der Reihe, dessen Stellenzeiger k ist; schreibt man daher t statt k, so geht (2) über in:

$$u_t = u_0 + t\Delta u_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots, \quad (3)$$

eine andere Form der allgemeinen Interpolationsformel, welche übrigens, wie leicht einzusehen ist, auch dann gebraucht werden kann, wenn h nicht $= 1$ ist; es ist dann $t = \frac{k}{h}$ zu setzen. Der Kürze wegen mögen die Coefficienten von Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, .. in (2) oder (3) mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bezeichnet werden.

151. Soll zwischen je zwei Glieder der Reihe:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

eine gegebene Anzahl von Gliedern eingeschaltet werden, welche nach demselben Gesetze fortschreiten, wie die ersteren und ist $r - 1$ die Anzahl der einzuschaltenden Glieder, so betrachte man $0, r, 2r, 3r, \ldots$ als die Stellenzeiger der Glieder der gegebenen Reihe und man erhält die zwischen u_0 und u_1 einzuschaltenden Glieder, wenn man in (2) $h = r$ und k der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots (r - 1)$ setzt. Will man Formel (3) gebrauchen, so hat man der Reihe nach:

$$t = \frac{1}{r}, \; \frac{2}{r}, \; \frac{3}{r}, \ldots \frac{r-1}{r}$$

zu setzen. Die zwischen u_1 und u_2 fallenden Glieder erhält man am bequemsten auf dieselbe Weise, indem man, mit Weglassung von u_0, u_1 als das erste Glied betrachtet, wo dann nur andere Differenzen, nämlich jene von u_1 ausgehend, in Rechnung zu nehmen sind, die Werthe der Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ aber dieselben bleiben.

152. Wir wollen nun den Gebrauch der Interpolationsformel an einigen Beispielen erläutern.

1. Es ist gegeben:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 30^0\ 0' & u_0 &= \operatorname{tg} x_0 = 0{,}5773503 \\
x_1 &= 30\ 30 & u_1 &= \operatorname{tg} x_1 = 0{,}5890450 \\
x_2 &= 31\ \ 0 & u_2 &= \operatorname{tg} x_2 = 0{,}6008606 \\
x_3 &= 31\ 30 & u_3 &= \operatorname{tg} x_3 = 0{,}6128008 \\
x_4 &= 32\ \ 0 & u_4 &= \operatorname{tg} x_4 = 0{,}6248694,
\end{aligned}$$

Man suche tg 30° 15'.

Man bilde die Differenzen nach folgendem Schema:

$u = \mathrm{tg}\,x$	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.
0,5773503				
	+ 116947			
0,5890450		+ 1209		
	118156		+ 37	
0,6008606		1246		+ 1
	119402		38	
0,6128008		1284		
	120686			
0,6248694				

Es ist nun $u_0 = 0{,}5773503$, $\Delta u_0 = +\,0{,}0116947$, $\Delta^2 u_0 = +\,0{,}0001209$, $\Delta^3 u_0 = +\,0{,}0000037$, $\Delta^4 u_0 = +\,0{,}0000001$, wo die letzte dieser Differenzen von keinem Einflusse mehr ist; ferner $h = 30'$, $k = 15'$; somit, nach (2) rechnend:

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{2} = c_1;\quad c_2 = \frac{15\,.\,-15}{1\,.\,2\,.\,30^2} = -\frac{1}{8},\quad c_3 = +\frac{1}{16};$$

folglich:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,30^0\,15' = &\quad 0{,}5773503 \\ &+ 0{,}00584735 \\ &- 0{,}00001511 \\ &+ 0{,}00000023 \\ = &\quad 0{,}5831828. \end{aligned}$$

2) Man berechne $\log \pi = \log 3{,}1415926536$ mit 10 Stellen, vorausgesetzt, dass man eine zehnstellige Logarithmentafel aller Zahlen von 1 bis 1000 besitzt. Man hat nun:

x	$\log x$	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.
3,14	0,4969296481				
		+13809057			
3,15	0,4983105538		− 43769		
		13765288		+ 277	
3,16	0,4996870826		43492		− 3
		13721796		274	
3,17	0,5010592622		43218		
		13678578			
3,18	0,5024271200				

Es ist folglich:

$$\begin{aligned} u_0 &= \quad 0{,}4969296481, & \Delta u_0 &= +\,0{,}0013809057, \\ \Delta^2 u_0 &= -\,0{,}0000043769, & \Delta^3 u_0 &= +\,0{,}0000000277, \\ \Delta^4 u_0 &= -\,0{,}0000000003, \end{aligned}$$

$h = 0{,}01$, $k = 0{,}0015926536$.

Berechnet man mit diesen Werthen von h und k, oder mit dem Wei[illegible] $= \frac{k}{h} = 0{,}15926536$ die Coefficienten c_1, c_2, c_3, c_4, und zwar mit so viel Dezimalstellen, dass mit Rücksicht auf die Anzahl

bedeutenden Dezimalstellen in den Differenzen jedes Glied sich mit 11 Dezimalstellen ergibt, wovon die 11te zur Versicherung der 10ten dient, so findet man:

$$c_1 = \frac{k}{h} = t = 0{,}15926536, \quad c_2 = -0{,}06695, \quad c_3 = +0{,}041,$$
$$c_4 = -0{,}03;$$

somit:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0{,}4969296481 \\ c_1\Delta u_0 &= +0{,}00021993042 \\ c_2\Delta^2 u_0 &= +0{,}00000029301 \\ c_3\Delta^3 u_0 &= +0{,}00000000114 \\ c_4\Delta^4 u_0 &= +0{,}00000000001 \\ \hline \log\pi &= 0{,}4971498727. \end{aligned}$$

153. Bei dem Gebrauche der mathematischen Tafeln aller Art findet das Interpoliren fortwährende Anwendung. Eine jede solche Tafel hat zum Zwecke, die numerischen Werthe einer gewissen Funktion, welche häufige Anwendung findet, für eine Reihe von Werthen derjenigen Grösse, von welcher die Funktion abhängt (des Argumentes), ein für alle Mal berechnet zu enthalten, wobei das Argument immer nach einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung fortläuft. Bei Tafeln von besonders häufigem Gebrauche, wie z. B. Logarithmentafeln, lässt man das Argument nach so kleinen Intervallen fortschreiten, dass innerhalb einer gewissen Ausdehnung die ersten Differenzen constant und somit jene der höheren Ordnung $= 0$ werden, wodurch die Interpolation nach der Formel:

$$u_t = u_0 + t\Delta u_0$$

auf die Berechnung der sogenannten Proportionaltheile zurückgeführt ist.

Bei der Berechnung von Tafeln selbst leistet das Interpoliren die wesentlichsten Dienste. Man wird nämlich die Funktionswerthe nur für weiter abstehende Werthe des Argumentes berechnen und die zwischenliegenden durch Interpolation suchen, wodurch man um so mehr gewinnt, je complicirter die zu berechnende Funktion ist.

Bei dem Gebrauche von Tafeln tritt auch die umgekehrte Auf[gab]e ein, nämlich zu einem gegebenen Werthe der Tafelgrösse den [zug]ehörigen Werth des Argumentes zu finden. Hiezu dient ebenfalls [For]mel (3), nur ist u_t gegeben und t die gesuchte Grösse. Ist schon die [zweite] Differenz sammt den folgenden unmerklich, so hat man unmittelbar:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0},$$

wo u_0 der dem gegebenen u_t unmittelbar vorangehende in den Tafeln enthaltene Werth der Funktion ist, so dass u_t zwischen den Tafelwerthen u_0 und u_1 liegend angenommen wird. Sind dann x_0, x_t die zu u_0 und u_t gehörigen Argumente, so ist $x_t = x_0 + t$.

Sind aber auch noch die höheren Differenzen zu berücksichtigen, so würde die Bestimmung von t aus (3) die Auflösung einer höheren Gleichung erfordern, welcher Uebelstand, wenn die Differenzen rasch genug abnehmen, durch ein Näherungsverfahren umgangen werden kann. Aus (3) folgt nämlich:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{t-1}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \frac{(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_0 + \ldots};$$

vernachlässiget man zuerst die höheren Differenzen, so hat man als ersten genäherten Werth $t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0} = \tau$; substituirt man diesen im 2ten Gliede des Nenners, so erhält man als 2ten genäherten Werth:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{\tau - 1}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0} = \tau';$$

hiemit als 3ten genäherten Werth:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{\tau' - 1}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \frac{(\tau' - 1)(\tau' - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_0},$$

u. s. w.

Beispiel. Man suche mittelst der im ersten Beispiele, §. 152, enthaltenen kleinen Tafel der Tangenten den Winkel x, für welchen $\operatorname{tg} x = 0,5812753$ ist.

Man hat $u_0 = 0,5773503$; $u_t = 0,5812753$; folglich: $u_t - u_0 = 0,0039250$, und findet demnach mit den, §. 152 angeführten Differenzen:

$$\tau = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0} = \frac{0.003925}{0,01169} = \frac{1}{3},$$

$$\tau' = \frac{0.0039250}{0,0116947 - \frac{1}{3} \cdot 0,0001209} = 0,337, \text{ und hiemit:}$$

$$\tau'' = 0,33676.$$

Es ist demnach $t = 0,33676$, welcher Zahl das Intervall des Argumentes, d. i. $30'$ als Einheit zu Grunde liegt. Daher wird: $t = 0,33676 \times 30 = 10',1028 = 10'\ 6'',17$, und $x = 30^0\ 10'\ 6''$.

154. Betrachten wir jetzt den Fall, wenn die gegebenen Werthe des Argumentes, $n+1$ an der Zahl:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n$$

zu welchen die gleichfalls bekannten Funktionswerthe:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots u_n$$

gehören, nicht in gleichen Intervallen aufeinanderfolgen.

Man setze:

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^n, \qquad (\alpha)$$

so kommt es darauf an, die Coefficienten A, B, ... M so zu bestimmen, dass diese Funktion für $x = x_0$, x_1, x_2, ... x_n der Reihe nach die Werthe u_0, u_1, u_2, ... u_n annehme. Hiezu erhalten wir folgende $n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= A + Bx_0 + Cx_0^2 + \ldots + Mx_0^n \\ u_1 &= A + Bx_1 + Cx_1^2 + \ldots + Mx_1^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= A + Bx_n + Cx_n^2 + \ldots + Mx_n^n, \end{aligned}$$

welche zur Bestimmung der $n+1$ Coefficienten hinreichen. Ohne jedoch diese Elimination auszuführen, erkennt man aus der linearen Form dieser Gleichungen, dass jeder Coefficient, z. B. A die Form:

$$A = u_0P_0 + u_1P_1 + u_2P_2 + \ldots + u_nP_n$$

haben werde, wo P_0, P_1, P_2, ... P_n Funktionen von x_0, x_1, ... x_n sind. Denkt man sich sodann diese Coefficienten in (α) substituirt und den Ausdruck nach den u geordnet, so nimmt derselbe die Form an:

$$u = u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + \ldots + u_nX_n, \qquad (\beta)$$

wo die Coefficienten X_0, X_1, ... X_n, ganze rationale Funktionen des n^{ten} Grades von x sein werden. Der Bedingung der Aufgabe gemäss muss nun der 2te Theil dieser Gleichung sich auf u_0 reduciren, wenn $x = x_0$ gesetzt wird; dies erfordert, dass:

$$\text{für } x = x_0 : X_0 = 1, \text{ und } X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = 0$$

werde: aus gleichem Grunde muss:

$$\text{für } x = x_1 : X_1 = 1, \text{ und } X_0 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = 0$$

werden u. s. w. Irgend einer dieser Coefficienten, z. B. X_g, ist also durch die beiden Bedingungen bestimmt, dass derselbe $= 1$ werde für $x = x_g$, für alle übrigen Werthe von x aber sich auf 0 reducire. Der letzteren Bedingung genügen wir, indem wir setzen:

$$X_g = m(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{g-1})(x - x_{g+1})\ldots(x - x_n), \qquad (\gamma)$$

wo m eine von x unabhängige Constante ist, welche sich durch die Bedingung bestimmt, dass $X_g = 1$ werde für $x = x_g$; setzt man daher in (γ) $x = x_g$, so erhält man:

$$1 = m(x_g - x_0)(x_g - x_1)\ldots(x_g - x_{g-1})(x_g - x_{g+1})\ldots(x_g - x_n)$$

und wenn man (γ) durch diese Gleichung dividirt:

$$X_g = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{g-1})(x - x_{g+1})\ldots(x - x_n)}{(x_g - x_0)(x_g - x_1)\ldots(x_g - x_{g-1})(x_g - x_{g+1})\ldots(x_g - x_n)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke der Reihe nach $0, 1, 2 \ldots n$ statt g und substituirt in (β), so erhält man:

$$\begin{aligned} u = u_0 & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n)} \\ + u_1 & \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} \\ + u_2 & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + u_n & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}, \end{aligned} \tag{4}$$

welches die von **Lagrange** gegebene Interpolationsformel ist. Entwickelt man die Brüche und ordnet nach x, so erhält der zweite Theil die Form (α).

ACHTES KAPITEL.

I.

ÜBER DIE CONVERGENZ UNENDLICHER FAKTORENFOLGEN.

---

155. Es seien $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ Grössen, welche in Bezug auf ihren arithmetischen Bau nach einem bestimmten Gesetze fortsch ten und

$$P_n = u_0 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \,.\, u_4 \ldots u_{n-1}$$

das Produkt von n solchen Faktoren, welches offenbar einen besti ten endlichen Werth haben wird, so lange keiner dieser Fakto

unendlich gross wird. Lassen wir nun, woran im Allgemeinen nichts hindert, n unendlich wachsen und setzen $\lim P_n = P$, so geht (1) über in:

$$P = u_0 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \,.\, u_4 \,.\, u_5 \,\ldots\, \text{in inf.} \qquad (2)$$

Das Produkt rechts vom Gleichheitszeichen besteht jetzt aus einer unendlichen Anzahl von Faktoren und wird ein unendliches Produkt oder eine unendliche Faktorenfolge genannt. Ist nun $\lim P_n = P$ eine bestimmte endliche Grösse, so sagt man, das unendliche Produkt sei convergent; P ist dann der Werth des unendlichen Produktes, welchem man sich um so mehr und bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit nähern kann, je mehr Faktoren vom ersten angefangen miteinander multiplicirt werden. Das unendliche Produkt heisst im Gegentheile divergent, wenn $P = \lim P_n$ unendlich oder unbestimmt wird.

Die Untersuchung, ob eine vorgelegte Faktorenfolge convergire, kann auf die über die Convergenz der Reihen vorgetragenen Sätze zurückgeführt werden. Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man $u_0 = e^{lu_0}$, $u_1 = e^{lu_1}$, $u_2 = e^{lu_2}$ u. s. w., folglich:

$$P = e^{lu_0 + lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots}, \qquad (3)$$

und es kommt nun offenbar nur auf das Verhalten der Reihe:

$$lu_0 + lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots \qquad (4)$$

an, wobei wir folgende drei Fälle unterscheiden können:

a) Ist die Reihe (4) convergent und s ihre Summe, so ist $P = e^s$ offenbar eine bestimmte endliche Grösse und somit die Faktorenfolge convergent; der Werth derselben $= e^s$ ist dabei nothwendig von Null verschieden.

b) Divergirt die Reihe (4), jedoch so, dass ihre Summe $= -\infty$ ist, so wird $P = e^{-\infty} = 0$; das Produkt $u_0 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots$ ist daher convergent und sein Werth $= 0$.

c) Ist jedoch die Reihe (4) divergent und ihre Summe $= +\infty$ oder unbestimmt, so wird $P = e^{+\infty} = \infty$ oder unbestimmt, in welchem Falle daher das unendliche Produkt $u_0 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots$ ebenfalls divergirt.

Die unmittelbare Anwendung der im zweiten Kapitel vorgetra-
...n Sätze auf die Reihe (4) ist jedoch in den meisten Fällen nicht
...ch genug, daher wir die Bedingung der Convergenz derselben
einen einfacheren Ausdruck bringen wollen.

Die Reihe (4) wird offenbar convergiren oder divergiren, wenn von irgend einem Gliede lu_r an convergirt oder divergirt, so dass statt (4) die folgende:

$$lu_r + lu_{r+1} + lu_{r+2} + lu_{r+3} + \dots \quad (5)$$

betrachten können, welche, wenn wir die Grössen u_0, u_1, u_2, ... u_n... auf die Form:

$$u_0 = 1 + v_0, \quad u_1 = 1 + v_1, \quad u_2 = 1 + v_2, \dots u_n = 1 + v_n, \dots$$

bringen, was immer möglich ist, folgende Form erhält:

$$l(1 + v_r) + l(1 + v_{r+1}) + l(1 + v_{r+2}) + l(1 + v_{r+3}) + \dots \quad (6)$$

Die Convergenz der Reihe (4) ist aber zunächst an die Bedingung gebunden, dass $\lim (lu_n) = \lim \{l(1 + v_n)\} = 0$, d. i. $\lim u_n = \lim (1 + v_n) = 1$, somit $\lim v_n = 0$ sei, woraus folgt, dass die Grössen v eine unendlich abnehmende Reihe bilden müssen, in Folge dessen r immer so gross gewählt werden kann, dass v_r und um so mehr v_{r+1}, v_{r+2} u. s. w. kleiner sind als eine beliebige gegebene Zahl.

Nun ist bekanntlich:

$$l(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots\right);$$

aber:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 + \dots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

d. i. weil $x < 1$:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots < \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - x},$$

und folglich für jedes x, dessen Zahlenwerth $< \frac{2}{3}$ ist:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \dots < 1;$$

bezeichnen wir daher mit ϱ einen positiven echten Bruch, so besteht für jeden Werth von x, welcher numerisch $< \frac{2}{3}$ ist, die Gleichung:

$$l(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varrho x^3.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man auf demselben Wege, w man von $l(1 - x)$ ausgeht, so dass daher (7) für jeden Werth x gilt, welcher zwischen $-\frac{2}{3}$ und $+\frac{2}{3}$ liegt.

Dies vorausgesetzt, lassen wir in (6) v_r die erste aus der Reihe der unendlich abnehmenden Grössen v sein, deren Zahlenwerth $< \frac{2}{3}$ ist, so erhalten wir unter Anwendung der Gl. (7):

$$\left.\begin{aligned} & l(1+v_r)+l(1+v_{r+1})+l(1+v_{r+2})+l(1+v_{r+3})+\ldots= \\ & \qquad = v_r+v_{r+1}+v_{r+2}+v_{r+3}+\ldots \\ & -\frac{1}{2}(v_r^2+v_{r+1}^2+v_{r+2}^2+v_{r+3}^2+\ldots) \\ & +\varrho_r v_r^3+\varrho_{r+1}v_{r+1}^3+\varrho_{r+2}v_{r+2}^3+\varrho_{r+3}v_{r+3}^3+\ldots \\ & \qquad = V_1-\frac{1}{2}V_2+V_3, \end{aligned}\right\} (8)$$

wo die ϱ positive echte Brüche sind und der Kürze halber die drei Reihen rechts vom Gleichheitszeichen mit V_1, V_2, V_3 bezeichnet werden.

Aus (8) erhellt sofort, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihe (6) und somit auch jener (4) von dem Verhalten der Reihen V_1, V_2, V_3 abhängig ist. Nun ist klar, dass die Convergenz der Reihe V_1 nothwendig auch jene von V_3 nach sich zieht, weil die Glieder der letzteren Reihe sämmtlich kleiner sind als die entsprechenden in V_1, und ein in V_1 etwa stattfindender Zeichenwechsel auch in V_3 erscheint. Hingegen lässt sich aus der Convergenz von V_1 die Convergenz von V_2 nur dann folgern, wenn die Glieder in V_1 durchaus gleiche Zeichen haben; findet aber in V_1 ein Zeichenwechsel statt, so ist zwar diese Reihe wegen der unendlichen Abnahme ihrer Glieder nothwendig convergent, aber die Reihe V_2 kann in Folge der gleichen Bezeichnung ihrer Glieder auch divergiren.

Verbindet man mit diesen Bemerkungen das oben unter *a*), *b*), *c*) Gesagte, so gelangt man sogleich zu folgenden Sätzen:

1) Das unendliche Produkt:

$$(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)(1+v_4)\ldots$$

convergirt gegen eine von 0 verschiedene Grenze, wenn die beiden Reihen:

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots$$
$$v_0^2,\ v_1^2,\ v_2^2,\ v_3^2,\ v_4^2,\ \ldots$$

ichzeitig convergiren. Denn unter dieser Voraussetzung convergirt, nöge (8), auch die Reihe (4).

2) Das Produkt convergirt gegen die Grenze 0, wenn die erste er Reihen convergirt und die zweite divergirt; oder wenn die erste

Reihe divergirt, ihre unendlich wachsende Summe aber negativ wird. Denn in beiden Fällen divergirt, in Folge (8), die Reihe (4) gegen $-\infty$.

3) Das unendliche Produkt divergirt, wenn die erste Reihe divergirt und ihre unendlich wachsende Summe positiv ist. Denn in diesem Falle divergirt auch (4) gegen $+\infty$.

Die Anwendung dieser Regeln unterliegt keinen weiteren Schwierigkeiten. So findet man z. B., dass die Faktorenfolgen:

$$\left(1+\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdots$$

gegen einen von 0 verschiedenen Werth convergiren. Die Faktorenfolgen:

$$\left(1+\frac{x}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{x}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$
$$\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdots$$

convergiren gegen den Werth Null; das Produkt:

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots$$

ist hingegen divergent.

II.

DARSTELLUNG DER SINUS UND COSINUS DURCH PRODUKTE.

156. Lassen wir in den Formeln (6), (7), (8), (9) des § 72, m eine ganze Zahl bedeuten, so ist:

Wenn m gerade:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin x^4 - \ldots + \\ + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots m}\sin x^m, \qquad (1)$$

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = m - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}\sin x^2 + \ldots + \\ + (-1)^{\frac{m-2}{2}}\frac{m(m^2-2^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots(m-1)}\sin x^{m-2}; \qquad (2)$$

wenn m ungerade:

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = 1 - \frac{m^2 - 1^2}{1 \cdot 2} \sin x^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots[m^2 - (m-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-1)} \sin x^{m-1}, \quad (3)$$

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = m - \frac{m(m^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin x^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots[m^2 - (m-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m} \sin x^{m-1}. (4)$$

Die zweiten Theile dieser Gleichungen sind, wie man sieht, ganze rationale Funktionen von $\sin x$. Ist nun überhaupt:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_r z^r$$

eine solche Funktion von z des r^{ten} Grades und sind $z_1, z_2, z_3, \ldots z_r$ Werthe von z, r an der Zahl, welche diese Funktion auf 0 reduciren, also Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, so ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen:

$$f(z) = A_r (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_r).$$

Hiedurch ist nun ein leichtes Mittel geboten, obige Reihen in Produkte umzuformen. Betrachten wir zunächst die Gleichung (1). Setzen wir Kürze halber $\sin x = z$ und seien $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ die Sinus solcher Bögen, m an der Zahl, welche den zweiten Theil dieser Gleichung $= 0$ machen, so haben wir:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} C (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_m),$$

wo Kürze halber:

$$C = \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)\ldots[m^2 - (m-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m}$$

gesetzt ist. Durch Auflösung eines jeden der binomischen Faktoren im Zähler von C erhält man aber leicht:

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.4.6\ldots(m-4)(m-2)m(m+2)(m+4)\ldots(2m-4)(2m-2)(2m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist das Produkt aller geraden Zahlen 2 bis $2m$, deren Anzahl $= m$ ist; sondert man daher aus jeder ɜr Zahlen den Faktor 2 ab, so wird der Zähler $= 2^m.1.2.3.4\ldots m$, lich $C = 2^{m-1}$. Es erübrigt nun noch, jene Werthe von x auszu- ·eln, welche den zweiten Theil der Gl. (1) auf Null bringen; da diese Werthe auch den ersten Theil $\cos mx$ auf 0 reduciren müs- so finden wir sie aus den Gleichungen:

$$mx = +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \ldots + \frac{(m-1)\pi}{2},$$
$$= -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots - \frac{(m-1)\pi}{2},$$

nämlich:

$$x = +\frac{\pi}{2m}, +\frac{3\pi}{2m}, +\frac{5\pi}{2m}, \ldots + \frac{(m-1)\pi}{2m},$$
$$= -\frac{\pi}{2m}, -\frac{3\pi}{2m}, -\frac{5\pi}{2m}, \ldots - \frac{(m-1)\pi}{2m};$$

die Sinus dieser Bögen, m an der Zahl, sind nun die gesuchten Werthe von $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ und wir erhalten somit:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \times$$
$$\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x - \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)\times$$
$$\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x + \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x + \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right).$$

Vereinigt man endlich je zwei übereinanderstehende dieser einfachen Faktoren in einen quadratischen, wodurch die Anzahl derselben $=\frac{m}{2}$ wird und multiplicirt jeden derselben mit einer der in $(-1)^{\frac{m}{2}}$ enthaltenen negativen Einheiten, so erhält man für m gerade:

$$\cos mx = 2^{m-1}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\ldots$$
$$\ldots\left[\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]. \tag{5}$$

Eben so folgt aus (2):

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} C(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{m-2}),$$

wo wieder $z = \sin x$ und $z_1, z_2, \ldots z_{m-2}$ die Sinus jener Bögen sind, für welche beide Theile der Gl. (2) verschwinden. Diese Bögen ergeben sich daher aus der Gleichung $\sin mx = 0$ und sind, $m-2$ an der Zahl:

$$+\frac{2\pi}{2m}, +\frac{4\pi}{2m}, +\frac{6\pi}{2m}, \ldots + \frac{(m-2)\pi}{2m}$$
$$-\frac{2\pi}{2m}, -\frac{4\pi}{2m}, -\frac{6\pi}{2m}, \ldots - \frac{(m-2)\pi}{2m}. \text{*)}$$

*) Der aus $\sin mx = 0$ folgende Werth $x = 0$ ist unstatthaft, weil er den ers Theil von (2) nicht $= 0$ macht. Man hat nämlich für ein unendlich abnehmende

$$\lim\frac{\sin mx}{\sin x \cos x} = \lim\frac{\sin mx}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = m\,.\,1\,.\,1 = m. \text{ [Vergl. §. 77].}$$

Es ist ferner:

$$C = \frac{m(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)\ldots[m^2 - (m-2)^2]}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$= \frac{2.4.6\ldots(m-2)\,m(m+2)\ldots(2m-4)(2m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$= 2^{m-1},$$

folglich, wenn man sogleich je zwei der binomischen Faktoren in einen quadratischen vereinigt, wodurch die Anzahl derselben $\frac{m-2}{2}$ wird, und jeden derselben mit einer der in $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$ enthaltenen negativen Einheiten multiplicirt, für m gerade:

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\cos x\left[\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\ldots$$
$$\ldots\left[\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]. \qquad (6)$$

Eben so findet man aus (3) und (4) ohne alle Schwierigkeit für m ungerade:

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left[\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\ldots$$
$$\ldots\left[\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right], \qquad (7)$$

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left[\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\ldots$$
$$\ldots\left[\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]. \qquad (8)$$

Lässt man in diesen vier Formeln x unendlich klein werden und dividirt zu diesem Behufe zuvor die Gl. (6) durch $\sin x\cos x$, (7) durch $\cos x$, (8) durch $\sin x$, so ergeben sich, da:

$$\lim\cos mx = 1,\ \lim\frac{\sin mx}{\sin x.\cos x} = m,\ \lim\frac{\cos mx}{\cos x} = 1$$

ist, folgende bemerkenswerthe Gleichungen:

Für m gerade:

$$1 = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2m}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2, \quad (9)$$

$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2m}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2, \quad (10)$$

Für m ungerade:

$$1 = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2m}\right)^2\dots\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2, \quad (11)$$

$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2m}\right)^2\dots\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2, \quad (12)$$

Dividirt man nun die Gleichungen (5), (6), (7), (8) beziehungsweise durch (9), (10), (11), (12), so erhält man:

Für m gerade:

$$\cos mx = \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right]; \quad (13)$$

$$\sin mx = m\sin x\cos x \times \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right]. \quad (14)$$

Für m ungerade:

$$\cos mx = \cos x \times \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right]; \quad (15)$$

$$\sin mx = m\sin x \times \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right]. \quad (16)$$

Setzen wir in diesen vier Gleichungen $\frac{x}{m}$ an die Stelle von m, so erhalten wir:

Für m gerade:

$$\cos x = \left[1-\frac{\left(\sin\frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\left(\sin\frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\left(\sin\frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right]; \quad (17)$$

$$\sin x = m \sin \frac{x}{m} \cos \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right]. \quad (18)$$

Für m ungerade:

$$\cos x = \cos \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right], \quad (19)$$

$$\sin x = m \sin \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right]. \quad (20)$$

157. Mit Hilfe der letzten Formeln lassen sich nun die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ leicht durch unendliche Faktorenfolgen ausdrücken, indem man m unendlich wachsen lässt, was offenbar gestattet ist, da diese Formeln für jeden Werth von m gelten, wie gross man denselben auch annehmen mag. Es kommt dabei nur auf die Ausmittelung des Grenzwerthes:

$$\lim \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{r\pi}{2m}\right)^2} = \left[\lim \frac{\sin \frac{x}{m}}{\sin \frac{r\pi}{2m}}\right]^2 = G^2$$

für ein unendlich wachsendes m an. Setzt man $\frac{1}{m} = \alpha$, wo also α eine unendlich abnehmende Grösse bedeutet, und Kürze halber $\frac{r\pi}{2} = y$, wird:

$$G = \lim \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha y} = \lim \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha}}{\frac{\sin \alpha y}{\alpha}} = \lim \frac{\sin \alpha x}{\alpha} : \lim \frac{\sin \alpha y}{\alpha} = \frac{x}{y},$$

it:

$$\lim \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{r\pi}{2m}\right)^2} = \frac{4x^2}{r^2\pi^2};$$

beachtet man nun noch, dass bekanntlich $\lim \cos \frac{x}{m} = \lim \cos \alpha x = 1$, $\lim m \sin \frac{x}{m} = \lim \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = x$ ist, so erhält man sogleich aus (19) und (20):

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2 . \pi^2}\right) \ldots, \quad (21)$$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2 . \pi^2}\right) \ldots, \quad (22)$$

zwei Formeln, welche, wie man sich nach den in §. 155 aufgestellten Kriterien leicht überzeugt, für jeden Werth von x gelten. Setzt man $x = k\pi$, wo also k eine beliebige Zahl bedeuten kann, so nehmen sie folgende Form an:

$$\cos k\pi = \left(1 - \frac{4k^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2}{5^2}\right) \ldots, \quad (23)$$

$$\sin k\pi = k\pi \left(1 - \frac{k^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{3^2}\right) \ldots \quad (24)$$

Man übersieht leicht, dass mittelst dieser Formeln auch die übrigen trigonometrischen Funktionen durch unendliche Produkte dargestellt werden können. Schreibt man (24) in der Form:

$$\sin k\pi = k\pi \left(1 - \frac{k}{1}\right)\left(1 + \frac{k}{1}\right)\left(1 - \frac{k}{2}\right)\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(1 - \frac{k}{3}\right)\left(1 + \frac{k}{3}\right) \ldots (25)$$

und setzt $k = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \ldots$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots, \quad (26)$$

eine merkwürdige von Wallis gefundene Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in Faktoren.

III.

VERWANDLUNG DER REIHFN IN KETTENBRÜCHE.

158. Nebst den unendlichen Reihen und Produkten bietet die Analysis in den Kettenbrüchen noch eine bemerkenswerthe Form dar, um Grössen oder Funktionen darzustellen und deren Werthe näherungsweise zu berechnen. Wir wollen daher noch in Kürze ein Verfahren zur Verwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch kennen lernen, da man sich dieses Mittels in vielen Fällen mit Vortheil bedienen kann, um den Werth der Summe einer unendlichen Reihe näherungsweise zu finden, wenn diese nur schwach convergirt, oder wohl gar divergirt.

Man kann zu diesem Zwecke dieselbe, aus der Arithmetik bekannte, Methode anwenden, nach welcher man einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch verwandelt. Bezeichnen wir nämlich mit S die gegebene Reihe, so ist:

$$S = \frac{1}{1:S}, \text{ somit, wenn } \frac{1}{S} = v_0 + \frac{R_0}{S} \text{ gesetzt wird,}$$

$$S = \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{R_0}{S}} = \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{1}{S:R_0}}.$$

Sei ferner $S:R_0 = v_1 + \frac{R_1}{R_0}$, so wird:

$$S = \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{R_1}{R_0}}} = \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{1}{R_0:R_1}}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, immer den letzten Divisor durch den letzten Rest dividirend, so erhält man, wenn die bei den folgenden Divisionen erscheinenden Quotienten mit $v_2, v_3, v_4, \ldots$ bezeichnet werden:

$$S = \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{1}{v_2 + \cfrac{1}{v_3 + \cfrac{1}{v_4 + \ldots}}}}} \tag{I}$$

Zur Entwickelung der Quotienten $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ist folgendes scheische Verfahren bequem, welches wir einer gütigen Mittheilung des . Prof. S. Stampfer verdanken. Es sei:

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \tag{1}$$

gegebene Reihe, so erhält man, die Einheit durch dieselbe dividirend:

$$1:(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots) = \frac{1}{u_0} = v_0,$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{1 - u_1 v_0 + u_2 v_0 - u_3 v_0 + u_4 v_0 - \ldots} \\ R_0 = & u_1 v_0 - u_2 v_0 + u_3 v_0 - u_4 v_0 + \ldots \\ = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \end{array}$$

wenn Kürze halber:

$$u_1 v_0 = a_0, \quad u_2 v_0 = a_1, \quad u_3 v_0 = a_2, \ldots$$

gesetzt wird. Dividirt man mit diesem Reste in den Divisor, so kommt:

$$(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots):(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots) = \frac{u_0}{a_0} = v_1,$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{u_0 - a_1 v_1 + a_2 v_1 - a_3 v_1 + \ldots} \\ R_1 = & (a_1 v_1 - u_1) - (a_2 v_1 - u_2) + (a_3 v_1 - u_3) - \ldots \\ = & b_0 - b_1 + b_2 - \end{array}$$

wenn wir wieder:

$$a_1 v_1 - u_1 = b_0, \; a_2 v_1 - u_2 = b_1, \; a_3 v_1 - u_3 = b_2, \ldots$$

setzen. Ferner:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots):(b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots) = \frac{a_0}{b_0} = v_2,$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{a_0 - b_1 v_2 + b_2 v_2 - b_3 v_2 + \ldots} \\ R_2 = & (b_1 v_2 - a_1) - (b_2 v_2 - a_2) + (b_3 v_2 - a_3) - \ldots \\ = & c_0 - c_1 + c_2 - \ldots \end{array}$$

$$(b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots):(c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots) = \frac{b_0}{c_0} = v_3,$$

u. s. w.

Wie man sieht, kommt es nur auf die successive Bildung der Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \\ b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

u. s. w.

aus der gegebenen Reihe (1) an, indem dann:

$$v_0 = \frac{1}{u_0}, \; v_1 = \frac{u_0}{a_0}, \; v_2 = \frac{a_0}{b_0}, \; v_3 = \frac{b_0}{c_0}, \ldots$$

ist. Diese Reihen ergeben sich aber einfach mit Hilfe des folgen Schema, wie aus der Vergleichung mit der vorstehenden Rechn sogleich erhellt:

$$
\begin{array}{llllll}
u_0 & & & & & \\
u_1 & u_1 v_0 = a_0 & & & & \\
u_2 & u_2 v_0 = a_1 & a_1 v_1 - u_1 = b_0 & & & \\
u_3 & u_3 v_0 = a_2 & a_2 v_1 - u_2 = b_1 & b_1 v_2 - a_1 = c_0 & & \\
u_4 & u_4 v_0 = a_3 & a_3 v_1 - u_3 = b_2 & b_2 v_2 - a_2 = c_1 & c_1 v_3 - b_1 = d_0 & \\
u_5 & u_5 v_0 = a_4 & a_4 v_1 - u_4 = b_3 & b_3 v_2 - a_3 = c_2 & c_2 v_3 - b_2 = d_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
v_0 = \frac{1}{u_0} & v_1 = \frac{u_0}{a_0} & v_2 = \frac{a_0}{b_0} & v_3 = \frac{b_0}{c_0} & v_4 = \frac{c_0}{d_0} &
\end{array}
$$

u. s. w.

Dabei ist zu bemerken, dass die Bildungsgesetze der Reihen (2) immer leicht in die Augen fallen, wenn man sie nicht durch voreilige Reduktionen stört, so dass dann nur sehr wenig zu schreiben übrig bleibt.

Bezeichnen wir mit $\frac{Z_1}{N_1}$, $\frac{Z_2}{N_2}$, u. s. w. die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche des Kettenbruches (I), so ist bekanntlich:

$$
\begin{array}{ll}
Z_1 = 1, & N_1 = v_0, \\
Z_2 = v_1 Z_1, & N_2 = v_1 N_1 + 1, \\
Z_3 = v_2 Z_2 + Z_1, & N_3 = v_2 N_2 + N_1, \\
Z_4 = v_3 Z_3 + Z_2, & N_4 = v_3 N_3 + N_2, \\
\cdots & \cdots \\
Z_n = v_{n-1} Z_{n-1} + Z_{n-2} & N_n = v_{n-1} N_{n-1} + N_{n-2}.
\end{array}
$$

Wendet man den bekannten Satz, dass der Werth eines Kettenbruches unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner eines Gliedes und den Zähler des darauf folgenden mit einer und derselben Grösse multiplicirt oder dividirt, auf den Kettenbruch (I) an, so bringt man ihn leicht auf die Form:

$$
S = \cfrac{w_0}{1 + \cfrac{w_1}{1 + \cfrac{w_2}{1 + \cfrac{w_3}{1 + \ldots}}}} \tag{II}
$$

wo:

$$
= \frac{1}{v_0},\ w_1 = \frac{1}{v_0 v_1},\ w_2 = \frac{1}{v_1 v_2},\ w_3 = \frac{1}{v_2 v_3},\ \ldots w_n = \frac{1}{v_{n-1} v_n},\ \ldots
$$

und die Grössen w häufig einen einfacheren Ausdruck gestatten, die Grössen v. Für diese Form hat man als reducirte Brüche:

$$
\frac{Z_1}{N_1} = \frac{w_0}{1},\quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{w_0}{1 + w_1},
$$

und vom 3ten augefangen;

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} + w_{n-1} Z_{n-2}}{N_{n-1} + w_{n-1} N_{n-2}}.$$

Wenden wir nun das obige Verfahren auf einige Beispiele an.

1) Es sei:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln. Der Deutlichkeit wegen möge hier die Rechnung ausführlich stehen, wobei die zulässigen Abkürzungen von selbst in die Augen fallen.

u:

$$1,\quad -x,\quad +\frac{x^2}{2!},\quad -\frac{x^3}{3!},\quad +\frac{x^4}{4!},\quad -\frac{x^5}{5!},\quad +\frac{x^6}{6!},\quad \ldots$$

$$v_0 = 1$$

a:

$$-x,\quad +\frac{x^2}{2!},\quad -\frac{x^3}{3!},\quad +\frac{x^4}{4!},\quad -\frac{x^5}{5!},\quad +\frac{x^6}{6!},\quad \ldots$$

$$v_1 = -\frac{1}{x}$$

b:

$$-\frac{x}{2!} + x = \frac{x}{2!}$$

$$+\frac{x^2}{3!} - \frac{x^2}{2!} = -\frac{2x^2}{3!}$$

$$-\frac{x^3}{4!} + \frac{x^3}{3!} = +\frac{3x^3}{4!}$$

$$+\frac{x^4}{5!} - \frac{x^4}{4!} = -\frac{4x^4}{5!}$$

$$-\frac{x^5}{6!} + \frac{x^5}{5!} = +\frac{5x^5}{6!}$$

$$\vdots$$

$$v_2 = -x : \frac{x}{2!} = -2$$

c:

$$+\frac{2 \cdot 2x^2}{3!} - \frac{x^2}{2!} = \frac{1 \cdot x^2}{3!}$$

$$-\frac{2 \cdot 3x^3}{4!} + \frac{x^3}{3!} = -\frac{2x^3}{4!}$$

$$+\frac{2 \cdot 4x^4}{5!} - \frac{x^4}{4!} = +\frac{3x^4}{5!}$$

$$-\frac{2 \cdot 5x^5}{6!} + \frac{x^5}{5!} = -\frac{4x^5}{6!}$$

$$\vdots$$

$$v_3 = \frac{x}{2!} : \frac{x^2}{3!} = \frac{3}{x}$$

d:

$$-\frac{3 \cdot 2x^2}{4!} + \frac{2x^2}{3!} = +\frac{1 \cdot 2x^2}{4!}$$

$$+\frac{3 \cdot 3x^3}{5!} - \frac{3x^3}{4!} = -\frac{2 \cdot 3x^3}{5!}$$

$$-\frac{3 \cdot 4x^4}{6!} + \frac{4x^4}{5!} = +\frac{3 \cdot 4x^4}{6!}$$

$$\vdots$$

$$v_4 = \frac{1 \cdot x^2}{3!} : \frac{1 \cdot 2x^2}{4!} = 2$$

e:

$$-\frac{2 \cdot 2 \cdot 3x^3}{5!} + \frac{2x^3}{4!} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot x^3}{5!}$$

$$+\frac{2 \cdot 3 \cdot 4x^4}{6!} - \frac{3x^4}{5!} = +\frac{2 \cdot 3x^4}{6!}$$

$$\vdots$$

$$v_5 = \frac{1 \cdot 2x^2}{4!} : -\frac{1 \cdot 2x^3}{5!} = -\frac{5}{x}$$

$$-\frac{5\,.\,2\,.\,3x^3}{6!}+\frac{2\,.\,3x^3}{5!}=+\frac{1\,.\,\overbrace{2\,.\,3}^{f}x^3}{6!}$$

$\vdots$ u. s. w.

$$v_6=-\frac{1\,.\,2x^3}{5!}:\frac{1\,.\,2\,.\,3x^3}{6!}=-2$$

Das Fortschreitungsgesetz der Grössen:

$$v_0=1,\qquad v_1=-\frac{1}{x}$$
$$v_2=-2\qquad v_3=\frac{3}{x}$$
$$v_4=2\qquad v_5=-\frac{5}{x}$$
$$v_6=-2\qquad v_7=\frac{7}{x}$$

u. s. w.

ist ersichtlich und man hat daher:

$$e^x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\cfrac{5}{x}+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}+\cdots}}}}}}}}$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\cdots}}}}}}}}$$

Setzt man $x=1$, so erhält man die Basis e der natürlichen Lo-ithmen durch einen Kettenbruch ausgedrückt; für den 10ten redu-en Bruch desselben, welcher das Glied $+\cfrac{1}{-\cfrac{9}{x}}$ als letztes in Anspruch -immt, findet man $e=\frac{23225}{8544}=2{,}718281835\ldots$, welcher Werth in 7ten Dezimalstelle noch richtig ist.

2) Es ist $l(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \ldots\right)$;
durch Anwendung des obigen Verfahrens auf die eingeklammerte Reihe findet man:

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \frac{2}{1.x}, \quad v_2 = 3, \quad v_3 = \frac{2}{2x},$$

$$v_4 = 5, \quad v_5 = \frac{2}{3x}, \quad v_6 = 7, \quad v_7 = \frac{2}{4x}, \text{ u. s. w.}$$

Es ist daher:

$$l(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1.x} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2x} + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{3x} + \ldots}}}}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{\cfrac{2}{1} + \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{x}{5 + \cfrac{x}{\cfrac{2}{3} + \ldots}}}}}}$$

Die Reihe für $l(1+x)$ convergirt bekanntlich nur für Werthe von $x < 1$, während der Kettenbruch auch noch für grössere Werthe von x zu einem genäherten Werthe von $l(1+x)$ führt. Bezeichnen wir Kürze halber den n^{ten} reducirten Bruch mit $\{n\}$, so findet man z. B., $x = 3$ setzend, für $l4$ folgende Werthe:

$$\{10\} = \frac{7971}{5750} = 1,386261\ldots$$

$$\{11\} = \frac{93957}{67775} = 1,386308\ldots$$

$$\{12\} = \frac{1158177}{835450} = 1,386291\ldots$$

$$\{13\} = \frac{21445377}{15469550} = 1,38629611\ldots$$

Der wahre Werth ist $l4 = 1,38629436\ldots$, mit welchem $\{13\}$ in 5 Dezimalstellen stimmt.

3) Für $\operatorname{arc\,tg} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots\right)$

findet man:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{1^2.x^2}{1.3}, \quad w_2 = \frac{2^2.x^2}{3.5}, \quad w_3 = \frac{3^2.x^2}{5.7}, \quad w_4 = \frac{4^2.x^2}{7.9}, \text{ u. [illegible]}$$

Hiemit erhält man, unter Anwendung der Form (II), nach l[illegible]ter Reduktion:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \frac{16x^2}{9 + \frac{25x^2}{11 + \dots}}}}}}$$

Für $x = 1$ folgt hieraus:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \dots}}}}}}$$

Dieser Kettenbruch für $\frac{\pi}{4}$ convergirt ziemlich rasch; man findet: $\{6\} = 0{,}785366\dots$, $\{7\} = 0{,}7854035\dots$, $\{8\} = 0{,}7853972\dots$; der wahre Werth ist $\frac{\pi}{4} = 0{,}7853981633\dots$, so dass der 8[te] reducirte Bruch schon 5 richtige Stellen gibt.

4) Wendet man dasselbe Verfahren auf die Binomialreihe:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

an, so findet man:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = -nx \quad w_2 = \frac{(n+1)x}{1.2}, \quad w_3 = -\frac{(n-1)x}{2.3},$$

$$w_4 = \frac{(n+2)x}{2.3}, \quad w_5 = -\frac{(n-2)x}{2.5}, \quad w_6 = \frac{(n+3)x}{2.5}, \quad w_7 = -\frac{(n-3)x}{2.7},$$

$$w_8 = \frac{(n+4)x}{2.7}, \quad w_9 = -\frac{(n-4)x}{2.9}, \dots;$$

folglich kommt nach Hebung der Brüche:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - \frac{nx}{1 + \frac{(n+1)x}{2 - \frac{(n-1)x}{3 + \frac{(n+2)x}{2 - \frac{(n-2)x}{5 + \frac{(n+3)x}{2 - \frac{(n-3)x}{7 + \dots}}}}}}}}$$

Schreibt man aber die Binomialreihe in der Form:

$$(1+x)^n = 1 + nx\left(1 + \frac{(n-1)}{1.2}x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \dots\right),$$

und verwandelt nun die Reihe in den Klammern in einen Kettenbruch, so erhält man:

$$(1+x)^n =$$

$$1+\cfrac{nx}{1-\cfrac{(n-1)x}{2+\cfrac{(n+1)x}{3-\cfrac{(n-2)x}{2+\cfrac{(n+2)x}{5-\cfrac{(n-3)x}{2+\cfrac{(n+3)x}{7-\ldots}}}}}}}$$

Da $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, so kann hiernach auch $(a+b)^n$ in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man hat zu diesem Behufe in obigen Kettenbrüchen nur $x = \frac{b}{a}$ zu setzen und dieselben mit a^n zu multipliciren.

Setzt man $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ so erhält man specielle Ausdrücke, welche mit Vortheil zur Wurzelausziehung benutzt werden können. Für $n = \frac{1}{2}$ findet man z. B. aus der zweiten der obigen Formen:

$$\sqrt{1+x} = 1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ldots}}} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

Ist nun aus irgend einer Zahl A die Quadratwurzel zu ziehen, so setze man $A = a^2 + b$, wo a^2 ein der Zahl A möglichst nahe liegendes vollständiges Quadrat ist, so wird $\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b} = a\left(1+\frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, und folglich:

$$\sqrt{a^2+b} = a+\cfrac{1}{\cfrac{2a}{b}+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{\cfrac{2a}{b}+\cfrac{1}{2a+\ldots}}}}$$

Dieser Kettenbruch ist periodisch, welcher Umstand davon herrührt, dass überhaupt der Werth eines jeden unendlichen periodischen Kettenbruches durch eine Gleichung des 2ten Grades gegeben ist. In der That, es sei:

$$x = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n+\ldots}}}}}}}$$

ein unendlicher Kettenbruch mit n gliedriger Periode, so ist offenbar:

$$x = \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 + \ldots} + \frac{1}{a_n + x};$$

sucht man nun die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche dieses endlichen Kettenbruches und bezeichnet den $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} (von welchen der letztere noch das Glied $\frac{1}{a_n}$ in Anspruch nimmt, mit $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$, so hat man für den Werth des $(n+1)^{ten}$ reducirten Bruches, welcher zugleich den Werth x des vollständigen Kettenbruches darstellt:

$$x = \frac{Z_n + x Z_{n-1}}{N_n + x N_{n-1}},$$

welche Gleichung, gehörig geordnet, in Bezug auf x quadratisch ist.

5) Für die Reihe:

$$S = 1 - 1 . x + 1 . 3 x^2 - 1 . 3 . 5 . x^3 + 1 . 3 . 5 . 7 x^4 - \ldots$$

findet man:

$$w_0 = 1,\ w_2 = x,\ w_3 = 2x,\ w_4 = 3x, \ldots w_n = (n-1)x,$$

folglich ist:

$$S = \frac{1}{1 +} \frac{x}{1 +} \frac{2x}{1 +} \frac{3x}{1 +} \frac{4x}{1 + \ldots}$$

Obige Reihe ist, wie wir in der Integralrechnung finden werden, die Entwickelung einer gewissen Funktion, welcher für einen bestimmten Werth von x auch ein bestimmter Werth zukommt, der jedoch mittelst obiger Reihe nicht gefunden werden kann, da sie für jeden Werth von x divergirt. Mit Hilfe des Kettenbruches lässt sich hingegen die Summirung (wenigstens für kleine Werthe von x; für grössere steht eine andere Entwickelung zu Gebote, welche wieder bei kleinen Werthen von x unbrauchbar wird) bewerkstelligen. Setzt man z. B. $x = 0,1$, so geben die ersten zehn Näherungsbrüche folgende Werthe des Kettenbruches, welche, wie man sieht, rasch convergiren:

$\{1\} = 1$	$\{6\} = 0{,}9207420\ldots$
$\{2\} = 0{,}909090\ldots$	$\{7\} = 0{,}9207990\ldots$
$\{3\} = 0{,}923077\ldots$	$\{8\} = 0{,}9207804\ldots$
$\{4\} = 0{,}920244\ldots$	$\{9\} = 0{,}9207870\ldots$
$\{5\} = 0{,}920930\ldots$	$\{10\} = 0{,}9207844\ldots$

6) Die Reihe:

$$S = x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - 1.2.3.4x^4 + \dots$$

auf dieselbe Weise behandelt, liefert folgenden Kettenbruch:

$$S = \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

Für $x = 1$, erhält man hieraus:

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \dots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{5}{1 + \dots}}}}}}}}$$

und findet für die Werthe der reducirten Brüche dieses Kettenbruches, vom 20sten angefangen:

$$\{20\} = 0{,}403621\dots \qquad \{23\} = 0{,}403673\dots$$
$$\{21\} = 0{,}403689\dots \qquad \{24\} = 0{,}403643\dots$$
$$\{22\} = 0{,}403635\dots \qquad \{25\} = 0{,}403663\dots$$

Euler fand auf anderem Wege 0,4036524 ... als Werth der Summe dieser sehr divergirenden Reihe. Auch hier ist, wie überhaupt in ähnlichen Fällen, dieser Ausdruck in dem schon im vorigen Beispiele angedeuteten Sinne zu verstehen, dass die obige Reihe: $x - 1.2x^2 + \dots$ die Entwickelung einer gewissen Funktion $f(x)$ darstellt, deren Werth jedoch aus der für jedes x divergirenden Reihe nicht gefunden werden kann, weil der Rest der Reihe, oder das Ergänzungsglied, d. i. die Summe aller auf das n^{te} folgenden Glieder mit unendlich wachsendem n selbst unendlich gross wird und also nie vernachlässiget werden kann.

Anmerkung. So wie übrigens eine unendliche Reihe, wenn sie zur näherungsweisen Berechnung der Funktion, deren Entwickelung sie ist, dienen soll, convergiren muss, eben so gut gilt dies auch von den unendlichen Kettenbrüchen. Wenn die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche, sowohl gerader als ungerader Ordnung, sich nicht einer und derselben bestimmten Grenze nähern, so ist der Kettenbruch für divergent zu halten. Nur Kettenbrüche von der Form:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wo die Zähler der einzelnen Glieder $= 1$ und die Nenner $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ganze, positive Zahlen sind, convergiren immer und die reducirten Brüche führen hier mit Recht den Namen Näherungsbrüche. Dies findet aber nicht mehr nothwendig statt, wenn der Kettenbruch eine andere Form hat, und es bedarf dann ebenso, wie bei den Reihen, einer Untersuchung ihrer Convergenz, wozu wir jedoch nur für specielle Fälle die Hilfsmittel besitzen.

7) Bisweilen bricht die Entwickelung der Grössen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ab, indem die sämmtlichen Glieder irgend einer der Reihen (2) verschwinden; in diesem Falle erhält man also die Summe der unendlichen Reihe durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt, welcher auf bekannte Weise in einen gemeinen Bruch verwandelt werden kann. Dies tritt ein, wenn die Reihe eine rücklaufende ist [§. 13], deren erzeugender Bruch aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht. — So findet man für die Reihe:

$$S = 1 + 2x + 5x^2 + 12x^3 + 29x^4 + \ldots$$

$$v_0 = 1,\ v_1 = -\frac{1}{2x},\ v_2 = 4,\ v_3 = \frac{1}{2x},\ v_4 = \infty,$$

somit:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{2x} + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2x}}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{2x}{1 - \cfrac{x}{2 + x}}} = \frac{1}{1 - 2x - x^2}.$$

In der That ist die gegebene Reihe eine rücklaufende der 2ten Ordnung (jeder Coefficient $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$), und $\frac{1}{1 - 2x - x^2}$ ihr erzeugender Bruch, wie man umgekehrt durch Entwickelung desselben sich leicht überzeugt.

Geom. – Anal.

ZWEITER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE.

ANALYTISCHE GEOMETRIE.

Die geometrische Darstellung einer Gleichung $y = f(x)$ zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y, welche wir in §. 14 kennen gelernt haben, eröffnet uns den Weg zu einem der wichtigsten Theile der Mathematik. Wir haben gesehen, dass die Gleichung $y = f(x)$, auf die dort angegebene Weise in einer Ebene construirt, im Allgemeinen zu einer krummen Linie führt, welche nach einem gewissen Gesetze gebildet ist, als dessen analytischer Ausdruck eben die Gleichung $y = f(x)$ betrachtet werden muss, daher dieselbe auch die Gleichung dieser Curve, so wie umgekehrt die Curve der geometrische Ort der Gleichung $y = f(x)$ genannt wird. Wir können daher annehmen, dass es auch immer möglich sein wird, die zu einer gegebenen Curve, deren Bildungsgesetz bekannt ist, gehörende Gleichung zu finden, und sind dadurch in den Stand gesetzt, ohne Hilfe einer Zeichnung, durch eine analytische Formel die Gestalt einer jeden Curve auszudrücken und festzuhalten.

Das Bildungsgesetz einer Curve ist aber nichts anderes, als der Ausdruck irgend einer hervorragenden, die Curve charakterisirenden Eigenschaft, aus welcher sich sämmtliche übrige Eigenschaften derselben müssen ableiten lassen. In der sogenannten Elementargeometrie geschieht dies bekanntlich durch geeignete Constructionen. Besitzen wir aber für das Bildungsgesetz einen analytischen Ausdruck, so wird es auch möglich sein, aus diesem durch blosse Rechnung, auf analytischem Wege, alle Eigenschaften des in Rede stehenden geometrischen Gebildes abzuleiten.

Die Gleichung einer Curve ist aber nicht allein der analytische Ausdruck ihrer Gestalt und Eigenschaften, sie bestimmt auch deren Lage in einer Ebene in Bezug auf zwei in derselben angenommene feste [Ax]en. Jede geometrische Aufgabe läuft aber am Ende darauf hinaus, [en]tweder die geometrischen Gebilde zu bestimmen, welche gegebenen [Be]dingungen Genüge leisten, oder umgekehrt die Eigenschaften gegebener geometrischer Gebilde und deren Beziehungen unter einander

zu erforschen. Da wir nun im Stande sind, Gestalt und gegenseitige Lage derselben analytisch auszudrücken, so geht hieraus die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Geometrie zur Genüge hervor.

Das Gesagte findet offenbar Anwendung auch auf räumliche Gebilde, d. i. solche, welche nicht mit allen ihren Theilen in einer und derselben Ebene liegen, da jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen $z = f(x, y)$, im Raume construirt, zu einer Fläche führt.

In der Entwickelung dieser Methode, durch Darstellung ihrer Principien sowohl als deren wichtigster Ergebnisse, besteht derjenige Theil der Mathematik, welcher **analytische Geometrie**, bisweilen auch **Anwendung der Analysis auf Geometrie** genannt wird.

Wir theilen dieselbe in zwei Abschnitte: **analytische Geometrie in der Ebene** und **analytische Geometrie im Raume**, von welchen der erste sich mit den in einer Ebene liegenden geometrischen Gebilden beschäftiget, der zweite mit solchen, welche im Raume construirt sind.

I. ABSCHNITT.

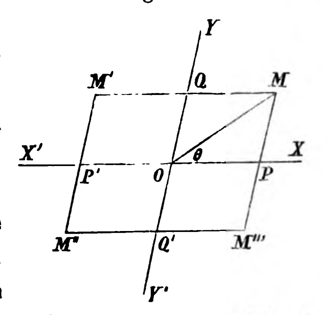
ANALYTISCHE GEOMETRIE IN DER EBENE.

ERSTES KAPITEL.

BESTIMMUNG DER LAGE EINES PUNKTES. — COORDINATEN-SYSTEME. — TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

159. Es seien (Fig. 4) XX', YY' zwei feste, ihrer Lage nach unveränderliche, nicht parallele Gerade in einer Ebene, M ein Punkt in derselben, dessen Lage bestimmt werden soll. Ziehen wir die Geraden MQ und MP beziehungsweise parallel zu XX' und YY', so ist klar, dass die Längen dieser Geraden die Lage des Punktes M in dem Winkel XOY unzweideutig bestimmen.

Fig. 4.



Man nennt diese Geraden MP und MQ die Coordinaten des Punktes M; die eine derselben $MQ = OP$, welche parallel zur festen Geraden XX' liegt, pflegt man mit x, die andere zur festen Geraden YY' parallele mit y zu bezeichnen und erstere die Abscisse, letztere die Ordinate des Punktes M zu nennen.

Die festen Geraden XX', YY' heissen die Coordinaten-Axen und zwar beziehungsweise Axe der x, oder Abscissenaxe und Axe der y, oder Ordinatenaxe; ihr Durchschnittspunkt O der Anfang oder Ursprung der Coordinaten, weil von ihm aus die beiden Coordinaten $OP = MQ = x$ und $OQ = MP = y$ gezählt werden; der Winkel Y, welchen die beiden Axen bilden, der Coordinatenwinkel, Inbegriff beider Axen ein Coordinatensystem. Dasselbe heisst rechtwinkeliges, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist, edem anderen Falle ein schiefwinkeliges.

Die Lage des Punktes M in der Ebene würde jedoch durch die nerischen Werthe seiner Coordinaten MP und MQ allein nicht

vollständig bestimmt sein, da denselben offenbar noch drei andere Punkte M', M'', M''' entsprechen, welche mit jenem in gleichen Abständen von den Axen liegen. Um diese vier Punkte von einander zu unterscheiden, genügt es, die Coordinaten derselben mit Vorzeichen zu versehen. Man pflegt die Abscissen, welche vom Ursprunge aus nach rechts in der Richtung OX gezählt werden, als positiv, jene nach links in der Richtung OX' als negativ zu betrachten; die Ordinaten werden von O nach aufwärts in der Richtung OY positiv, jene nach abwärts in der Richtung OY' negativ genommen.

Jede der beiden Coordinatenaxen wird durch den Ursprung O in zwei Theile, Halbaxen, getheilt, von welchen die eine der Kürze wegen die positive, die andere die negative Halbaxe genannt werden mag. Unter dem Coordinatenwinkel verstehen wir immer jenen der vier Axenwinkel, welchen die beiden positiven Halbaxen einschliessen; er ist immer $< 180^0$.

Bezeichnen wir also mit m, n die numerischen Werthe der Coordinaten MP und MQ, so erhalten wir für die vier Punkte M, M', M'', M''' folgendes Schema:

$$M \begin{cases} x = + m \\ y = + n \end{cases} \quad M' \begin{cases} x = - m \\ y = + n \end{cases} \quad M'' \begin{cases} x = - m \\ y = - n \end{cases} \quad M''' \begin{cases} x = + m \\ y = - n \end{cases}$$

woraus man erkennt, dass durch die zwei Gleichungen:

$$x = a, \ y = b \tag{1}$$

die Lage eines Punktes in der Ebene vollkommen und unzweideutig bestimmt ist, wenn wir unter a und b die mit den gehörigen Vorzeichen versehenen Werthe der Coordinaten verstehen. Die Gleichungen (1) werden aus diesem Grunde die Gleichungen des Punktes genannt.

Als besondere Fälle der Glgn. (1) sind folgende zu bemerken:

1) $x = a$, $y = 0$; diese Gleichungen gehören zu einem in der Abscissenaxe liegenden Punkte.

2) $x = 0$, $y = b$, welche einen in der Ordinatenaxe liegenden Punkt bestimmen; endlich sind

3) $x = 0$, $y = 0$ die Gleichungen des Ursprunges selbst.

160. Die im vorigen Paragraphe entwickelte Methode zur Bes[timmung] der Lage eines Punktes in der Ebene, mittelst zweier zu z[wei] festen sich schneidenden Axen paralleler Coordinaten (daher dieses Sys[tem] auch Parallel-Coordinatensystem genannt wird), ist aber off[en]bar nicht das einzige Mittel zu diesem Zwecke und es liessen s[ich an]deren leicht mehrere ausdenken, unter welchen jedoch nur noch

sogenannte **Polar-Coordinatensystem** von besonderer Wichtigkeit und häufigem Gebrauche ist. Wir denken uns wieder in der Ebene eine feste Gerade XX' (Fig. 4) als Axe, die **Polaraxe**, und in derselben einen festen Punkt O, als Ursprung, hier der **Pol** genannt, und von demselben eine Gerade OM zu einem beliebigen Punkte M in der Ebene gezogen. Die Lage desselben ist offenbar bestimmt, wenn die **Länge** der Geraden OM und die Neigung derselben gegen die eine Halbaxe, z. B. OX, also der Winkel MOX gegeben sind. Die Gerade OM wird der **Radiusvektor** des Punktes M genannt; der Winkel MOX möge **Polarwinkel** heissen; ersteren werden wir gewöhnlich mit r, letzteren mit θ bezeichnen. Dieser Winkel wird, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, stets von der rechten Halbaxe OX aus von 0 bis 360^0 herum und zwar — wenn wir uns im Punkte O auf der Ebene stehend denken — von rechts nach links gezählt werden, wobei r im Allgemeinen immer positiv bleibt.

161. Fällt, wie in Fig. 4, die Polaraxe mit der Abscissenaxe, der Pol mit dem Ursprunge des Parallel-Coordinatensystems zusammen, so stehen die Parallelcoordinaten x, y eines Punktes M mit den Polarcoordinaten in sehr einfachen Beziehungen. Aus dem Dreiecke OMP folgt nämlich, wenn der Coordinatenwinkel $XOY = \varphi$ gesetzt wird;

$$\left.\begin{aligned} x &= r.\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}, \\ y &= r.\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\varphi}, \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y\sin\varphi}{x+y\cos\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ist das Parallel-Coordinatensystem ein rechtwinkeliges, so ist $\varphi = 90^0$, somit:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (3) \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln allgemein gelten, in welchem der Axenwinkel der Punkt M auch liegen mag.

TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

162. Sehr häufig tritt das Bedürfniss ein, von einem Coordinaten-teme, dessen man sich bei einer Aufgabe bedient hat, auf ein neues erzugehen, in Bezug auf welches die Gleichungen eine einfachere, oder nigstens dem Zwecke der Untersuchung sich besser anschmiegende m erhalten. Diese Aufgabe führt den Namen: **Transformation**

der Coordinaten, und kommt offenbar darauf hinaus, die Coordinaten eines Punktes, welche sich auf das ursprüngliche Coordinatensystem beziehen, auszudrücken durch die auf das neue System sich beziehenden Coordinaten dieses Punktes, unter der Voraussetzung, dass die Lage des neuen Axensystems gegen das ursprüngliche gegeben ist.

Der einfachste Fall ist jener, wenn bloss der Ursprung geändert wird, die Richtung der Axen aber unverändert bleibt.

Seien OX, OY (Fig. 5) die ursprünglichen Axen, und M ein Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf dieselben $OP = x$, $MP = y$ sein mögen.

Fig. 5.

Sei ferner O' der Ursprung des neuen Systems, dessen Axen $O'X'$, $O'Y'$ den ursprünglichen parallel sein sollen; bezeichnen wir mit a, b, die Coordinaten des neuen Ursprunges O' bezogen auf das alte System, mit x', y' die neuen Coordinaten des Punktes M, so ist, wie man sieht, $OP = OB + BP = OB + O'P'$, $MP = PP' + MP' = O'B + MP'$, somit:

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \tag{1}$$

163. Von einem schiefwinkeligen Coordinatensysteme zu einem anderen schiefwinkeligen, ohne Aenderung des Ursprunges überzugehen.

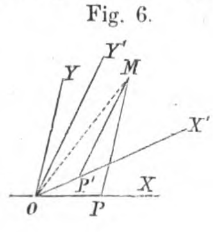


Fig. 6.

Seien (Fig. 6) der alte Coordinatenwinkel $XOY = \varphi$, der neue $X'OY' = \varphi'$, ferner θ, θ' die Winkel, welche der Radiusvektor $OM = r$ des Punktes M mit den Axen OX und OX' bildet, so haben wir, wenn mit x, y die alten, mit x', y' die neuen Coordinaten des Punktes M bezeichnet werden, vermöge der Glgn. (1), §. 161:

$$x = \frac{r \sin(\varphi - \theta)}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{r \sin \theta}{\sin \varphi} \tag{m}$$

$$x' = \frac{r \sin(\varphi' - \theta')}{\sin \varphi'}, \quad y' = \frac{r \sin \theta'}{\sin \varphi'}$$

Sind nun α, α' die Winkel, welche die neue Abscissen- und Ordinatenaxe mit der alten Abscissenaxe einschliessen, so wird:

$$\varphi' = \alpha' - \alpha, \quad \theta' = \theta - \alpha, \text{ somit } \varphi' - \theta' = \alpha' - \theta,$$

wodurch die Glgn. (n) übergehen in:

$$x' = \frac{r \sin(\alpha' - \theta)}{\sin(\alpha' - \alpha)}, \quad y' = \frac{r \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)},$$

aus welchen durch Entwickelung des Zählers:

$$x' \sin(\alpha' - \alpha) = r \sin\alpha' \cos\theta - r \cos\alpha' \sin\theta,$$
$$y' \sin(\alpha' - \alpha) = - r \sin\alpha \cos\theta + r \cos\alpha \sin\theta$$

folgt. Werden diese Gleichungen, die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha'$ multiplicirt und addirt, so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors $\sin(\alpha' - \alpha)$:

$$r \cos\theta = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'.$$

Addirt man aber dieselben Gleichungen, nachdem die erste mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha'$ multiplicirt worden ist, so folgt:

$$r \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'.$$

Durch Substitution dieser Werthe von $r \sin\theta$ und $r \cos\theta$ in die Gleichungen (m) erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin\varphi}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\varphi}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

welche die gesuchten Transformationsformeln sind.

Sollte auch noch der Ursprung geändert und in einen Punkt verlegt werden, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche System a, b sind, so erhält man mit Rücksicht auf (1):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin\varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Erfordert übrigens eine Aufgabe sowohl die Veränderung des Ursprunges als der Richtung der Axen, so ist es gewöhnlich vortheilhaft, diese beiden Transformationen eine nach der anderen auszuführen. Die Formeln (2) und (3) sind allgemein giltig, welche auch die Richtung der neuen Axen sein mag, wenn nur für α und α' immer die Winkel genommen werden, welche die neuen **positiven** Halbaxen der x' und y' mit der ursprünglichen **positiven** Halbaxe der x bilden, in der Richtung von OX gegen OY von 0 bis 360^0 gezählt.

164. In den bei weiten meisten Fällen kommen rechtwinkelige Coordinatensysteme in Anwendung, da sich für solche die Ausdrücke

in der Regel am einfachsten gestalten. Betrachten wir daher noch folgende spezielle Fälle.

I. Von einem rechtwinkeligen zu einem schiefwinkeligen Coordinatensysteme überzugehen.

Die hiezu dienenden Formeln ergeben sich aus den allgemeinen Transformationsformeln (3), indem man $\varphi = 90^0$ setzt; man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

II. Von einem schiefwinkeligen zu einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme überzugehen.

Man setze in (3) $\alpha' = 90^0 + \alpha$, somit $\varphi - \alpha' = -\{90^0 - (\varphi - \alpha)\}$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) - y' \cos(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

III. Von einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme auf ein anderes gleichfalls rechtwinkeliges überzugehen.

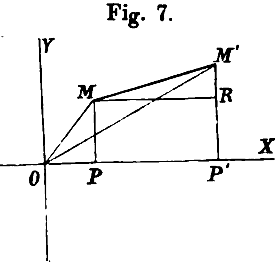
Zu diesem Behufe haben wir in (3) $\varphi = 90^0$ und $\alpha' = \alpha + 90^0$ zu setzen, und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ENTFERNUNG ZWEIER GEGEBENER PUNKTE.

165. Es seien (Fig. 7) M, M' zwei Punkte, deren rechtwinkelige Coordinaten x, y und x', y' gegeben sind; man soll einen Ausdruck für die Entfernung $D = MM'$ dieser Punkte in Funktion ihrer Coordinaten aufstellen. Ziehen wir die Ordinaten $MP = y$, $M'P' = y'$ und durch einen der beiden Punkte, etwa M, die MR parallel zur x-Axe, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $MM'R$: $\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2$; es ist aber $MR = x' - x$, $M'R = y' - y$, somit:

Fig. 7.



$$D = \pm\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}. \tag{1}$$

Das doppelte Zeichen erklärt sich dadurch, dass die Entfernung D entweder von M gegen M' oder umgekehrt gezählt werden kann. Im Allgemeinen werden Distanzen immer positiv genommen.

Auf demselben Wege würde sich der Ausdruck von D für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem ergeben. Man findet ohne Schwierigkeit:

$$D = \pm \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Betrachten wir noch das Dreieck, welches die beiden Punkte M, M' mit dem Ursprunge bilden. Sind r, r' die Radienvektoren der Punkte M, M' und α, α' deren Neigungswinkel gegen die positive Halbaxe der x, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \sin\alpha = \frac{y}{r};\ \cos\alpha' = \frac{x'}{r'},\ \sin\alpha' = \frac{y'}{r'}.$$

Ist nun δ der Winkel MOM', welchen beide Radienvektoren einschliessen, so hat man $\pm\,\delta = \alpha - \alpha'$, somit:

$$\pm \sin\delta = \sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha',$$

oder nach Substitution obiger Werthe:

$$\pm\, rr'\sin\delta = yx' - y'x;$$

bezeichnet man aber mit f den Flächeninhalt des Dreieckes OMM', so ist bekanntlich, $2f = rr'\sin\delta$, folglich:

$$2f = \pm\,(yx' - y'x), \qquad (3)$$

wo von beiden Zeichen jenes zu wählen ist, welches den Ausdruck von f positiv macht.

Geht man von dem jetzigen Coordinatensysteme, ohne die Richtung der Axen zu ändern, auf ein neues System über, und sind $-x''$, $-y''$ die Coordinaten des neuen Ursprunges in Bezug auf die alten Axen, so hat man in (3) $x - x''$, $y - y''$; $x' - x''$, $y' - y''$ statt x, y; x', y' zu setzen, wodurch man:

$$2f = y(x' - x'') + y'(x'' - x) + y''(x - x') \qquad (4)$$

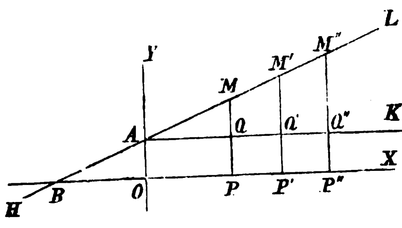
erhält, als Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreieckes, welches von den drei Punkten x, y; x', y' und x'', y'' gebildet wird.

ZWEITES KAPITEL.

VON DER GERADEN LINIE.

166. Es sei HL (Fig. 8) eine gerade Linie, in der Ebene der rechtwinkeligen Coordinatenaxen OX, OY auf beliebige Weise gezogen; ziehen wir durch den Punkt A, in welchem diese Gerade die Ordinatenaxe schneidet, die AK parallel zu OX, und zu beliebigen Punkten: M, M', M'', ... der Geraden HL die Ordinaten MP, $M'P'$, $M''P''$, ... so folgt aus den ähnlichen Dreiecken AMQ, $AM'Q'$, $AM''Q''$, ... welche offenbar nur dann entstehen, wenn M, M', M''... Punkte einer Geraden sind, sofort:

Fig. 8



$$\frac{MQ}{AQ} = \frac{M'Q'}{AQ'} = \frac{M''Q''}{AQ''} = \text{u. s. w.}$$

oder:

$$\frac{MP - AO}{OP} = \frac{M'P' - AO}{OP'} = \frac{M''P'' - AO}{OP''} = \text{u. s. w.},$$

woraus folgt, dass die um das Stück AO verminderte Ordinate eines beliebigen Punktes der Geraden zur Abscisse desselben in einem constanten Verhältnisse steht.

Bezeichnen wir daher dieses constante Verhältniss mit a, die Entfernung AO des Durchschnittspunktes der Geraden mit der y-Axe vom Ursprunge mit b, endlich mit x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so besteht für jeden Punkt der Geraden die Gleichung:

$$\frac{y - b}{x} = a, \text{ woraus:}$$

$$y = ax + b \tag{1}$$

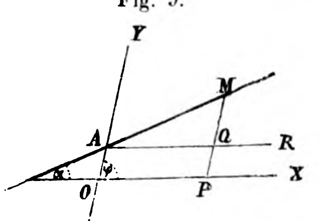
folgt. Aus der Ableitung dieser Gleichung erhellt, dass derselben durch die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden HL Genüge geleistet wird; umgekehrt geht aus der Construction dieser Gleichung die Gerade HL hervor. Man nennt aus diesem Grunde die Gleichung (1) die Gleichung der Geraden.

In derselben bedeuten die Grössen x, y die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden, sind also als veränderliche Grössen zu betrachten und werden gewöhnlich die laufenden Coordinaten der Geraden genannt. a, b sind hingegen constante Grössen, durch welche die Lage der Geraden gegen das Axensystem bestimmt wird. Wegen der nothwendigen Homogeneität der Gl. (1) muss b eine Linie, a hingegen eine absolute Zahl sein. In der That ist, wie schon oben bemerkt, b die Ordinate der Geraden im Ursprunge; ferner folgt aus dem $\triangle AMQ$:

$$a = \frac{MQ}{AQ} = \operatorname{tg} MAQ = \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn α der Neigungswinkel der Geraden HL gegen die positive Halbaxe der x ist; der Coefficient von x in der nach y aufgelösten Gleichung der Geraden ist folglich die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst.

Fig. 9.



Die Gl. (1) besteht, da die Ableitung offenbar ganz dieselbe bleibt, unverändert auch für schiefwinkelige Coordinaten; nur ist dann (Fig. 9):

$$a = \frac{MQ}{AQ} = \frac{\sin MAQ}{\sin AMQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}, \tag{2}$$

wo φ der Coordinatenwinkel; für den Winkel α, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst, findet man hieraus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \varphi}{1 + a \cos \varphi}. \tag{3}$$

In der Folge werden wir jedoch immer rechtwinkelige Coordinaten voraussetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

167. Da die Constanten a, b in Gl. (1) jeden möglichen positiven oder negativen Werth haben können, so wird die Gl. (1) dadurch fähig, eine Gerade in jeder beliebigen Lage gegen das Axensystem darzustellen. Ist b negativ, so schneidet die Gerade die y-Axe unterhalb des Ursprunges; sie geht durch den Ursprung, wenn $b = 0$, [illegible] die Gleichung von der Form: $y = ax$ ist, d. h. eines constanten [illegible] des ermangelt; ist a negativ, so macht der oberhalb der x-Axe [illegible]ende Theil derselben mit der Richtung der positiven Halbaxe der [illegible]nen stumpfen Winkel.

Für $a = \operatorname{tg} \alpha = 0$, wird auch $\alpha = 0$ und die Gerade zur Ab[illegible]senaxe parallel; die Gl. (1) geht über in $y = b$, welche demnach die

Gl. einer im Abstande $= b$ zur x-Axe parallelen Geraden ist. Wird $b = 0$, so fällt die Gerade mit dieser Axe zusammen; es ist daher $y = 0$ die Gl. der Abscissenaxe selbst.

Aus dem $\triangle AOB$ (Fig. 8) folgt $AO = BO.\text{tg}\,\alpha$, d. h. wenn $BO = -c$ gesetzt wird, $b = -ac$; führt man diesen Werth in die Gl. (1) ein, so nimmt dieselbe die Form an:

$$y = ax - ac, \text{ oder } x = \frac{y}{a} + c;$$

für $\alpha = 90^0$, wird $\text{tg}\,\alpha = a = \infty$ und die Gerade senkrecht auf die Abscissenaxe; die letzte Gleichung geht über in $x = c$, welche somit die Gleichung einer zur Ordinatenaxe im Abstande $= c$ parallelen Geraden ist. Für $c = 0$ fällt diese mit der genannten Axe zusammen; es ist daher $x = 0$ die Gl. der y-Axe.

168. Wählt man statt a und b andere Constanten zur Bestimmung der Lage der Geraden, so nimmt auch die Gleichung derselben andere Formen an.

So ist die Lage einer Geraden offenbar durch ihre Durchschnittspunkte A, B (Fig. 8) mit den beiden Axen bestimmt; bezeichnet man daher mit b und c die Entfernungen dieser Punkte vom Ursprunge, positiv, wenn dieselben auf den positiven Halbaxen der y und x liegen, so besteht für jeden Punkt der Geraden die Proportion:

$$AO : BO = MP : BP, \text{ d. i. } b : -c = y : x - c,$$

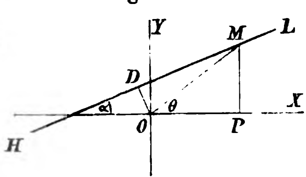
woraus als Gleichung der Geraden:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1 \tag{1}$$

folgt. Man sieht leicht ein, dass diese Form der Gleichung der Geraden für recht- und schiefwinkelige Coordinaten gilt und in beiden Fällen die Bedeutung der Constanten b, c, dieselbe bleibt.

Fällt man aus dem Ursprunge O (Fig. 10) das Perpendikel OD auf die Gerade HL, so ist die Lage dieser Geraden durch die Länge des Perpendikels $OD = p$ und den Winkel $DOX = \beta$ bestimmt, welchen dasselbe mit der positiven Richtung der x-Axe einschliesst. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Geraden HL, sind x, y seine Coordinaten, zieht man ferner $MO = r$ und setzt $\angle MOX = \theta$, so hat man: $MP = y = r \sin\theta$, $OP = x = r\cos\theta$; ist aber die Linie HDL eine Gerade, so ist für jeden Punkt M derselben das $\triangle ODM$ bei D rechtwinkelig, somit $OD = OM \cos DOM$, d. i.:

Fig. 10.



$$p = r\cos(\beta - \theta) = r\cos\beta\cos\theta + r\sin\beta\sin\theta; \qquad (2)$$

hieraus folgt, wenn statt $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ obige Werthe substituirt werden:

$$x\cos\beta + y\sin\beta = p \qquad (3)$$

als Gleichung der Geraden HL, welche auch die Form:

$$x\cos\lambda + y\cos\mu = p \qquad (4)$$

annimmt, wenn λ und μ die Winkel sind, welche p mit der x- und y-Axe bildet. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die Formen (3) und (4) der Gl. einer Geraden nur für rechtwinkelige Coordinaten gelten.

Wie man aber auch die Gleichung der Geraden umgestalten mag, ihr wesentlicher Charakter bleibt immer der, dass sie in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten x und y vom ersten Grade ist. Wir schliessen hieraus, dass jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, ihrer geometrischen Bedeutung nach, einer geraden Linie angehöre.

In der That ist die allgemeine Form einer solchen Gleichung:

$$Ay + Bx + C = 0, \qquad (5)$$

welche nach y aufgelöst, die Form:

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

d. h. die Form $y = ax + b$ annimmt, wenn man $-\frac{B}{A} = a$, $-\frac{C}{A} = b$ setzt, was immer möglich ist, weil die Constanten a, b in Gl. (1) jedes Werthes fähig sind.

Enthält die Gleichung bloss eine Veränderliche, ist also von der Form $f(x) = 0$ oder $f(y) = 0$, so ist ihr geometrischer Ort (vorausgesetzt, dass ihr durch reelle Werthe von x oder y genügt werden kann, widrigenfalls ihr gar keine geometrische Bedeutung zukäme) eine Gerade, oder ein System mehrerer, beziehungsweise zur Ordinaten- oder Abscissenaxe parallelen Geraden, je nachdem sie in Bezug auf die in ihr enthaltene Veränderliche vom 1sten oder höherem Grade ist.

Ist die Gleichung einer Geraden gegeben, so lässt sich dieselbe auf verschiedene Weise construiren, am einfachsten, indem man ihre Durchschnittspunkte mit den beiden Coordinatenaxen bestimmt, welche sich offenbar ergeben, wenn man in der vorgelegten Gleichung der Reihe nach x und y gleich Null setzt.

Die Gleichung (2), welche man auch in der Form:

$$r = p\sec(\beta - \theta) \qquad (6)$$

schreiben kann, ist die Polargleichung der Geraden; in derselben

bedeuten r und θ die laufenden Polarcoordinaten eines beliebigen Punktes M der Geraden, die Constanten p und β die Polarcoordinaten eines festen Punktes D, auf dessen Radiusvektor $OD = p$ im Endpunkte desselben die Gerade senkrecht steht.

169. Aus der Anwesenheit zweier Constanten in der Gleichung der Geraden erkennt man, dass zur Bestimmuug der Lage derselben zwei Bedingungen erfordert werden. Sind die Constanten gegeben, so ist dadurch auch die Lage der Linie bestimmt; sind umgekehrt zwei von einander unabhängige Bedingungen gegeben, welchen die Gerade genügen soll, so lassen sich die Werthe der Constanten diesen gemäss bestimmen.

Aufgabe. **Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt x', y' geht.**

Die gesuchte Gleichung kann von der Form $y = ax + b \ldots (\alpha)$ vorausgesetzt werden, in welcher a und b noch unbestimmte Grössen sind. Da die Gerade durch den Punkt x', y' gehen soll, so müssen die Coordinaten dieses Punktes der Gl. (α) Genüge leisten, wodurch sich die Bedingungsgleichung: $y' = ax' + b$ ergibt, mittelst welcher sich eine der beiden Unbekannten z. B. b bestimmen und aus (α) eliminiren lässt, am einfachsten, indem man die letzte Gleichung von (α) abzieht: man erhält dadurch:

$$y - y' = a(x - x') \tag{1}$$

für die gesuchte Gleichung. Setzt man in derselben $x = x'$ so folgt $y = y'$, zum Beweise, dass die durch dieselbe dargestellte Gerade durch den Punkt x', y' geht. Sie enthält noch eine willkürliche Constante $a = \operatorname{tg} \alpha$; der Winkel α, welchen sie mit der x-Axe einschliesst, bleibt also unbestimmt, wie es sein muss, weil durch einen Punkt unendlich viele gerade Linien gezogen werden können.

170. Aufg. **Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte x', y' und x'', y'' geht.**

Sei wieder $y = ax + b \ldots (\alpha)$ die Gleichung der Geraden, so bestehen den gegebenen Bedingungen gemäss die Gleichungen:

$$y' = ax' + b \ldots (\beta), \quad y'' = ax'' + b \ldots (\gamma),$$

aus welchen sich die zwei Unbekannten a und b bestimmen lassen.

Zieht man (β) von (α) und (γ) von (β) ab, so folgt:

$$y - y' = a(x - x'), \quad y' - y'' = a(x' - x''),$$

und wenn der aus der zweiten dieser Gleichungen gezogene Werth vo a in die erste substituirt wird:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \qquad (1)$$

welche die verlangte Gleichung ist.

Ist einer der zwei Punkte, z. B. x'', y'' der Ursprung, so folgt aus (1) wegen $x'' = y'' = 0$:

$$y = \frac{y'}{x'}\, x \qquad (2)$$

als Gleichung einer durch den Ursprung und den Punkt x', y' gehenden Geraden.

Soll der Punkt x''', y''' in der Geraden (1) liegen, so müssen diese Coordinaten der Gl. (1) Genüge leisten, d. h. es muss die Gleichung:

$$y''' - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x''' - x')$$

oder: (3)

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{y' - y'''}{x' - x'''}$$

erfüllt sein. Diese Gleichung drückt daher die Bedingung aus, dass die drei Punkte x', y'; x'', y''; x''', y''' in einer Geraden liegen.

Wie leicht einzusehen, sind die Formeln dieses und des vorhergehenden Paragraphen vom Coordinatenwinkel unabhängig und gelten für recht- und schiefwinkelige Coordinaten.

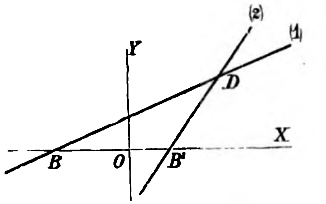
171. Aufg. Es sind die Gleichungen zweier Geraden gegeben; man bestimme den Winkel, unter welchem sich dieselben schneiden.

Es seien:

$$1) \ldots y = ax + b, \qquad 2) \ldots y = a'x + b'$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, bezogen auf rechtwinkelige Axen; den gesuchten Neigungswinkel derselben wollen wir mit (1.2) bezeichnen, so wie die Winkel, welche dieselben mit der Axe der x machen, beziehungsweise mit $(1.x)$, $(2.x)$.

Fig. 11



Wie aus Fig. 11 erhellt, ist $(1.2) = (2.x) - (1.x)$ oder auch $(1.2) = 180^0 - \{(2.x) - (1.x)\}$, je nachdem (1.2) den [spit]zen oder stumpfen Winkel bedeutet, somit:

$$\operatorname{tg}(1.2) = \pm \operatorname{tg}\{(2.x) - (1.x)\} = \pm \frac{\operatorname{tg}(2.x) - \operatorname{tg}(1.x)}{1 + \operatorname{tg}(1.x)\operatorname{tg}(2.x)};$$

[E]s ist aber $\operatorname{tg}(1.x) = a$, $\operatorname{tg}(2.x) = a'$, folglich:

$$\operatorname{tg}(1 . 2) = \pm \frac{a' - a}{1 + aa'}. \tag{1}$$

Gewöhnlich behält man nur das obere Zeichen bei, wo dann der Ausdruck den spitzen Winkel gibt, wenn man a' den grösseren der zwei Coefficienten a, a' sein lässt.

Die Ergebnisse dieser Aufgabe führen zu wichtigen Folgerungen:

a) Sind die Geraden 1) und 2) parallel, so ist der Winkel $(1 . 2) = 0$, folglich auch $\operatorname{tg}(1 . 2) = 0$, womit aus (1) $a' - a = 0$, d. h. $a = a'$ folgt. Die Gleichung $a = a'$ drückt somit die Bedingung des Parallelismus der Geraden 1) und 2) aus.

b) Stehen die Geraden 1) und 2) auf einander senkrecht, so ist $(1 . 2) = 90^0$, somit $\operatorname{cotg}(1 . 2) = \frac{1 + aa'}{a' - a} = 0$, woraus $1 + aa' = 0$ folgt. Durch die Gleichung $1 + aa' = 0$ oder $a' = -\frac{1}{a}$ wird daher die Bedingung der Perpendikularität der Geraden 1) und 2) ausgedrückt.

Beziehen sich die Gleichungen der Geraden 1) und 2) auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem, dessen Coordinatenwinkel $= \varphi$, so erhält man mit Hilfe der Gl. (3), §. 166:

$$\operatorname{tg}(1 . 2) = \frac{(a' - a) \sin \varphi}{1 + aa' + (a + a') \cos \varphi}.$$

Die Bedingung des Parallelismus der beiden Geraden bleibt somit $a = a'$; die Bedingung des Senkrechtstehens wird aber:

$$1 + aa' + (a + a') \cos \varphi = 0.$$

172. Aufg. Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt x', y' geht und zur Geraden

$$y = ax + b$$

parallel ist.

Es sei $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so bestehen die beiden Bedingungsgleichungen: $y' = Ax' + B$, und $A = a$; es ist somit $B = y' - ax'$, und die gesuchte Gleichung wird:

$$y - y' = a(x - x').$$

173. Aufg. Die Gleichung einer Geraden zu suchen, welche durch den Punkt x', y' geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht steht.

Da die Gerade durch den Punkt x', y' gehen soll, so hat ihre Gleichung die Form: $y - y' = A\ (x - x')$, und damit sie auf der

Geraden $y = ax + b$ senkrecht stehe, muss $aA = -1$ sein; es ist somit:

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

die verlangte Gleichung.

174. Aufg. Es sind die Gleichungen zweier Geraden:

$$1) \ldots y = ax + b, \qquad 2) \ldots y = a'x + b'$$

gegeben; man suche die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind offenbar jene Werthe von x und y, welche beiden Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig Genüge leisten, welche somit erhalten werden, wenn man diese Gleichungen als zusammengehörig oder coëxistirend betrachtet und daraus x und y bestimmt. Auf diese Weise erhält man für die gesuchten Grössen:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, \quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Ist $a = a'$, so werden diese Werthe unendlich, was damit übereinstimmt, dass bei dieser Voraussetzung die Geraden parallel sind. Ist aber $a = a'$ und $b = b'$, so wird $x = y = \frac{0}{0}$, d. i. unbestimmt; in der That fallen dann beide Gerade in eine einzige zusammen und haben daher alle Punkte gemeinschaftlich.

175. Aufg. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt M ausserhalb derselben gegeben; man sucht die Entfernung P des Punktes von der Geraden, d. i. die Länge des von dem Punkte M auf die Gerade gefällten Perpendikels.

Es seien:

$$1) \ldots y = ax + b$$

die Gleichung der gegebenen Geraden und x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes M, so ist:

$$2) \ldots y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

die Gleichung der durch den Punkt x', y' senkrecht auf 1) gezogenen Geraden. Sind x'', y'' die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geden 1) und 2), so ist [§. 165]:

$$P = \pm \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Da ferner die Coordinaten x'', y'' den Gleichungen 1) und 2) Gege leisten müssen, so hat man:

$$y'' = ax'' + b, \quad y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x'),$$

woraus man ohne Schwierigkeit:

$$x'' - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}$$

findet. Mit diesen Werthen wird endlich:

$$P = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

wo von beiden Zeichen jenes zu nehmen ist, welches P positiv macht, da es sich bei Entfernungen in der Regel nur um ihren absoluten Werth handelt. Der Zähler $y' - (ax' + b)$ ist übrigens positiv oder negativ, je nachdem y', d. i. die Ordinate des gegebenen Punktes grösser oder kleiner ist als $ax' + b$, d. i. die zur Abscisse x' des gegebenen Punktes gehörige Ordinate der gegebenen Geraden, d. i. je nachdem der Punkt M ober oder unter der Geraden liegt. Beachtet man, dass $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$ der Cosinus des Neigungswinkels der gegebenen Geraden gegen die x-Axe ist, so zieht man leicht aus obigem Ausdrucke von P folgende Regel:

Man findet die Entfernung eines gegebenen Punktes x', y' von einer gegebenen Geraden, wenn man die Gleichung der letzteren auf die Form $y - ax - b = 0$ bringt, und den Werth, welchen die linke Seite dieser Gleichung für $x = x'$ und $y = y'$ annimmt, mit dem Cosinus des Neigungswinkel der Geraden gegen die Abscissenaxe multiplicirt.

176. Aufg. Man sucht die Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden geht.

Seien:

$$(1) \ldots y = ax + b, \qquad (2) \ldots y = a'x + b'$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Statt [nach §. 174] die Coordinaten des Durchschnittspunktes zu suchen und hierauf [nach §. 169] durch diesen Punkt eine Gerade zu legen, kann man kürzer auf folgende Weise verfahren.

Schreibt man obige Gleichungen in der Form;

$$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0,$$

multiplicirt eine derselben, etwa die erste mit einer willkürlichen Constante m, und addirt sie sodann, so erhält man:

$$(y - ax - b) m + y - a'x - b' = 0. \tag{3}$$

und diese ist die gesuchte Gleichung, da sie — weil nach x und y vom ersten Grade — einer Geraden angehört, und offenbar für dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche den Gleichungen der beiden gegebenen Geraden (1) und (2) gleichzeitig Genüge leisten.*) Durch Auflösung nach y erhält sie die Form:

$$y = \frac{am + a'}{m + 1} x + \frac{bm + b'}{m + 1}. \tag{4}$$

Sie enthält noch eine unbestimmte Constante m, weil in der That unendlich viele Gerade der Bedingung der Aufgabe Genüge leisten; wir wollen daher noch die Bedingung hinzufügen, dass die Gerade (3) oder (4) den von den gegebenen Geraden (1) und (2) eingeschlossenen Winkel halbire.

Bezeichnen wir mit α, α' und u die Neigungswinkel der Geraden (1), (2) und (3) gegen die x-Axe, mit v den Winkel, welchen die Geraden (1) und (2) einschliessen; aus (4) folgt zunächst:

$$\operatorname{tg} u = \frac{am + a'}{m + 1}, \tag{λ}$$

woraus m gefunden wird, sobald u bekannt ist. Nun ist $\alpha' = \alpha + v$, und, damit die (3) den Winkel v halbire, $u = \frac{1}{2} v + \alpha$, somit $2u = \alpha + \alpha'$, woraus $\operatorname{tg} 2u = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha')$, d. i.:

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} u^2} = \frac{a + a'}{1 - aa'}$$

folgt. Diese Gleichung, gehörig geordnet, gibt nun:

$$\operatorname{tg} u^2 - \frac{2(aa' - 1)}{a + a'} \operatorname{tg} u - 1 = 0. \tag{μ}$$

Da hieraus für $\operatorname{tg} u$, folglich mittelst (λ) auch für m zwei Werthe erhalten werden, so gibt es zwei Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der (1) und (2) gehen und den von ihnen gebildeten Winkel halbiren, wie es auch sein muss, da solcher Winkel zwei, nämlich v und $180^0 - v$ existiren. Sind $\operatorname{tg} u_1$ und $\operatorname{tg} u_2$ die Wurzeln der Gl. (μ), so ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen:

---

*) Man sieht leicht, dass dieses Verfahren auch eine allgemeinere Andung zulässt. Sind $f(x,y) = 0 \ldots (\alpha)$ und $F(x,y) = 0 \ldots (\beta)$ die Gleichungen ier Curven, und man bildet eine neue Gleichung, $\varphi(x, y) = 0 \ldots (\gamma)$, die dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche den Gleichungen und (β) genügen, so schneiden sich die drei Curven (α), (β) und (γ) in m oder mehreren gemeinschaftlichen Punkten. Eine solche Gleichung wäre l. $\varphi(x, y) = f(x, y) + F(x, y) = 0$, oder allgemeiner: $\varphi(x, y) = mF(x, y)$ $f(x, y) = 0$, wo m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten.

$\operatorname{tg} u_1 \operatorname{tg} u_2 = -1$, oder $1 + \operatorname{tg} u_1 \operatorname{tg} u_2 = 0$, woraus folgt, dass diese zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen. Aus (μ) findet man:

$$\operatorname{tg} u = \frac{aa' - 1 \pm \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{a + a'},$$

welcher Werth in (λ) substituirt:

$$m = \frac{1 + a'^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{1 + a^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}, \text{ d. i.}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{1 + a'^2}{1 + a^2}} = \pm \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

liefert. Führt man endlich diesen Werth in (3) ein, so erhält man:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} \tag{5}$$

als Gleichung derjenigen Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden (1) und (2) geht und den von ihnen gebildeten Winkel halbirt. Mit Hilfe der am Schlusse des vorigen §. gegebenen Regel hätte sich übrigens diese Gleichung unmittelbar hinschreiben lassen, wenn man die Bemerkung macht, dass jeder Punkt dieser Geraden von den gegebenen Geraden (1) und (2) gleich weit entfernt ist.

177. Aufg. Es ist ein Winkel $XOL = \alpha$ gegeben (Fig. 12.); man suche einen Punkt M, dessen senkrechte Entfernungen von den Schenkeln des Winkels sich wie m zu n verhalten.

Fig. 12.

Nimmt man den einen Schenkel OX als Abscissenaxe, den Scheitel O als Ursprung, so wird die Gleichung des zweiten Schenkels OL:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = ax.$$

Bezeichnen wir nun mit ξ, η die Coordinaten des Punktes M, so ist $MP = \eta$, $MQ = \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}}$ [§. 175], und man hat der Bedingung der Aufgabe gemäss:

$$MP : MQ = m : n, \text{ d. i.:}$$

$$\eta : \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}} = m : n.$$

woraus:

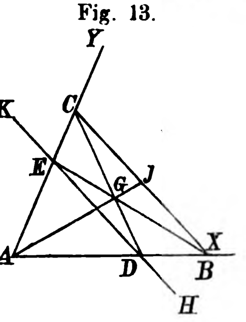
$$\eta = \frac{am}{m \pm n\sqrt{1 + a^2}} \xi$$

folgt. Da wir zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η des Punktes M r

diese eine Gleichung erhalten, deren geometrischer Ort (des doppelten Zeichens im Nenner wegen) zwei im Ursprunge sich schneidende Gerade sind, so folgt, dass sämmtliche Punkte dieser zwei Geraden der Aufgabe Genüge leisten.

178. Aufg. Es ist ein Dreieck ABC (Fig. 13.) gegeben; eine Gerade HK bewege sich so, dass sie beständig der Seite BC parallel bleibt; verbindet man nun die Durchschnittspunkte D, E der beweglichen Geraden mit den Seiten AB und AC mit den Gegenwinkeln C und B, so schneiden sich diese Verbindungslinien im Punkte G; man sucht den geometrischen Ort dieses Punktès, d. h. die Linie, in welcher sämmtliche Durchschnittspunkte G liegen, während die Gerade HK sich parallel zu BC bewegt.

Fig. 13.



Nehmen wir den Scheitel A als Ursprung, die Dreiecksseiten AB und AC als Axen der x und y, wobei also im Allgemeinen schiefwinkelige Coordinaten in Anwendung kommen; setzen wir ferner $AB = c$, $AC = b$, so ist die Gleichung der BC:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0. \qquad (p)$$

Bezeichnen wir AD mit ξ, so ist die Gl. der HK: $y = m(x - \xi)$; da aber diese Gerade zur BC parallel sein soll, so hat man $m = -\frac{b}{c}$, und somit $y = -\frac{b}{c}(x - \xi)$ als Gleichung der HK. Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so folgt $y = \frac{b\xi}{c} = AE$. Hiemit erhält man nun als

$$\text{Gleichung der } CD\text{:} \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{\xi} - 1 = 0, \qquad (q)$$

$$\text{- - } BE\text{:} \quad \frac{cy}{b\xi} + \frac{x}{c} - 1 = 0. \qquad (r)$$

Betrachtet man nun diese beiden Gleichungen als coexistirend, so geben sie dem Durchschnittspunkte G an, dessen Coordinaten sich durch successive Elimination von y und x ergeben würden und zwar ausgedrückt in Funktion von ξ, wie es sein muss, weil die Coordinaten eines bestimmten Durchschnittspunktes von dem besonderen Werthe

von ξ abhängen. Eliminirt man hingegen ξ, d. h. diejenige Grösse, durch welche ein bestimmter Durchschnittspunkt individualisirt wird, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, d. h. zwischen den Coordinaten sämmtlicher Durchschnittspunkte. welche demnach die gesuchte Gleichung des geometrischen Ortes dieser Durchschnittspunkte sein muss.

Durch Subtraktion der Gleichungen (q) und (r) erhält man nun:

$$\frac{y}{b}\left(1-\frac{c}{\xi}\right)+x\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{c}\right)=0,$$

oder:

$$\frac{y}{b}\left(1-\frac{c}{\xi}\right)-\frac{x}{c}\left(1-\frac{c}{\xi}\right)=0,$$

somit nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors:

$$y=\frac{b}{c}x \tag{s}$$

als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes, welcher daher eine durch den Ursprung gehende Gerade ist, welche die Gegenseite BC halbirt. Denn aus der Verbindung der Gl. (s) mit (p) erhält man $x=\frac{1}{2}c$, $y=\frac{1}{2}b$ als Coordinaten des Durchschnittspunktes J, woraus $BJ=CJ$ folgt.

Lässt man die bewegliche Gerade eine solche Lage einnehmen, dass $AD=DB$ ist, so wird auch $AE=EC$ und es ergibt sich sofort aus Obigem unmittelbar der aus der Geometrie bekannte Satz: Die drei Geraden, welche die Scheitelpunkte eines Dreieckes mit den Halbirungspunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Für diesen Fall werden ferner, wegen $AD=\frac{1}{2}c$, $AE=\frac{1}{2}b$, die

Gl. der CD: $\frac{y}{b}+\frac{2x}{c}=1$, Gl. der BE: $\frac{2y}{b}+\frac{x}{c}=1$,

durch deren Verbindung man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes G findet: $x=\frac{1}{3}c$, $y=\frac{1}{3}b$, woraus, da die Abscisse von J $=\frac{1}{2}c$ ist, $AG:AJ=2:3$, oder $AG:GJ=2:1$ folgt; d. h. der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Halbirungspunkten der Gegenseiten theilt diese Linien im Verhältnisse von $1:2$, wie ebenfalls aus den Elementen bekannt ist. Dieser Durchschnittspunkt ist der Schwerpunkt des Dreieckes.

DRITTES KAPITEL.

VOM KREISE.

179. Der Kreis ist bekanntlich jene krumme Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte (dem Mittelpunkte des Kreises) gleich weit entfernt sind.

Bezeichnen wir demnach mit α, β die rechtwinkeligen Coordinaten des Mittelpunktes, mit x, y jene eines beliebigen Punktes des Kreises, so wird die Entfernung dieser beiden Punkte ausgedrückt durch:

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2},$$

und da diese gemäss der oben erwähnten Eigenschaft eine constante Grösse ist, so besteht, wenn wir diese constante Entfernung (den Halbmesser des Kreises) mit r bezeichnen, die Gleichung:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2, \qquad (1)$$

welche somit für alle Punkte der Kreisperipherie und nur für diese gilt, und daher die Gleichung des Kreises ist.

Die Gl. (1) ist die Gleichung des Kreises in ihrer allgemeinsten Form; sie wird mehr oder weniger einfach, wenn man dem Axensysteme eine bestimmte Lage gegen den Kreis gibt.

1) Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so erhält man aus (1) wegen $\alpha=\beta=0$:

$$y^2+x^2=r^2, \qquad (2)$$

die sogenannte Mittelpunktsgleichung des Kreises.

2) Fällt der Ursprung in den Endpunkt eines Durchmessers und dieser in die positive Halbaxe der x, so ist $\alpha=r$, $\beta=0$, und die Gl. des Kreises wird bei dieser Lage:

$$y^2+x^2-2rx=0. \qquad (3)$$

3) Liegt der Ursprung in der Peripherie des Kreises, so ist die En[illegible]rnung des Mittelpunktes vom Ursprung dem Halbmesser gleich, somit $\alpha^2+\beta^2=r^2$, wodurch die Gl. (1) sich verwandelt in:

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x=0. \qquad (4)$$

Aus (1) folgt ferner durch Entwickelung der Quadrate:

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-r^2=0, \qquad (5)$$

aus [illegible]lcher Gleichung, als der Kreisgleichung in ihrer allgemeinsten

Form, sich die charakteristischen Eigenschaften derselben ergeben. Sie ist nämlich eine Gleichung des **zweiten Grades** zwischen den Veränderlichen x und y, in welcher die Quadrate von x und y den Coefficienten $= 1$, oder überhaupt **gleiche** Coefficienten haben und das Glied mit dem Producte xy fehlt.

Hieraus schliesst man, dass der geometrische Ort jeder Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen von der Form:

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0 \tag{6}$$

ein Kreis ist. In der That werden die Gleichungen (5) und (6) identisch, wenn man

$$D = -2\beta, \quad E = -2\alpha, \quad F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

setzt, woraus:

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}E, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}D, \quad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

folgt, wodurch die Lage des Mittelpunktes und der Halbmesser des durch die Gleichung (6) repräsentirten Kreises, dieser selbst also vollkommen bestimmt ist.

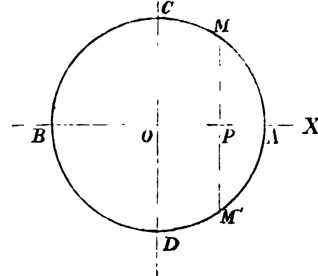
Aus obigem Ausdrucke des Halbmessers erhellt übrigens, dass in dem besonderen Falle, wenn $D^2 + E^2 = 4F$ ist, die Gleichung (6) einen Punkt (Kreis vom Halbmesser $= 0$) bedeutet, dessen Coordinaten $x = -\frac{1}{2}E$, $y = -\frac{1}{2}D$ sind. In der That bringt man in diesem Falle die Gl. (6) leicht auf die Form:

$$(y + \tfrac{1}{2}D)^2 + (x + \tfrac{1}{2}E)^2 = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen: $y + \frac{1}{2}D = 0$ und $x + \frac{1}{2}E = 0$ zerfällt, und somit einen Punkt zum geometrischen Orte hat, dessen Coordinaten $x = -\frac{1}{2}E$, $y = -\frac{1}{2}D$ sind.

Die Gl. (6) hat endlich **keine** geometrische Bedeutung, wenn $D^2 + E^2 < 4F$, weil in diesem Falle der Ausdruck des Halbmessers imaginär wird. Man findet auch leicht, dass in diesem Falle aus (6) für jeden Werth von x ein imaginärer Werth von y folgt.

Fig. 14.



180. Aus der Mittelpunktsgleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

folgt:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad \ldots (\alpha)$$
$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}, \quad \ldots (\beta)$$

somit für $x = 0$: $y = \pm r$ und für $y = 0$ $x = \pm r$, d. h. der Kreis schneidet jede der beiden Axen in zwei Punkten: A, B und C, D (Fig. 14), welche zu beiden Seiten des

Ursprunges in gleichen Entfernungen von demselben liegen. Die Gl. (α) zeigt, dass zu jedem Werthe von $x < r$ zwei numerisch gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe von y gehören, woraus folgt, dass die Abscissenaxe den Kreis in zwei congruente Theile theilt; dasselbe gilt von der Ordinatenaxe, wie aus Gl. (β) erhellt, und überhaupt von jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, da die Gl. (1) ihre Form nicht ändert, man mag was immer für eine solche Gerade als Abscissenaxe wählen. Hieraus folgt zugleich, dass der Kreis eine geschlossene Curve ist, von deren Gestalt man somit durch die Discussion ihrer Gleichung eine deutliche Vorstellung gewinnt. Wir übergehen die Ableitung der bekannten wesentlichsten Eigenschaften des Kreises aus der Gleichung desselben, und nur beispielsweise möge die folgende Aufgabe eine Stelle finden.

181. Aufg. Zwei Punkte A und B sind gegeben; man sucht einen Punkt von der Eigenschaft, dass die zwei Geraden, welche denselben mit A und B verbinden, einen gegebenen Winkel γ einschliessen.

Fig. 15.

Legen wir (Fig. 15) die Abscissenaxe durch die gegebenen Punkte A und B, den Ursprung in den Halbirungspunkt O der $AB = 2a$, so sind, wenn wir die Coordinaten des gesuchten Punktes M mit ξ, η bezeichnen:

$$y = -\frac{\eta}{a-\xi}(x-a), \quad y = \frac{\eta}{a+\xi}(x+a)$$

die Gleichungen der Geraden AM und BM, und somit der Bedingung der Aufgabe gemäss [§. 171]:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-\frac{\eta}{a-\xi} - \frac{\eta}{a+\xi}}{1 - \frac{\eta}{a+\xi}\cdot\frac{\eta}{a-\xi}}.$$

Da wir zur Bestimmung der beiden unbekannten Coordinaten ξ, η nur diese eine Gleichung erhalten, so ist die Aufgabe unbestimmt und jeder Punkt ist eine Auflösung derselben, dessen Coordinaten obiger Gleichung Genüge leisten. Durch Wegschaffung der Brüche erhält sie die Form:

$$\eta^2 + \xi^2 - 2a\cot\gamma\,.\,\eta - a^2 = 0, \qquad (m)$$

in welcher man die Gl. eines Kreises erkennt, dessen Mittelpunktscoordinaten:

$$\alpha = 0, \quad \beta = a \cot \gamma, \quad \text{Halbmesser} = a \operatorname{cosec} \gamma$$

sind, und welcher durch die beiden Punkte A und B geht, weil aus (m) für $\eta = 0$, $\xi = \pm a$ folgt.

Dieser Kreis lässt sich leicht construiren. Man mache $\angle OAD = \gamma$ und errichte in A eine Senkrechte auf AD, welche das im Halbirungspunkte O der AB errichtete Loth OY in dem gesuchten Mittelpunkte C schneidet, wodurch auch der Halbmesser $CA = CB$ bekannt wird. Denn vermöge dieser Construction wird $OC = OA \operatorname{cotg} OCA = a \operatorname{cotg} \gamma = \beta$, und $AC = OA : \sin \gamma = a \operatorname{cosec} \gamma = r$.

Aus dem Ausdrucke für β folgt übrigens, dass der Mittelpunkt oberhalb, unterhalb oder in die Abscissenaxe fällt, je nachdem:

$$\gamma < 90^0, > 90^0 \text{ oder } = 90^0$$

ist, in welch' letzterem Falle AB zum Durchmesser wird. Daraus geht weiter hervor, dass von den beiden Winkeln AMB und $AM'B$, welche über der Sehne AB in beiden Kreisabschnitten construirt werden, der eine spitz, der andere stumpf ist; da ferner Gl. (m) sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig $-\eta$ und $180^0 - \gamma$ statt η und γ schreibt, so muss $\angle AMB + \angle AM'B = 180^0$ sein.

Alles dieses zusammengefasst, führt zu folgenden Sätzen:

1) Alle Pheripheriewinkel, welche über derselben Sehne in demselben Kreisabschnitte beschrieben werden, sind einander gleich.

2) Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

3) In jedem Kreisvierecke ist die Summe je zweier Gegenwinkel $= 180^0$.

182. Da die allgemeine Gleichung des Kreises (1) oder (6) [§. 179] drei Constanten enthält, so sind zur vollständigen Bestimmung der Lage und Grösse eines Kreises drei Bedingungen erforderlich und hinreichend. Unter den mannigfaltigen Aufgaben, welche sich hier darbieten, wollen wir zunächst folgende vornehmen.

Die Gleichung des Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte geht.

Seien x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten der gegebenen Pun[illegible]; die Gleichung des gesuchten Kreises hat die Form:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

wo nun die noch unbekannten Constanten α, β, r so zu bestimmen [illegible], dass dieser Kreis durch die gegebenen Punkte gehe.

Da diese Punkte in der Peripherie des Kreises (1) liegen sollen, so müssen die Coordinaten derselben der Gl. (1) Genüge leisten; es bestehen daher folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}(y_1-\beta)^2+(x_1-\alpha)^2&=r^2,\\(y_2-\beta)^2+(x_2-\alpha)^2&=r^2,\\(y_3-\beta)^2+(x_3-\alpha)^2&=r^2,\end{aligned}\tag{2}$$

welche zur Bestimmung der Unbekannten α, β, r hinreichen. Entwickelt man die Quadrate und zieht nach einander die 2[te] und 3[te] Gleichung von der 1[sten] ab, so erhält man:

$$2(y_1-y_2)\beta+2(x_1-x_2)\alpha-(y_1^2-y_2^2)-(x_1^2-x_2^2)=0,\tag{3}$$
$$2(y_1-y_3)\beta+2(x_1-x_3)\alpha-(y_1^2-y_3^2)-(x_1^2-x_3^2)=0,\tag{4}$$

aus welchen Gleichungen sich nun die Mittelpunktscoordinaten α, β ohne Schwierigkeit finden lassen, da dieselben nach α und β vom ersten Grade sind. Durch Substitution der gefundenen Werthe in eine der Glgn. (2) ergibt sich sodann auch r. Da jedoch die Ausdrücke ziemlich weitläufig werden und kein weiteres Interesse darbieten, so wollen wir aus den bisher erhaltenen Resultaten eine Construction der Aufgabe ableiten.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind jene Werthe von α und β, welche den Glgn. (3) und (4) gleichzeitig Genüge leisten. Betrachten wir nun für einen Augenblick α und β als veränderliche (laufende) Coordinaten, so ist, da die Glgn. (3) und (4) nach α und β vom ersten Grade sind, der geometrische Ort einer jeden derselben eine gerade Linie, deren Durchschnittspunkt offenbar der gesuchte Mittelpunkt sein muss, weil derselbe der einzige Punkt ist, dessen Coordinaten gleichzeitig beide Gleichungen (3) und (4) erfüllen. Es kommt daher nur auf die Construction dieser beiden Geraden an. Durch Division mit $2(y_1-y_2)$ bringt man die Gl. (3) leicht auf folgende Form:

$$\beta-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\left(\alpha-\frac{x_1+x_2}{2}\right),\tag{3'}$$

woraus man erkennt, dass diese Gerade durch den Punkt geht, dessen Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ sind, d. h. durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1, und x_2, y_2. Da ferner die Gleichung dieser Verbindungslinie:

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

ist, so folgt, dass die Gerade (3') oder (3) auf dieser Verbindungslinie in ihrem Halbirungspunkte senkrecht steht. — Eben so findet man,

dass der geometrische Ort der Gl. (4) die Gerade ist, welche im Halbirungspunkte der die Punkte x_1, y_1 und x_3, y_3 verbindenden Geraden senkrecht auf diese errichtet wird. Der Durchschnittspunkt dieser zwei Senkrechten, welche hiernach sehr leicht zu construiren sind, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Wie man sieht, führt die analytische Auflösung der Aufgabe auf jene Construction, welche schon in den Elementen gelehrt wird. Einfacher werden übrigens obige Formeln, wenn man den Ursprung in einen der gegebenen Punkte, etwa x_1, y_1, und die x-Axe noch durch einen der beiden anderen Punkte, etwa x_2, y_2 legt, weil dann:

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0$$

werden.

Aus dieser Aufgabe ersieht man den grossen Vortheil, welchen man aus der Benützung der geometrischen Oerter bei der Auflösung bestimmter Aufgaben ziehen kann. Handelt es sich nämlich allgemein um die Bestimmung eines Punktes aus gegebenen Bedingungen, so führen diese, wenn die Aufgabe eine bestimmte ist, immer auf zwei Gleichungen, $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$ zwischen den Coordinaten x, y des gesuchten Punktes, welche sich durch Elimination aus diesen Gleichungen ergeben. Diese Elimination ist aber nicht selten sehr weitläufig und führt dann auf complicirte, schwer zu behandelnde Ausdrücke. Beachtet man aber, dass die Coordinaten des gesuchten Punktes den beiden Gleichungen gleichzeitig Genüge leisten müssen, so sieht man sogleich, dass dieser Punkt der Durchschnittspunkt der durch diese Gleichungen dargestellten Linien sein muss, wenn man darin x, y als veränderliche Coordinaten ansieht, durch deren Construction sich daher der gesuchte Punkt ergibt.

Ist die Aufgabe unbestimmt, so erhält man zwischen den Coordinaten des gesuchten Punktes nur eine Gleichung, deren geometrischer Ort irgend eine gerade oder krumme Linie sein wird, deren sämmtliche Punkte der Aufgabe Genüge leisten. Hieher gehörige Beispiele bieten die §§. 177, 178, 181.

VERBINDUNG DES KREISES MIT DER GERADEN.

183. Es seien die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (1) \qquad y = ax + b \quad (2)$$

gegeben und die Coordinaten der Durchschnittspunkte zu suchen. Es ergeben sich dieselben, wenn wir die beiden Gleichungen als coëxistirend betrachten und daraus x und y durch Elimination bestimmen. Man findet auf diese Weise:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + a\beta - ab \pm \sqrt{(1 + a^2)\,r^2 - (a\alpha + b - \beta)^2}}{1 + a^2}, \\ y &= \frac{a\alpha + a^2\beta + b \pm a\sqrt{(1 + a^2)\,r^2 - (a\alpha + b - \beta)^2}}{1 + a^2}. \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Hier können nun drei Fälle eintreten:

1) Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist negativ; dann werden x und y imaginär und die Gerade schneidet den Kreis nicht. Dies findet statt, wenn $(a\alpha + b - \beta)^2 > (1 + a^2)\,r^2$, oder:

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} > r,$$

d. h. wenn der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte grösser ist als der Halbmesser [§. 175].

2) Der besagte Ausdruck ist positiv; in diesem Falle schneidet die Gerade den Kreis und zwar, des doppelten Vorzeichens wegen, in **zwei** Punkten; die Gerade heisst in diesem Falle eine **Sekante** des Kreises.

3) Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist $= 0$; die Gerade hat in diesem Falle nur **einen** Punkt mit dem Kreise gemein, dessen Coordinaten:

$$\xi = \frac{\alpha + a\beta - ab}{1 + a^2}, \quad \eta = \frac{a\alpha + a^2\beta + b}{1 + a^2} \qquad (3)$$

sind und heisst nun eine **Tangente** am Kreise im Punkte ξ, η.

Die Bedingung, dass die Gerade (2) Tangente des Kreises (1) werde, wird somit durch die Gleichung:

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = r \qquad (4)$$

ausgedrückt; d. h. das aus dem Mittelpunkte auf die Gerade gefällte Perpendikel muss dem Halbmesser gleich sein, woraus folgt, **dass die Tangente auf dem zu dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht.**

Bestimmt man aus (3) a und b, so erhält man:

$$a = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta}, \quad b = \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\eta - \beta},$$

r jene Werthe, welche die Constanten a, b haben müssen, damit se Gerade den Kreis im Punkte ξ, η berühre. Substituirt man daher se Ausdrücke in (2), so erhält man:

$$y = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta}\,x + \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\eta - \beta}, \text{ oder:}$$

$$y - \eta = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta}(x - \xi) \tag{5}$$

als **Gleichung der Tangente** am Kreise im Punkte ξ, η, wozu eigentlich noch die Gleichung:

$$(\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = r^2$$

gehört, welche ausdrückt, dass der Punkt ξ, η dem Kreise angehört. Schreibt man (5) in der Form:

$$(y - \eta)(\eta - \beta) + (x - \xi)(\xi - \alpha) = 0,$$

und addirt hiezu die letzte Gleichung, so erhält man die Gleichung der Tangente in folgender Form:

$$(y - \beta)(\eta - \beta) + (x - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2,$$

welche sich von der Gl. (1) des Kreises nur dadurch unterscheidet, dass die Rechtecke $(y - \beta)(\eta - \beta)$ und $(x - \alpha)(\xi - \alpha)$ an die Stelle der Quadrate $(y - \beta)^2$ und $(x - \alpha)^2$ getreten sind.

Ist der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Ursprung der Coordinaten, so werden die Gleichungen der Tangente am Punkte ξ, η, wie man aus (5) und (6) für $\alpha = \beta = 0$ leicht findet:

$$y - \eta = -\frac{\xi}{\eta}(x - \xi), \tag{7}$$

oder:

$$y\eta + x\xi = r^2. \tag{8}$$

184. Betrachten wir noch eine Sekante, welche durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene des Kreises gezogen ist. Legen wir den Ursprung der Coordinaten in den **Mittelpunkt** O des Kreises und die x-Axe durch den Punkt A; die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte sei $= d$, der Halbmesser $= r$, so sind die Gleichungen des Kreises und der Sekante:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y = a(x - d).$$

Für die Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte B_1 und B_2 erhalten wir aus den Glgn. (k) im vorigen §., $\alpha = \beta = 0$ und $b = -ad$ setzend:

$$x_1 = \frac{a^2 d + N}{1 + a^2}, \quad y_1 = \frac{-ad + aN}{1 + a^2},$$

$$x_2 = \frac{a^2 d - N}{1 + a^2}, \quad y_2 = \frac{-ad - aN}{1 + a^2},$$

wo Kürze halber $N = \sqrt{(1 + a^2) r^2 - a^2 d^2}$ gesetzt ist. Bezeichnet man ferner die Entfernungen AB_1 und AB_2 des Punktes A von den zwei Durchschnittspunkten mit e_1 und e_2, so ist:

$$e_1^2 = (d - x_1)^2 + y_1^2, \qquad e_2^2 = (d - x_2)^2 + y_2^2.$$

Führt man in diese Gleichungen obige Werthe der Coordinaten ein, so erhält man:

$$e_1 = \pm \frac{d - N}{\sqrt{1 + a^2}}, \qquad e_2 = \frac{d + N}{\sqrt{1 + a^2}},$$

somit $e_1 e_2 = \pm \frac{d^2 - N^2}{1 + a^2}$, d. i. wenn man den Werth von N wiederherstellt:

$$e_1 e_2 = \pm (d^2 - r^2),$$

wo von den doppelten Zeichen jenes zu nehmen ist, welches e_1 und $e_1 e_2$ positiv macht, also das obere oder untere, je nachdem der Punkt A ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Da vermöge der letzten Gleichung das Produkt $e_1 e_2$ von a, d. i. von der Richtung der Sekante (oder Sehne, wenn A innerhalb des Kreises) unabhängig ist, so ergibt sich daraus folgender Satz:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt A, dessen Entfernung vom Mittelpunkte eines gegebenen Kreises $= d$ ist, Sekanten oder Sehnen, so ist das Produkt aus den Abständen der zwei Durchschnittspunkte jeder Sekante oder Sehne mit dem Kreise vom Punkte A eine constante Grösse und $=$ der Differenz der Quadrate der Entfernung d und des Halbmessers.

Das Produkt $e_1 e_2 = \pm (d^2 - r^2)$ wird die Potenz des Punktes A in Beziehung auf den Kreis genannt.

Da ferner dieser Satz gelten muss, wie nahe auch die beiden Durchschnittspunkte der Sekante einander kommen, so muss er auch für die aus dem Punkte A an den Kreis gezogene Tangente richtig bleiben, für welche $e_1 = e_2 = t$ wird, wenn wir mit t das Stück der Tangente zwischen dem Punkte A und dem Berührungspunkte bezeichnen. Es besteht daher die Gleichung $t^2 = d^2 - r^2$, woraus wieder folgt, dass die Tangente auf dem Halbmesser des Berührungspunktes senkrecht steht. Da ferner für eine beliebige aus A gezogene Sekante $e_1 e_2 = d^2 - r^2$ ist, so hat man $t^2 = e_1 e_2$, welche Gleichung den Satz ausspricht, dass die aus dem Punkte A an den Kreis gezogene Tangente t die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen den beiden Segmenten einer beliebigen durch A gezogenen Sekante.

185. Wir haben in §. 183 die Gl. der Tangente am Kreise in der Voraussetzung entwickelt, dass der Berührungspunkt ξ, η gegeben sei;

nehmen wir jetzt an, es sei ein ausserhalb des Kreises:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \tag{1}$$

liegender Punkt x', y' gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Tangente an den Kreis ziehen.

Bezeichnen wir wieder mit ξ, η die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gl. der Tangente am Kreise im Punkte ξ, η [§. 183, Gl. 6]:

$$(y-\beta)(\eta-\beta)+(x-\alpha)(\xi-\alpha)=r^2.$$

Da diese Tangente durch den Punkt x', y' gehen soll, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$(y'-\beta)(\eta-\beta)+(x'-\alpha)(\xi-\alpha)=r^2, \tag{m}$$

welche in Verbindung mit der Gleichung:

$$(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2=r^2, \tag{n}$$

die gesuchten Werthe von ξ und η liefern wird.

Man erhält aus diesen Gleichungen durch successive Elimination, wenn man dabei $\xi-\alpha$, $\eta-\beta$ als unbekannte Grössen behandelt und Kürze halber die bekannten Grössen:

$$x'-\alpha=p,\quad y'-\beta=q,\quad (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=d^2$$

setzt, wo also d die Entfernung des Punktes x', y' vom Kreismittelpunkte bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}\xi-\alpha&=\frac{r^2p\pm rq\sqrt{d^2-r^2}}{d^2},\\ \eta-\beta&=\frac{r^2q\mp rp\sqrt{d^2-r^2}}{d^2}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Man sieht hieraus, dass von dem Punkte x', y' zwei, oder eine oder endlich gar keine Tangente an den Kreis gezogen werden kann, je nachdem $d >, =$ oder $< r$ ist, d. h. je nachdem der Punkt x', y' ausserhalb, in oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt.

Endlich erhält man für den Neigungswinkel τ der Tangente gegen die Abscissenaxe:

$$\operatorname{tg}\tau=-\frac{\xi-\alpha}{\eta-\beta}=-\frac{pq\pm r\sqrt{d^2-r^2}}{r^2-p^2}. \tag{3}$$

186. Es erübrigt noch, aus vorstehender Analyse ein Verfahren zur geometrischen Construction der Berührungspunkte abzuleiten. Die Ausdrücke (2), welche sich zu diesem Zwecke unmittelbar darbieten, sind etwas verwickelt, daher wir von den geometrischen Oertern Gebrauch machen wollen. Die Coordinaten der Berührungspunkte sind

nämlich jene Werthe von ξ, η, welche den Gleichungen (m) und (n) gleichzeitig Genüge leisten, daher diese Punkte die Durchschnitte der diesen Gleichungen entsprechenden geometrischen Oerter sein werden, wenn wir darin ξ, η als laufende Coordinaten betrachten.

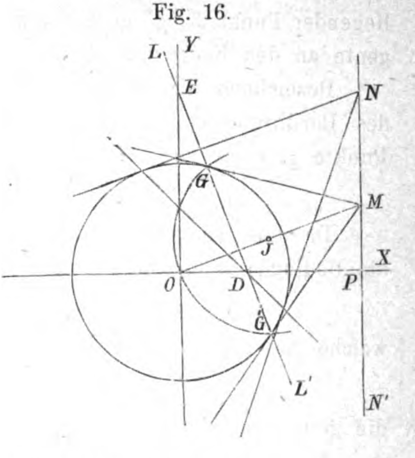


Fig. 16.

Da aber die Construction nur von der Natur der Aufgabe, nicht aber von der Lage des bei der Analyse gebrauchten Coordinatensystemes abhängen kann, so wollen wir jetzt den Ursprung in den Mittelpunkt O des Kreises legen (Fig. 16), wodurch $\alpha = \beta = 0$ wird und die zu construirenden Gleichungen (m) und (n) folgende Form erhalten:

$$y'\eta + x'\xi = r^2 \ldots (m'), \quad \eta^2 + \xi^2 = r^2 \ldots (n').$$

Der Ort der Gl. (n') ist der gegebene Kreis selbst; der Ort von (m') ist eine Gerade, welche am einfachsten mit Hilfe ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen construirt wird. Aus (m') folgt nämlich:

$$\text{für } \eta = 0 : \xi = OD = \frac{r^2}{x'}, \text{ und für } \xi = 0 : \eta = OE = \frac{r^2}{y'};$$

construirt man daher zu x' und r, sodann zu y' und r die dritten Proportionalen OD und OE, so ergeben sich die Punkte D und E; die durch diese Punkte gezogene Gerade LL' ist der Ort der Gl. (m') und die Durchschnittspunkte G, G' derselben mit dem Kreise sind die gesuchten Berührungspunkte.

Die Gerade LL', welche durch die beiden Berührungspunkte der aus M an den Kreis gezogenen Tangente geht, und deren Gleichung (m') ist, heisst B e r ü h r u n g s s e h n e.

Aus dem für OD gefundenen Ausdrucke ersieht man, dass die Lage des Punktes D von der Ordinate y' des Punktes M unabhängig ist; daraus folgt, dass, wenn man von beliebigen Punkten der durch M senkrecht auf OX gezogenen Geraden NN' die Tangenten an den Kreis zieht, sämmtliche Berührungssehnen sich in einem und demselben Punkte D schneiden werden.

Da nun die Richtung der Abscissenaxe in Bezug auf den Kreis völlig willkürlich ist und folglich diese Axe auf jede durch den Punkt M gehende Gerade senkrecht gezogen werden kann, so ergibt sich hieraus das folgende Theorem:

Zieht man von beliebigen Punkten einer Geraden NN' Tangenten an den Kreis und verbindet die Berührungspunkte der zusammengehörigen Tangenten durch Sehnen, so schneiden sich alle diese Berührungssehnen in einem und demselben Punkte D, welcher in dem vom Mittelpunkte auf die Gerade NN' gefällten Perpendikel liegt.

Der Punkt D heisst der Pol in Bezug auf die Gerade NN', welche wieder ihrerseits die Polare in Bezug auf den Punkt D genannt wird.

Aus dem Ausdrucke für OD folgt, dass, wenn $x' = OP > r$ ist, $OD < r$ wird, und umgekehrt; d. h. wenn die Polare ausserhalb des Kreises liegt, liegt der Pol in demselben; schneidet aber die Polare den Kreis, so liegt der Pol ausserhalb des Kreises.

Kehrt man das obige Theorem um, so erhält man folgendes:

Zieht man durch einen in oder ausser dem Kreise liegenden Punkt Sehnen oder Sekanten und zu den Durchschnittspunkten derselben mit dem Kreise Tangenten, so liegen sämmtliche Durchschnittspunkte je zweier zusammengehöriger Tangenten in einer Geraden, welche auf der den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte verbindenden Geraden senkrecht steht.

Eine andere Construktion der Durchschnittspunkte ist folgende. Zieht man die beiden Gleichungen (m') und (n') von einander ab, so erhält man:

$$\eta^2 + \xi^2 - y'\eta - x'\xi = 0, \qquad (r)$$

welche Gleichung wir statt (m') benutzen können. Der Ort der Gl. (n') ist wieder der gegebene Kreis; jener von (r) ist aber ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunktscoordinaten $\frac{1}{2}x'$ und $\frac{1}{2}y'$ sind, dessen Halbmesser

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{x'^2 + y'^2} = \tfrac{1}{2}OM \text{ ist.}$$

Beschreibt man daher aus dem Halbirungspunkte J der OM mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}OM$ einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis in den gesuchten Berührungspunkten G, G'. Diese Construktion wird bekanntlich in den Elementen gelehrt.

187. Die in §. 183 und 185 erhaltenen Resultate setzen uns in den Stand, Aufgaben über die Berührungen von Kreisen und Geraden aufzulösen. Hieher gehören vorzüglich folgende drei: Es ist die Gleichung eines Kreises zu suchen, welcher:

1) Eine gegebene Gerade berührt und durch zwei gegebene Punkte geht; 2) zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht; 3) drei gegebene Gerade berührt.

Die Herstellung der entwickelten Endformeln ist bei dergleichen Aufgaben immer ziemlich weitläufig; von wesentlichem Einflusse ist hiebei eine zweckmässige Anordnung des Coordinatensystems in Bezug auf die gegebenen Stücke. Gewöhnlich führt man aber die Auflösung nur so weit fort, bis aus den gewonnenen Gleichungen eine einfache und elegante Construktion sich ergibt, und die erhaltenen Resultate Anhaltspunkte für die Erforschung weiterer Eigenthümlichkeiten des in der Aufgabe vorkommenden Systems von Linien und Punkten darbieten.

So führen z. B. bei der dritten der obigen Aufgabe schon die ersten Schritte in der Analyse zur Construktion, was hier noch mit einigen Worten angedeutet werden mag. Es seien:

$y = ax + b \ldots (1)$, $y = a'x + b' \ldots (2)$, $y = a''x + b'' \ldots (3)$

die Gleichungen der gegebenen Geraden,

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

die Gleichung des gesuchten Kreises. Damit derselbe jede der drei Geraden berühre, müssen [§. 183, Gl. (4)] folgende Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$(\beta - a\alpha - b)^2 = r^2 (1 + a^2),$$
$$(\beta - a'\alpha - b')^2 = r^2 (1 + a'^2),$$
$$(\beta - a''\alpha - b'')^2 = r^2 (1 + a''^2),$$

aus welchen die drei Unbekannten gefunden werden können. Eliminirt man zunächst r^2, indem man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und dritte dividirt, so erhält man, wenn man sogleich die Wurzel auszieht:

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a'\alpha - b'}{\sqrt{1 + a'^2}}, \quad (4)$$

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a''\alpha - b''}{\sqrt{1 + a''^2}}, \quad (5)$$

wo die Wurzelgrössen $\sqrt{1 + a^2}$ u. s. w. positiv zu nehmen sind. Des doppelten Zeichens wegen zerfallen diese zwei Doppelgleichungen in vier Paare von Gleichungen; jedes dieser vier Paare ist nach α und β vom ersten Grade, liefert also ein System von Werthen für α und β, so dass also die Aufgabe vier Auflösungen zulässt und somit vier Kreise gezogen werden können, welche drei gegebene Gerade berühren. In der That, wollte man fortfahren, aus (4) und (5) noch eine Unbekannte, etwa β, zu eliminiren, so würde man für α eine Gleichung vom [4]ten Grade erhalten. Vergleicht man aber diese Gleichungen mit Gl. (5) §. 176, so erkennt man sogleich, dass dieselben die vier Geraden

zum geometrischen Orte haben, welche die von den gegebenen Geraden (1), (2) und (1), (3) gebildeten Winkel halbiren. Die Durchschnittspunkte dieser vier Geraden, welche sich leicht construiren lassen, sind daher die Mittelpunkte der vier Kreise.

VERBINDUNG MEHRERER KREISE.

188. Betrachten wir zwei Kreise; ist e die Entfernung ihrer Mittelpunkte C, C', und legen wir den Ursprung in den Mittelpunkt C des einen Kreises, die positive Halbaxe der x in die Centrilinie CC', so sind ihre Gleichungen:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots (1), \quad y^2 + (x - e)^2 = r'^2 \ldots (2),$$

durch deren Verbindung man folgende Werthe für die Coordinaten der Durchschnittspunkte erhält:

$$x = \frac{e^2 + r^2 - r'^2}{2e}, \tag{3}$$

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{4e^2r^2 - (e^2 + r^2 - r'^2)^2}. \tag{4}$$

Der Werth von x ist, wie man sieht, immer reell, und — vorausgesetzt, dass e nicht $= 0$, d. h. die Kreise nicht concentrisch sind — bestimmt und endlich. Der Ausdruck für y wird hingegen imaginär, Null, oder erhält zwei reelle, gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe, je nachdem die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ, Null, oder positiv ist. Im ersten Falle schneiden sich die Kreise nicht; im letzten findet ein Durchschnitt statt und zwar in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten der Centrilinie in gleichen Entfernungen von derselben in einer auf der Centrilinie senkrechten Geraden liegen, da beiden vermöge (3) dieselbe Abscisse zukommt. Ist endlich die Grösse unter dem Wurzelzeichen $= 0$, so haben die beiden Kreise nur einen in der Centrilinie liegenden Punkt gemein, und die Gerade (3) wird in diesem Falle zur gemeinschaftlichen Tangente an dem besagten Punkte, in welchem sich nun die beiden Kreise berühren.

Löst man in (4) die Differenz unter dem Wurzelzeichen in Faktoren auf, so findet man:

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{\{(e + r + r')(e + r - r')(e + r' - r)(r + r' - e)\}},$$

woraus man erkennt, dass y reell wird, wenn, da $(r + r' + e)$ immer positiv ist, die übrigen drei Faktoren sämmtlich positiv, oder einer positiv und zwei negativ sind. Dieser letztere Fall kann aber nicht

eintreten. Denn ist einer dieser Faktoren z. B. $e+r-r'$ negativ, also $e+r<r'$, so ist $e<r'$ und $r<r'$, somit $r'-r$ und $r'-e$ positiv, wodurch aber die beiden andern Faktoren nothwendig positiv werden. Hiernach kann man folgenden Satz aussprechen:

Zwei Kreise, deren Halbmesser r, r' und Abstand der Mittelpunkte $=e$ sind, schneiden sich in zwei Punkten, wenn von den drei Grössen r, r' d jede kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Eine Berührung der beiden Kreise tritt ein, wenn $y=0$ wird, d. h. wenn einer der obigen drei Faktoren verschwindet, wenn also $e=r'-r$, oder $e=r-r'$, oder $e=r+r'$, d. h. wenn $e=\pm(r-r')$ oder $e=r+r'$ oder wenn man diese Gleichungen in eine vereinigt, wenn

$$e^2=(r\pm r')^2 \tag{5}$$

wird. Diese Gleichung drückt somit die Bedingung für die Berührung zweier Kreise analytisch aus, und diese tritt ein, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder der Differenz der Halbmesser gleich ist. Die Berührung wird im ersten Falle eine äussere, im zweiten eine innere genannt.

Mit Hilfe der Gl. (5) ist man nun im Stande, auch solche Aufgaben aufzulösen, bei welchen Berührungen von Kreisen gefordert werden; z. B. einen Kreis zu suchen, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt; oder welcher eine Gerade und zwei Kreise berührt u. s. w. Der Ansatz der drei Bedingungsgleichungen hat in allen diesen Fällen gar keine Schwierigkeiten; auf die weitere immer mehr oder weniger weitläufige Behandlung derselben einzugehen, gestattet der Raum nicht. Ein Ergebniss der Untersuchungen dieses Paragraphes von allgemeinerer Bedeutung wollen wir jedoch noch mit einigen Worten hervorheben, wozu uns die Gl. (3) Veranlassung gibt, welche, wie man sieht, einer zur y-Axe parallelen Geraden angehört, in welcher die Durchschnittspunkte beider Kreise, oder der Berührungspunkt liegen; welche Gerade jedoch — da die Gleichung immer reell bleibt — auch dann noch existirt, wenn die Kreise keinen Punkt gemeinschaftlich haben, und daher zu den Kreisen in einer gewissen Beziehung stehen muss.

189. Es seien allgemein:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0=K, \tag{1}$$

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-r'^2=0=K' \tag{2}$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise; durch Subtraktion derselben erhalten wir:

$$2y(\beta' - \beta) + 2x(\alpha' - \alpha) + m^2 = 0 = K - K'. \qquad (3)$$

wo der Kürze wegen $(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - (\alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2) = m^2$ gesetzt ist. Der Ort der Gl. (3) ist, da dieselbe nach x und y vom ersten Grade, eine gerade Linie, welche die beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punkte, wenn deren vorhanden sind, enthalten muss, weil sie durch dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche die Gleichungen $K = 0$ und $K' = 0$ gleichzeitig befriedigen. [Vergl. d. Anmerk. zu §. 176.] Schneiden sich die Kreise in zwei Punkten, so ist demnach (3) die Gleichung der durch diese Punkte gehenden *gemeinschaftlichen Sekante* (oder unbestimmt verlängerten *gemeinschaftlichen Sehne*); berühren sich die Kreise, so ist (3) die Gl. der *gemeinschaftlichen Tangente*, da sie durch den Berührungspunkt geht, und auf der Centrilinie der beiden Kreise, deren Gleichung

$$y - \beta = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}(x - \alpha)$$

ist, senkrecht steht. Haben endlich die zwei Kreise keinen gemeinschaftlichen Punkt, so hat auch die Gerade (3) mit denselben keinen Punkt gemein, nichtsdestoweniger existirt sie aber, da ihre Gleichung unter allen Umständen reell bleibt, und hat eine bestimmte Lage gegen die gegebenen Kreise. Dass diese Gerade keine andere ist, als die (3) im vorigen §., bedarf kaum der Erinnerung.

Wir wollen diese Gerade, welche nach dem Gesagten für je zwei gegebene Kreise immer existirt, mit *Plücker* die *Chordale* derselben nennen und einige der wesentlichsten Eigenschaften derselben in Kürze anführen.

I. *Die Chordale zweier Kreise steht senkrecht auf der Centrilinie derselben*, wie bereits durch das Vorstehende erwiesen ist.

II. Es seien drei Kreise gegeben: $K = 0$, $K' = 0$, $K'' = 0$, und zu je zweien derselben die Chordalen gezogen; die Gleichungen der drei Chordalen sind:

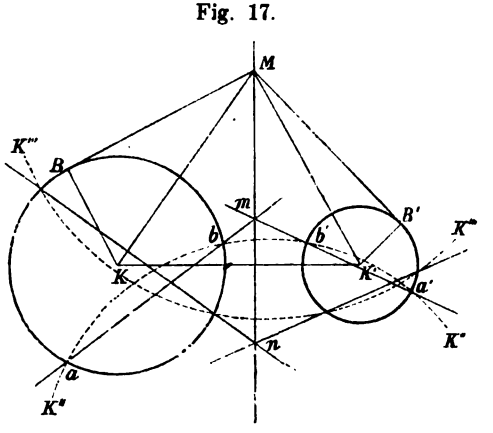
$$K - K' = 0, \quad K - K'' = 0, \quad K' - K'' = 0.$$

Da nun jede dieser Gleichungen eine Folge der beiden anderen ist, so muss irgend eine derselben durch dieselben Werthe von x und y b friediget werden, welche den beiden anderen gleichzeitig genügen; hi aus folgt der Satz:

Die drei Chordalen, welche zu je zweien von d gegebenen Kreisen gehören, schneiden sich in ein Punkte.

Dieser Satz leitet sogleich auf ein einfaches Verfahren zur Construction der Chordale zweier sich nicht schneidenden Kreise, wenn man noch beachtet, dass nach obigem die Chordale zweier sich schneidenden Kreise ihre gemeinschaftliche Sekante ist. Seien (Fig. 17) K, K' die gegebenen Kreise; man ziehe einen Hilfskreis K'', welcher die gegebenen Kreise in a, b; a', b' schneidet, so sind die unbestimmt verlängerten Geraden ab, $a'b'$ die Chordalen beziehungsweise der Kreise K, K'' und K', K'', welche sich mit der Chordale der Kreise K und K' in einem Punkte m schneiden müssen; es ist daher m ein Punkt der gesuchten Chordale. Auf dieselbe Weise construirt man mittelst eines zweiten Hilfskreises K''' einen zweiten Punkt n, und es ist die durch m und n gezogene Gerade die Chordale der Kreise K und K'.

Fig. 17.



III. Von einem beliebigen Punkte M (Fig. 17) der Chordale seien an die beiden Kreise K, K', deren Gleichungen die obigen (1) und (2) sein mögen, Tangenten MB und MB' gezogen; bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes M mit x, y; seine Entfernungen von den Berührungspunkten B und B' mit t, t'; seine Abstände von den Mittelpunkten K, K' mit d, d'; so ist:

$$t^2 = d^2 - r^2, \quad t'^2 = d'^2 - r'^2,$$

$$d^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, \quad d'^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2;$$

durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhält man mit Rücksicht auf Gl. (3), da der Punkt x, y der Chordale angehört:

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2, \quad \text{oder:}$$

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2, \tag{4}$$

folglich auch:

$$t^2 = t'^2 \quad \text{oder} \quad t = t'. \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) und (5) sprechen folgende Sätze aus:

Für jeden Punkt der Chordale sind die Potenzen . 184] in Bezug auf beide Kreise gleich.

Zieht man von irgend einem Punkte der Chordale veier Kreise Tangenten an dieselben, so sind die Län-

gen derselben bis zu den Berührungspunkten gezählt, einander gleich.

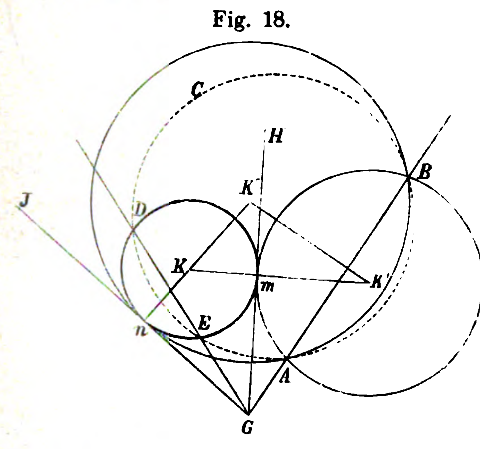
Aus diesen Gründen wird von manchen Schriftstellern die Chordale die **Linie der gleichen Potenzen**, auch **Potenz-Axe**, oder die Linie der **gleichen Tangenten** genannt. Französische Mathematiker heissen sie **Radikal-Axe**.

Die angeführten Eigenschaften der Chordale führen bei Auflösung von Aufgaben, insbesondere über Berührung von Kreisen, häufig zu sehr eleganten Construktionen, was noch an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Aufg. **Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.**

Seien (Fig. 18) K der gegebene Kreis; A, B die gegebenen Punkte. Denken wir uns den gesuchten Kreis K' construirt und ziehen wir durch A, B einen den gegebenen Kreis K in D und E schneidenden Hilfskreis C von willkürlichem Halbmesser, so sind die Geraden AB, DE die Chordalen beziehungsweise der Kreise C und K', C und K; ihr Durchschnittspunkt G ist daher auch (nach II) ein Punkt der Chordale der Kreise K und K', und da diese Kreise sich berühren sollen, so ist die Chordale derselben die gemeinschaftliche Tangente. Ziehen wir daher durch den Punkt G Tangenten GH und GJ an den gegebenen Kreis, so sind die Berührungspunkte derselben m und n zugleich die Berührungspunkte des gegebenen und gesuchten Kreises, woraus sogleich folgt, dass **zwei** Kreise gezogen werden können, welche der Aufgabe Genüge leisten. Unsere Aufgabe ist somit auf jene zurückgeführt, durch drei gegebene Punkte: A, B, m und A, B, n Kreise zu ziehen. Zieht man die Halbmesser Km und Kn und verlängert dieselben bis zu ihren Durchschnitten K', K'' mit dem im Halbirungspunkte der AB errichteten Perpendikel, so sind K', K'' die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

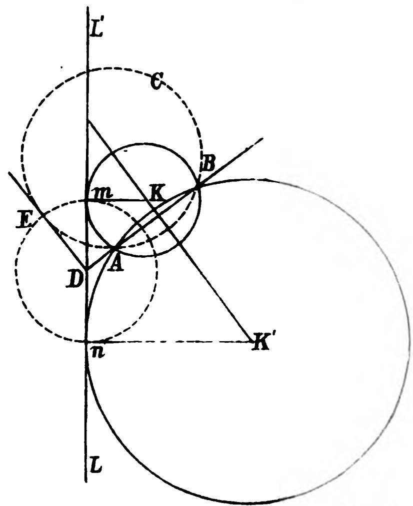
Fig. 18.



Aufg. Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte A, B geht und eine gegebene Gerade LL' berührt.

Ziehen wir (Fig. 19) durch die gegebenen Punkte einen beliebigen Hilfskreis C und die Gerade AB, welche die gegebene Gerade LL' in D schneidet. Es ist nun offenbar die AB die Chordale des gesuchten und des Hilfskreises und D ein Punkt dieser Chordale; construiren wir daher von D eine Tangente DE an den Hilfskreis, so muss nach III die aus D an den gesuchten Kreis gezogene Tangente dieselbe Länge $= DE$ haben. Beschreibt man daher aus D mit dem Halbmesser DE einen Kreis, so schneidet dieser die LL' in zwei Punkten m und n, welche die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit der LL' sind, woraus zugleich erhellt, dass die Aufgabe durch zwei Kreise zur Lösung gebracht wird, deren Mittelpunkte K und K' sich nun leicht ergeben, wenn man im Halbirungspunkte der AB ein Perpendikel errichtet und dieses durch die aus m und n senkrecht auf LL' gezogenen Geraden schneidet.

Fig. 19.



VIERTES KAPITEL.

ÜBER DIE LINIEN ZWEITER ORDNUNG ÜBERHAUPT ODER ÜBER DIE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ALLGEMEINEN GLEICHUNG DES ZWEITEN GRADES ZWISCHEN ZWEI VERÄNDERLICHEN GRÖSSEN.

---

190. Da jede nach einem bestimmten Gesetze gebildete Curve durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ zwischen den Coordinaten eines ihrer Punkte dargestellt werden kann, somit alle möglichen Curven in den unendlich mannigfaltigen Formen einer solchen Gleichung enthalten sein müssen, so kann man bei der Untersuchung der Curven den analytischen Charakter, der sich in ihren Gleichungen ausspricht, zum Ausgangspunkte wählen und wird dadurch zu einer systematischen Eintheilung derselben gelangen.

Hiedurch scheiden sich zunächst die Curven in zwei Classen, die algebraischen und transcendenten, je nachdem die Gleichung derselben eine algebraische oder transcendente ist.

Wir können immer annehmen, dass in der Gleichung einer algebraischen Curve, $F(x, y) = 0$, etwa vorhandene Brüche und Wurzelgrössen weggeschafft seien und folglich $F(x, y)$ eine rationale ganze Funktion der Veränderlichen x, y sei. Alle algebraischen Curven sind demnach in der Gleichung

$$Ay^n + (Bx + C)\,y^{n-1} + (Dx^2 + Ex + F)\,y^{n-2} + \ldots = 0 \qquad (\alpha)$$

enthalten, wo A, B, C, ... reelle constante Grössen, n aber eine positive ganze Zahl ist. Suchen wir nun nach einem weiteren Eintheilungsgrunde der algebraischen Curven, so bietet sich hiezu sogleich, aber auch allein, der Grad der Gl. (α) in Bezug auf die Veränderlichen x, y dar, und wir theilen daher die algebraischen Linien nach dem Ordnungsexponenten ihrer Gleichungen in Linien des 1sten, 2ten, 3ten, ... $n$ten Grades oder der $n$ten Ordnung ein.

Die gerade Linie ist daher eine Linie der 1sten Ordnung und zwar, wie bekannt, die einzige dieser Gattung. Der Kreis ist eine Curve der 2ten Ordnung; da jedoch die Gleichung des 2ten Grades zwischen x und y gewisse Bedingungen erfüllen muss [§. 179], wenn sie einen Kreis bedeuten soll, so schliessen wir, dass der Kreis nicht die einzige Linie 2ter Ordnung sein werde.

Diese Eintheilung der algebraischen Linien nach dem Grade ihrer Gleichungen wäre offenbar unzulässig, wenn der Ordnungsexponent der Gleichung nicht unverändert bliebe, man mag die Curve auf was immer für ein Coordinatensystem beziehen. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass der Grad der Gl. (α) und mit ihm auch die geometrische Bedeutung derselben, von der Wahl des Coordinatensystems ganz unabhängig ist. Lassen wir nämlich die Gl. (α), deren geometrischer Ort eine gewisse Curve sein wird, auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen sein, und gehen wir von diesem auf ein neues über, so haben wir in (α) für x und y die durch die Formeln (3) [§. 163] gegebenen Ausdrücke einzusetzen, wodurch wir eine neue Gleichung erhalten, welche, da jene Ausdrücke in Bezug auf die neuen Coordinaten x', y' vom ersten Grade sind, offenbar wieder vom n^{ten} Grade sein wird und dieselbe Curve zum geometrischen Orte hat.

Eine Linie der n^{ten} Ordnung kann von einer Geraden nicht in mehr als in n Punkten geschnitten werden.

Denn es sei $y = ax + b \ldots (\beta)$ die Gleichung einer die Curve (α) schneidenden Geraden. Um die Durchschnittspunkte zu erhalten, eliminiren wir aus (α) und (β) etwa y und erhalten eine Eliminationsgleichung nach x, deren Wurzeln die Abscissen sämmtlicher Durchschnittspunkte sein werden. Es sind aber die Glgn. (α) und (β) beziehungsweise vom n^{ten} und 1sten Grade; die Eliminationsgleichung kann daher [§. 135] den n^{ten} Grad nicht übersteigen und folglich nicht mehr als n Wurzeln haben.

Eine Linie der zweiten Ordnung kann daher von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden. Mit der allgemeinen Untersuchung dieser Linien wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen.

191. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y hat die Form:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0, \qquad (1)$$

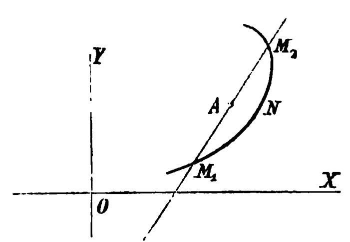
wobei wir, nach dem im vorigen §. Gesagten, ein rechtwinkeliges Coordinatensystem voraussetzen können, ohne der Allgemeinheit der Unter-[illegible]chung Eintrag zu thun.

Um die geometrische Bedeutung der Gl. (1) kennen zu lernen, [illegible]issen wir trachten, sie auf eine einfachere Form zu bringen, was [illegible]rch Transformation der Coordinaten bewirkt werden kann, indem wir [illegible]sprung und Axenrichtung des neuen Coordinatensystemes so wählen, [illegible]ss aus der transformirten Gleichung gewisse Glieder hinausfallen.

Die folgenden Betrachtungen werden hiezu die nöthigen Mittel darbieten.

Es sei M_1NM_2, (Fig. 20), ein Theil der Curve, welche aus der Construktion der Gl. (1) hervorgeht; A irgend ein Punkt in der Ebene derselben, ξ, η dessen Coordinaten; ziehen wir durch A eine beliebige Gerade, welche gegen die Axe der x unter dem Winkel φ geneigt sein mag, so ist ihre Gleichung:

Fig. 20.



$$y - \eta = m(x - \xi), \qquad (2)$$

wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{tg}\varphi = m$ setzen. Durch Elimination von y aus (1) und (2) erhalten wir:

$$px^2 + 2qx + r = 0, \qquad (3)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} p &= A + A'm^2 + 2Bm, \\ q &= (A'm + B)(\eta - m\xi) + C + C'm, \\ r &= A'(\eta - m\xi)^2 + 2C'(\eta - m\xi) + F. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Gl. (3) wird im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Wurzeln x_1, x_2, darbieten, welche, wenn reell, bekanntlich die Abscissen der Durchschnittspunkte der Geraden (2) und der Curve (1) sind. Es folgt hieraus, dass, wie schon oben bemerkt, eine Linie zweiter Ordnung von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

Das von den Durchschnittspunkten begrenzte Stück $M_1 M_2$ einer schneidenden Geraden wollen wir eine Sehne oder Chorde der Curve nennen, und nun annehmen, dass der Punkt A (ξ, η) die Sehne $M_1 M_2$ halbire. Als Bedingung hiefür haben wir $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ zu setzen, wenn x_1, x_2 die Wurzeln der Gl. (3) vorstellen. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen ist aber:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2q}{p}, \text{ wodurch } \xi = -\frac{q}{p}, \text{ oder } p\xi = -q$$

wird. Durch Substitution der Werthe von p und q aus (4) erhält man:

$$A\xi + B\eta + C + m(A'\eta + B\xi + C') = 0, \qquad (5)$$

welche Gleichung sofort die Bedingung ausdrückt, welcher die Coordinaten ξ, η des Halbirungspunktes einer unter den Winkel φ gegen die Axe der x geneigten Sehne Genüge leisten.

192. Untersuchen wir nun, ob es nicht möglich ist, dem Punkte ξ, η eine solche Lage anzuweisen, dass er jede durch ihn gezogene

Sehne halbire. Zu diesem Behufe muss die Gl. (5) für jeden Werth von $m = \operatorname{tg}\varphi$ erfüllt sein, wodurch sie in die beiden folgenden:

$$A\xi + B\eta + C = 0, \quad A'\eta + B\xi + C' = 0, \qquad (6)$$

zerfällt, aus welchen man für ξ und η die Werthe:

$$\xi = \frac{A'C - BC'}{B^2 - AA'}, \quad \eta = \frac{AC' - BC}{B^2 - AA'} \qquad (7)$$

zieht. Diese Ausdrücke führen zu folgenden Ergebnissen:

a) Ist die Grösse $B^2 - AA'$ von Null verschieden, so gibt es einen aber auch nur einen Punkt in der Ebene der Curve (1), welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbirt. Sein Ort ist durch die Gleichungen (6) oder (7) gegeben*). Ein mit dieser Eigenschaft begabter Punkt wird **Mittelpunkt** oder **Centrum** der Curve genannt.

b) Ist aber $B^2 - AA' = 0$, und verschwinden nicht gleichzeitig beide Zähler in (7), so werden obige Werthe von ξ und η oder wenigstens einer von ihnen unendlich; in diesem Falle besitzt daher die Curve **keinen Mittelpunkt**. Man kann ihn in unendlicher Entfernung liegend annehmen.

c) Wenn endlich nebst dem Nenner $B^2 - AA'$ auch noch die Zähler in (7) sich auf Null reduciren, so nehmen diese Ausdrücke die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, woraus man auf die Existenz von unendlich vielen Mittelpunkten schliesst. Dies tritt dann ein, wenn die beiden Glgn. (6) von einander nicht wesentlich verschieden sind; sie stellen dann eine Gerade vor, welche der geometrische Ort sämmtlicher Mittelpunkte ist.

Dieser Fall kann übrigens — ohne dass aus (1) eine der Coordinaten ganz verschwinde — nur dann Statt finden, wenn entweder 1) $A'C = BC'$ ist, wodurch wegen $AA' = B^2$ auch $AC' = BC$ wird; oder 2) wenn $C = C' = 0$ ist. In beiden Fällen ist aber der geometrische Ort der Gl. (1) keine Curve, sondern ein **System zweier parallelen Geraden**. In der That, multipliciren wir im ersten Falle (1) mit A und setzen sodann B^2 statt AA' und BC statt AC' so erhält sie die Form:

$$(Ax + By)^2 + 2C(Ax + By) + AF = 0, \text{ woraus:}$$

$$Ax + By = -C \pm \sqrt{C^2 - AF} \qquad (m)$$

‹t, welche Gleichung offenbar zwei parallele Gerade bedeutet. Im

*) Die Gleichungen (6) lassen sich immer leicht hinschreiben, wenn man ‹chtet, dass dieselben nichts anderes sind als die 1ten derivirten Funktionen ‹91] des Polynoms der Gl. (1), wenn man für die erste x, für die zweite y Veränderliche betrachtet.

anderen Falle, wenn $C = C' = 0$, bringt man (1) auf die Form:

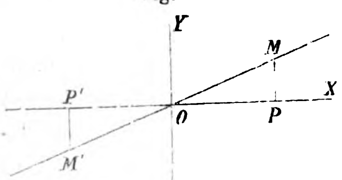
$$Ax + By = \pm \sqrt{-AF} \qquad (n)$$

welche Gleichung wieder zu zwei parallelen Geraden gehört, wobei in beiden Fällen die Grösse unter dem Wurzelzeichen sich positiv ergeben muss, widrigenfalls der (1) gar keine geometrische Bedeutung zukäme. Im 1sten Falle reduciren sich nun die beiden Glgn. (6) auf die eine: $A\xi + B\eta + C = 0 \ldots (m')$, im 2ten auf: $A\xi + B\eta = 0 \ldots (n')$. Es ist aber (m') eine Gerade, welche in der Mitte der beiden Geraden (m) parallel zu denselben liegt und offenbar hat jeder Punkt derselben die Eigenschaft, jede durch ihn gelegte Verbindungslinie (Sehne) der beiden Geraden (m) zu halbiren. Dasselbe gilt von (n') in Bezug auf die Geraden (n). Die beiden parallelen Geraden (m) oder (n) fallen übrigens in je eine einzige zusammen, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet.

Die durch die Gleichung (1) dargestellten Curven zweiter Ordnung zerfallen hiernach in zwei Klassen, von welchen die eine jene krummen Linien umfasst, welchen ein Mittelpunkt zukommt (wenn $B^2 - AA' \gtrless 0$), die andere aber jene, welche keinen Mittelpunkt haben.

193. Nimmt man den Mittelpunkt einer Curve, im Falle ein solcher existirt, als Ursprung an, so muss die Gleichung derselben nothwendig die Eigenschaft erhalten, sich nicht zu ändern, wenn man $-x$, $-y$ an die Stelle von x, y setzt. Denn es sei (Fig. 21) O der Ursprung und zugleich Mittelpunkt irgend einer Curve, und OM eine beliebige durch denselben gezogene Gerade, welche die Curve in M schneidet, so muss, wenn man auf der Verlängerung von MO, $OM' = OM$ macht, auch M' ein Punkt der Curve sein, wo nun sogleich erhellt, dass die Coordinaten der Punkte M, M' numerisch gleich aber entgegengesetzten Zeichens sind. Sind also x, y ein Paar Werthe der Coordinaten, welche der Gleichung der Curve Genüge leisten, so müssen auch die Werthe $-x$, $-y$ dieselbe identisch machen. Diese Eigenschaft wird der Gleichung offenbar nur dann zukommen, wenn sämmtliche von x und y abhängige Glieder derselben zugleich entweder von gerader oder ungerader Dimension nach x, y sind.

Fig. 21.



Hieraus folgt also, dass aus der Gl. (1) die linearen Glieder in x und y verschwinden müssen, wenn wir ohne Veränderung der Richtung der Axen den Ursprung in den Mittelpunkt verlegen, wenn ein solcher existirt. In der That, setzen wir in (1) $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, so geht diese Gleichung über in:

$$\left.\begin{array}{r} Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' + 2(A\xi + B\eta + C)\,x' \\ + 2(A'\eta + B\xi + C')\,y' \end{array}\right\} = K,$$

wenn Kürze halber:

$$K = -(A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + 2C\xi + 2C'\eta + F)$$

gesetzt wird. Ist nun der neue Ursprung Mittelpunkt der Curve, so verwandelt sich diese Gleichung mit Rücksicht auf (6) in folgende einfachere:

$$Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' = K, \tag{8}$$

wo die Coefficienten A, A', B dieselben sind wie in (1), und der Ausdruck von K sich auf die einfachere Form:

$$K = -(C\xi + C'\eta + F) \tag{9}$$

bringen lässt, da in dem obigen Werthe von K der Theil:

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + C\xi + C'\eta = (A\xi + B\eta + C)\,\xi + (A'\eta + B\xi + C')\,\eta$$

in Folge der Glgn. (6) verschwindet.

194. Kehren wir nun zur Gl. (5):

$$A\xi + B\eta + C + m\,(A'\eta + B\xi + C') = 0 \tag{5}$$

zurück, in welcher bekanntlich ξ, η die Coordinaten des Halbirungspunktes einer unter dem Winkel φ gegen die Abscissenaxe geneigten Sehne bedeuten und $m = \operatorname{tg}\varphi$ ist. Betrachten wir jetzt m als constant und ξ, η als veränderliche Coordinaten, d. h. denken wir uns eine Schaar paralleler Sehnen gezogen, so drückt die Gl. (5) offenbar die Beziehung aus, welche zwischen den Coordinaten der Halbirungspunkte aller dieser Sehnen stattfindet; sie ist also die Gleichung des geometrischen Ortes dieser Halbirungspunkte, welcher somit, da (5) nach ξ, η vom 1sten Grade ist, eine gerade Linie ist. Hieraus folgt also, dass bei den Linien zweiter Ordnung die Halbirungspunkte eines Systemes paralleler Sehnen in einer Geraden liegen.

Eine gerade oder krumme Linie, welche eine Folge paralleler Sehnen einer Curve halbirt, heisst ein Durchmesser oder Diameter der Curve.

Alle Linien zweiter Ordnung besitzen daher geradlinige Durchmesser.

Da die Gl. (5) des zu dem, unter dem Winkel φ gegen die Abscissenaxe geneigten Sehnensysteme gehörigen Durchmessers für jeden Werth von $m = \operatorname{tg} \varphi$ bestehen kann, so entspricht jedem Systeme paralleler Sehnen ein Durchmesser.

Durch Auflösung nach η erhält die Gl. (5) des Durchmessers die Form:

$$\eta = -\frac{A + Bm}{A'm + B}\xi - \frac{C + C'm}{A'm + B}. \tag{10}$$

Ist ψ der Neigungswinkel dieses Durchmessers gegen die Abscissenaxe, so hat man, wenn $m' = \operatorname{tg} \psi$, vermöge (10):

$$m' = -\frac{A + Bm}{A'm + B}. \tag{11}$$

Setzen wir in (1) $B^2 - AA' \gtrless 0$ voraus, so existirt bekanntlich ein Mittelpunkt, dessen Coordinaten sich aus den Glgn. (6) ergeben, und — wie aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit der Gl. (5) eines Durchmessers sogleich erhellt — der letztgenannten Gleichung Genüge leisten. Hieraus folgt, dass bei jenen Linien zweiter Ordnung, welchen ein Mittelpunkt zukommt, alle Durchmesser sich in diesem Punkte schneiden. Umgekehrt ist jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne ein Durchmesser, weil in (6) $m = \operatorname{tg} \varphi$ willkürlich ist.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn $B^2 - AA' = 0$ ist: denn multiplicirt man Zähler und Nenner in (11) mit A', und schreibt B^2 statt AA', so erhält man $m' = -\frac{B}{A'}$, woraus folgt, dass in diesem Falle die Richtung des Durchmessers von der Sehnenrichtung unabhängig wird; die Gleichung des Durchmessers geht über in:

$$\eta = -\frac{B}{A'}\xi - \frac{C + C'm}{A'm + B},$$

und folglich entspricht zwar ebenfalls jedem Sehnensystem ein bestimmter Durchmesser, aber alle Durchmesser werden unter sich parallel; ihr Durchschnittspunkt (der Mittelpunkt) liegt in unendlicher Entfernung.

Löst man die Gl. (11) nach m auf, so erhält man:

$$m = -\frac{A + Bm'}{A'm' + B},$$

welches Resultat aber aus (11) auch durch blosse Vertauschung von mit m' hervorgeht. Denkt man sich daher parallel zu irgend eine

Durchmesser (5) ein zweites Sehnensystem, so liegt der zu diesem gehörige Durchmesser parallel zu dem ersten Sehnensysteme. Wir erhalten hiedurch zwei Durchmesser, deren jeder das zu dem anderen parallel gezogene Sehnensystem halbirt. Man nennt ein Paar solcher Durchmesser conjugirte Durchmesser. Da hiebei eine von den Grössen m, m' willkürlich angenommen werden kann, so entspricht jedem Durchmesser ein conjugirter, und es gibt daher in den Linien 2ter Ordnung unendlich viele Systeme conjugirter Durchmesser.

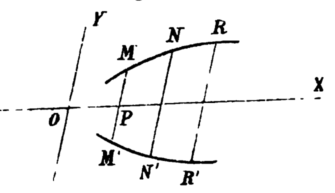
Der Winkel u endlich, unter welchem ein Durchmesser sein Sehnensystem schneidet, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} u = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

gegeben, und im Allgemeinen von einem rechten Winkel verschieden.

195. Nichts hindert, einen Durchmesser als Abscissenaxe anzunehmen und die Axe der y den zugehörigen Sehnen parallel zu legen. Transformirt man sodann die Gl. (1) auf dieses neue Coordinatensystem, so entsprechen jedem Werthe von x, z. B. $= OP$, (Fig. 22) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y: $PM = PM'$, woraus folgt, dass die transformirte Gleichung nach y rein quadratisch sein muss. Hiedurch ist also ein zweites Mittel gegeben, die Gl. (1) zu vereinfachen, indem dadurch die Glieder mit den ersten Potenzen von y hinausfallen. Da man jedoch hiebei im Allgemeinen auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem gerathen würde, so entsteht die Frage, ob die Linien zweiter Ordnung nicht solche Durchmesser besitzen, welche die zugehörigen Sehnen unter einem rechten Winkel schneiden.

Fig. 22.



Ein Durchmesser, welcher seine Sehnen senkrecht schneidet, heisst ein Hauptdurchmesser, und die zugehörige Richtung der Sehnen Hauptrichtung. Es ist klar, dass ein Hauptdurchmesser die Curve in zwei symmetrische Zweige theilt.

196. Bezeichnen wir, wie oben, mit m, m' die Tangenten der inkel φ und ψ, welche ein System paralleler Chorden und der zugerige Durchmesser mit der Axe der x einschliessen, so drückt benntlich die Gleichung $mm' + 1 = 0$ die Bedingung aus, dass der ırchmesser das Sehnensystem senkrecht schneide, welche Gleichung, ɜnn man mit Hilfe von (11) m' eliminirt, in folgende übergeht:

$$\frac{A'm + B}{A + Bm} = m. \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung kann man den Winkel φ, welcher jetzt eine Hauptrichtung bestimmt, auf mehr als eine Weise finden. Schreibt man $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ statt $m = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält sie durch Wegschaffung der Brüche die Form:

$$(A' - A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = 0\,, \tag{13}$$

woraus, weil $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, und $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ ist:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2B}{A' - A} \tag{14}$$

folgt. Ordnet man jedoch die Gl. (12) nach der Grösse $m = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\varphi^2 - \frac{A' - A}{B}\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0, \tag{15}$$

aus welcher sich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A' - A \pm \sqrt{(A' - A)^2 + 4B^2}}{2B} \tag{16}$$

ergibt. Diese Gleichung, welche (sowie (14)) für $\operatorname{tg}\varphi$ zwei, jederzeit reelle Werthe darbietet, zeigt nun, dass die Linien 2ter Ordnung im Allgemeinen zwei Hauptrichtungen und somit auch zwei Hauptdurchmesser zulassen.

Bezeichnet man mit φ_1, φ_2 die beiden aus (16) folgenden Werthe von φ, so sind $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$ die Wurzeln der Gl. (15); es ist somit nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \,.\, \operatorname{tg}\varphi_2 = -1\,,$$

woraus folgt, dass die beiden Hauptdurchmesser auf einander senkrecht stehen.

Diese Ergebnisse erleiden unter Umständen einige Modificationen, auf welche wir schon durch den Widerspruch aufmerksam werden, in welchem dieselben mit dem in §. 194 erhaltenen Resultate zu stehen scheinen, dass in dem Falle, wenn $B^2 - AA' = 0$, sämmtliche Durchmesser zu einander parallel werden. Um hierüber ins Klare zu kommen, wollen wir zur Bestimmung der Hauptrichtung aus Gl. (12) noch einen anderen Weg einschlagen. Setzen wir den Nenner $A + Bm = s$, so erhalten wir statt (12) das System der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} A'm + B = ms, & \text{oder} & (A' - s)\,m + B = 0,\\ A + Bm = s, & & A - s + Bm = 0. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Durch Elimination von m erhält man zunächst:

$$(A - s)(A' - s) - B^2 = 0,$$

oder geordnet:

$$s^2 - (A + A')s - (B^2 - AA') = 0, \qquad (18)$$

woraus:

$$s = \frac{A + A'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2} \qquad (19)$$

folgt. Bezeichnet man diese beiden immer reellen Wurzeln der Gl. (18) mit s_1, s_2, so erhält man durch Substitution derselben in eine der Glgn. (17) die gesuchten Werthe von m, m_1 und m_2, für die beiden Hauptrichtungen, die wir schon in (16) dargestellt haben.

Es können nun offenbar nur folgende drei Fälle eintreten:

I. Die beiden Wurzeln s_1 und s_2 sind sowohl unter sich als von der Nulle verschieden. Bedingung hiefür ist:

$$\frac{A + A'}{2} \gtrless \frac{1}{2}\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2},$$

d. i. gehörig reducirt: $B^2 - AA' \gtrless 0$, also die Curve mit einem Mittelpunkte versehen. Mit s_1 und s_2 erhalten wir aus (17) zwei bestimmte Werthe für m, somit zwei Hauptrichtungen, welchen zwei auf einander senkrechte, im Centrum der Curve sich schneidende Hauptdurchmesser entsprechen.

II. Die beiden Wurzeln s_1 und s_2 sind gleich, aber von Null verschieden. Hiezu wird erfordert, dass in (19) das Radikal verschwinde, also:

$$A = A', \quad B = 0$$

sei, wodurch $s_1 = s_2 = A = A'$ wird. Die Gl. (12) oder jene (17) sind in diesem Falle für jeden Werth von m erfüllt, d. h. jede beliebige Richtung ist eine Hauptrichtung, somit jede durch den (in diesem Falle wegen $B^2 - AA' = -A^2 < 0$ existirenden) Mittelpunkt gezogene Gerade ein Hauptdurchmesser. Daraus folgt nothwendig, dass alle Punkte der Curve vom Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. Denn es sei (Fig. 23) C der Mittelpunkt, AB ein beliebiger Durchmesser, welcher die Curve in A ıd B schneidet, also $AC = BC$, endlich M ı beliebiger Punkt der Curve. Man ziehe die ·hne AM und durch den Mittelpunkt C eine ırade PQ senkrecht auf AM. Nun ist PQ, so e jede durch den Mittelpunkt gezogene Ge- le ein Hauptdurchmesser; folglich halbirt PQ die Sehne AM, also

Fig. 23.

ist $AD = MD$, woraus $MC = AC$ folgt. Die Gl. (1) bedeutet somit in diesem besonderen Falle, wenn die Quadrate von x und y gleiche Coefficienten haben und das Product xy fehlt, einen Kreis, was mit früheren Ergebnissen [§. 179] vollkommen übereinstimmt.

III. Es ist eine der beiden Wurzeln, z. B. $s_1 = 0$; Bedingung hiefür ist, dass in (18) das absolute Glied verschwinde, also

$$B^2 - AA' = 0$$

sei. Für die 2te Wurzel folgt aus (18): $s_2 = A + A'$.

Mit diesen Werthen von s erhalten wir nun aus (17) allerdings zwei bestimmte Hauptrichtungen:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'},\quad m_2 = \frac{A'}{B} = \frac{B}{A};$$

allein nur der zweiten entspricht ein bestimmter Hauptdurchmesser. Setzen wir nämlich in der Gl. (10) eines beliebigen Durchmessers statt $A + Bm$ und $A'm + B$ die Werthe s und ms aus (17), so erhalten wir als Gleichung eines Hauptdurchmessers:

$$s(\xi + m\eta) + C + C'm = 0. \tag{20}$$

Diese Gleichung gehört nun offenbar einer vollkommen bestimmten Geraden — dem einen bestimmten Hauptdurchmesser —, wenn wir darin obige Werthe $s = s_2$ und $m = m_2$ substituiren. Allein für den 2ten Hauptdurchmesser erhält man aus (20) für:

$$s = s_1 = 0,\quad \text{und}\quad m = m_1 = -\frac{B}{A'}:$$

$$0 \,.\, (\xi + m_1\eta) + C + C'm_1 = 0, \tag{21}$$

wo nun zwei Fälle zu unterscheiden sind.

1) Ist $C + C'm_1 = (CA' - BC') : A = 0$, wozu entweder $A'C = BC'$ oder $C = C' = 0$ erfordert wird, in welchem Falle [§. 192 c] unendlich viele Mittelpunkte dem Orte der Gl. (1) zukommen, so ist die Gl. (21) identisch fü. .des ξ und η erfüllt, d. h. jede Gerade, welche wir durch einen beliebigen Punkt senkrecht auf die durch m_1 bestimmte Sehnenrichtung ziehen, ist ein Hauptdurchmesser. Dies ist offenbar nur möglich, wenn jeder Punkt irgend einer von diesen Sehnen als Hal rungspunkt derselben angesehen werden kann, die Sehnen somit uner lich lang sind und weder auf der einen noch anderen Seite den g metrischen Ort der Gl. (1) treffen, was nur Statt finden kann, we dieser ein System zweier parallelen Geraden ist. Dies steht mit d Ergebnissen in §. 192, c, vollkommen im Einklange. Man hat al

hier einen bestimmten Hauptdurchmesser und unendlich viele darauf senkrechte.

2) Ist aber $C + C'm_1$ von Null verschieden, in welchem Falle der Ort der Gl. (1) keinen Mittelpunkt hat, so lässt sich der Gl. (21) durch endliche Werthe von ξ und η nicht Genüge leisten. Schreiben wir (20) in der Form:

$$\eta = -\frac{1}{m}\xi - \frac{C + C'm}{ms},$$

setzen darin $m = m_1$ und lassen s immer kleiner werden, so drückt sie eine Gerade aus, welche parallel zu sich selbst immer weiter vom Ursprunge sich entfernt; für $s = s_1 = 0$ geht sie in den 2ten Hauptdurchmesser über, welcher aber nun in unendliche Entfernung fällt, folglich nicht existirt. In diesem Falle, dem einzigen, haben wir daher nur einen Hauptdurchmesser, welcher mit der Axe einen Winkel $\psi = \varphi_1$ einschliesst, dessen trigonometrische Tangente $= m_1$, also:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'} \tag{22}$$

ist.

Anmerkung. Beide Wurzeln der Gl. (18) können nicht $= 0$ sein; denn hiezu würde $A = A' = 0$ und $B = 0$ erfordert, wodurch aber die Gl. (1) auf den 1sten Grad herabsinken würde.

197. Die bisherigen Untersuchungen bieten nun hinreichende Mittel dar, um die Gl. (1) durch Transformation der Coordinaten auf die möglichst einfachen Formen zurückzuführen.

Da, wie wir im vor. §. gesehen haben, wenigstens ein Hauptdurchmesser immer existirt, so können wir diesen als Axe der x annehmen; führt man diese Transformation aus, zu welchem Zwecke das Axensystem um den durch Gl. (16) bestimmten Winkel φ gedreht werden muss, so wird [§. 195] die Gl. (1) die Glieder mit den 1sten Potenzen von y verlieren und somit die Form:

$$Mx^2 + Ny^2 + 2Rx + F = 0 \tag{23}$$

annehmen, in welcher somit noch sämmtliche Linien der 2ten Ordnung enthalten sein müssen.

Entweder wird nun in Folge dieser 1sten Transformation M, der Coefficient von x^2, von 0 verschieden sein, oder es wird auch $M = 0$.

Im 1sten Falle kann man die Gl. (23) von dem Gliede mit der 1sten Potenz von x befreien, indem man $x = x' - \frac{R}{M}$ setzt, d. h. den

Ursprung auf der x-Axe um das Stück $R : M$ zurückschiebt, wodurch die Gl. (23) die Form erhält:

$$Mx^2 + Ny^2 = K. \tag{I}$$

Im 2ten Falle geht (23) wegen $M = 0$ über in $Ny^2 + 2Rx + F = 0$, aus welcher Gleichung das constante Glied F weggeschafft werden kann, indem man $x = x' - \frac{F}{2R}$ setzt, d. h. den Ursprung auf der x-Axe um das Stück $-F : 2R$ zurückschiebt, wodurch man:

$$Ny^2 + 2Rx = 0 \tag{II}$$

erhält.

Wie aus der Form der Gl. (I) erhellt, ist der Ursprung Mittelpunkt der Curve, dessen Coordinaten durch die Glgn. (7) gegeben sind, und die beiden Coordinatenaxen sind Hauptdurchmesser. Diese Gleichung umfasst daher jene geometrischen Oerter der Gl. (1), welche einen Mittelpunkt, oder auch deren unendlich viele besitzen.

Aus der Form der Gl. (II) ersieht man, dass der Ursprung kein Mittelpunkt und nur die Axe der x ein Hauptdurchmesser ist; und da aus dieser Gleichung das lineare Glied $2Rx$ nicht weggeschafft werden kann, so begreift diese Gleichung jene geometrischen Oerter der Gl. (1), welchen kein Mittelpunkt zukommt.

Schreiten wir nun zur Discussion dieser Gleichungen.

198. Discussion der Gleichung:

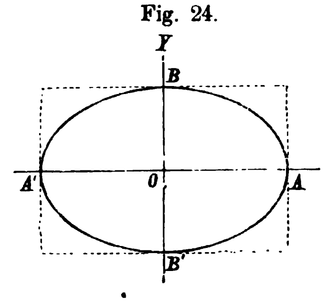
$$Mx^2 + Ny^2 = K. \tag{I}$$

Da die von 0 verschiedene Grösse M immer positiv vorausgesetzt werden kann, so haben wir folgende Fälle zu betrachten:

1) N positiv.

α) K positiv. Der geometrische Ort der Gl. I. ist in diesem Falle eine Curve, deren Gestalt sich leicht durch folgende Discussion ergibt. Für $y = 0$ folgt $x = \pm\sqrt{\frac{K}{M}}$; die Curve schneidet daher die Axe der x in zwei Punkten A, A', (Fig. 24), deren Entfernung vom Ursprunge (Mittelpunkt der Curve) $= \pm\sqrt{\frac{K}{M}}$ ist. Eben so findet man für $x = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{K}{N}}$ als Ordinaten der zwei Durchschnittspunkte B, B' der Curve mit der Axe der y. Aus I. folgt ferner:

Fig. 24.



$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N}\left(\frac{K}{M} - x^2\right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N}{M}\left(\frac{K}{N} - y^2\right)},$$

woraus man ersieht, dass y imaginär wird für Werthe von x, welche numerisch $> \sqrt{\frac{K}{M}}$ sind; eben so entspricht jedem Werthe von $y > \sqrt{\frac{K}{N}}$ ein imaginärer Werth von x; es liegt daher kein Punkt der Curve ausserhalb des durch die vier Geraden gebildeten Rechteckes, welche durch die Punkte A, A', B, B' parallel zu den zwei coordinirten Axen gezogen werden. Hingegen entsprechen jedem positiven oder negativen x, dessen Zahlenwerth die Grösse $\sqrt{\frac{K}{M}}$ nicht überschreitet, zwei reelle, gleiche und entgegengesetzte Werthe von y; unsere Curve ist daher eine geschlossene, nach allen Richtungen begrenzte. Ihren grössten Werth erreicht die Ordinate y für $x = 0$, in den Punkten B und B'; sie nimmt für (positiv und negativ) wachsende x fort und fort ab, und wird $= 0$, für $x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Dies genügt, um sich eine deutliche Vorstellung dieser Curve, welche Ellipse genannt wird, bilden zu können.

Die von der Curve begrenzten Stücke AA' und BB' der beiden Hauptdurchmesser heissen die Axen der Ellipse, die eine die grosse, die andere die kleine. Setzen wir die Hälften derselben $OA = a$, $OB = b$, so ist $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{K}{N}}$, durch deren Einführung die Gl. I. in folgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{24}$$

übergeht. Die Endpunkte der beiden Axen: A, A', B, B' heissen die Scheitel der Ellipse.

In dem besonderen Falle, dass $M = N$ sich ergibt, wird auch $a = b$ und die Glgn. I. und (24) gehen über in:

$$x^2 + y^2 = \frac{K}{M}, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

lche einem Kreise vom Halbmesser $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$ angehören. Der Kreis daher als ein specieller Fall der Ellipse zu betrachten.

β) K negativ. Da die Summe zweier wesentlich positiver Grössen x^2 und Ny^2 nicht negativ sein kann, so kommt in diesem Falle der . I. keine geometrische Bedeutung zu. (Imaginäre Curve.)

γ) $K = 0$. Die Gl. I. reducirt sich in diesem Falle auf:

$$Mx^2 + Ny^2 = 0,$$

und wird nur durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ erfüllt. Diese Gleichung, somit auch jene (1) bedeutet daher in diesem Falle einen Punkt, den jetzigen Ursprung, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Axensystem durch die Gleichungen (7) gegeben sind.

2) N negativ.

Setzen wir, um das Zeichen des Coefficienten von y^2 ersichtlich zu machen, $N = -N'$, so haben wir es mit der Gleichung:

$$Mx^2 - N'y^2 = K \tag{25}$$

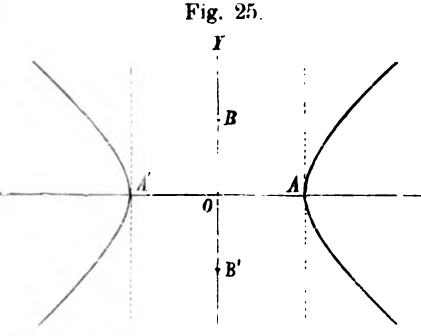
zu thun, in welcher N' eine wesentlich positive Grösse.

α) K positiv. Aus (25) findet man:

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N'}\left(x^2 - \frac{K}{M}\right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N'}{M}\left(y^2 + \frac{K}{N'}\right)}.$$

Da für $x = 0$, y imaginär ausfällt, so wird die Axe der y von der Curve nicht geschnitten, wohl aber die Abscissenaxe in zwei Punkten A, A' (Fig. 25), für deren Abscissen OA und OA' man die Werthe $\pm \sqrt{\frac{K}{M}}$ findet. Weil ferner für jeden positiven oder negativen Werth von x, welcher numerisch $< \sqrt{\frac{K}{M}}$ ist, y imaginär wird, so liegt kein Punkt der Curve zwischen den zwei Geraden, welche durch die zwei Punkte A, A' senkrecht auf die x-Axe gezogen werden. Hingegen entsprechen jedem positiven oder negativen Werthe von x, welcher absolut $> \sqrt{\frac{K}{M}}$ ist, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y, welche mit x fort und fort bis ins Unendliche zunehmen. Die durch die Gl. (25) dargestellte Curve besteht daher aus zwei getrennten, auf beiden Seiten der Ordinatenaxe liegenden Aesten, deren jeder wieder symmetrisch zu beiden Seiten der x-Axe sich ins Unendliche erstreckt.

Fig. 25.



Diese Curve führt den Namen Hyperbel. Sie wird nur von einem der beiden Hauptdurchmesser in den Punkten A, A' getroffen, welche die Scheitel der Hyperbel genannt werden. Das zwischen beiden

Scheiteln liegende Stück AA' des einen Hauptdurchmessers heisst die erste Axe (auch Queraxe, reelle Axe); bezeichnet man die Hälfte $OA = OA'$ derselben mit a, so ist $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$; setzt man überdies noch $b = \sqrt{\frac{K}{N'}}$, so nimmt die Gl. (25) der Hyperbel die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \tag{26}$$

welche Gleichungen, wie man sieht, aus jenen der Ellipse (24) hervorgehen, wenn man dort $-b^2$ statt b^2 oder $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Da aus (26) für $x = 0$, $y = \pm b\sqrt{-1}$ als Ordinate des (imaginären) Durchschnittspunktes der Hyperbel mit der Axe der y sich ergibt, so nennt man der Analogie mit der Ellipse zufolge bei der Hyperbel die Grösse $2b$ die zweite oder imaginäre Axe, deren halbe Länge $b = OB = OB'$ zu beiden Seiten des Mittelpunktes auf dem zweiten Hauptdurchmesser aufgetragen wird.

Für $M = N' = -N$ wird $a = b$ und die Hyperbel heisst dann eine gleichseitige.

β) K negativ. Durch Aenderung sämmtlicher Zeichen geht in diesem Falle die Gl. (25) in folgende über:

$$N'y^2 - Mx^2 = K,$$

welche von derselben Form ist, wie (25) und folglich wieder eine Hyperbel bedeutet, mit dem Unterschiede, dass im jetzigen Falle die erste Axe derselben auf der Axe der y liegt.

γ) $K = 0$. Hiefür folgt aus (25): $y = \pm x\sqrt{\frac{N'}{M}}$, eine Gleichung, deren geometrischer Ort ein System zweier sich im Ursprunge schneidenden Geraden ist.

3) $N = 0$.

In diesem Falle folgt aus (I):

$$x = \pm\sqrt{\frac{K}{M}},$$

eine Gleichung, deren geometrischer Ort ein System zweier parallen Geraden ist, welche reell oder imaginär sind, je nachdem K sitiv oder negativ ist, und sich zu einer einzigen reellen Geraden reinigen, wenn $K = 0$ sich ergibt.

199. Discussion der Gleichung:

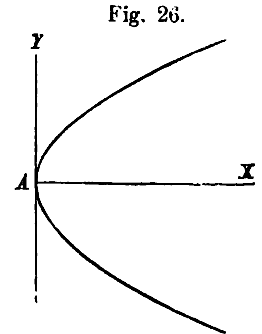
$$Ny^2 + 2Rx = 0. \tag{II}$$

Diese Gleichung bietet zu keiner Unterscheidung Veranlassung, da N immer positiv angenommen werden kann und das Zeichen des anderen Gliedes von keinem Einflusse ist; denn wäre dasselbe negativ, so dürfte man nur $-x$ mit $+x$, d. i. die beiden Halbaxen der x mit einander vertauschen, um die obige Form wieder zu erhalten. Setzt man $-\frac{2R}{N} = p$, so erhält obige Gleichung die einfache Form:

$$y^2 = px, \tag{27}$$

woraus $y = \pm\sqrt{px}$ folgt. Diese Gleichung liefert nur für solche Werthe von x, welche mit p gleiches Zeichen haben, reelle Werthe von y, daher die durch dieselbe dargestellte Curve nur auf einer Seite der y-Axe liegt. Für $x = 0$ wird $y = 0$, die Curve geht also durch den Ursprung. Für jeden mit p gleiches Zeichen habenden Werth von x folgen aus (27) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y, welche mit x bis ins Unendliche zunehmen. Die Curve (Fig. 26) besteht daher aus swei vom Ursprunge aus nach der positiven oder negativen Seite der x-Axe (je nachdem p positiv oder negativ) sich erstreckenden, gegen diese Axe symmetrisch liegenden und sich von ihr immer mehr und mehr entfernenden unendlichen Aesten, und wird Parabel genannt.

Fig. 26.



Der Punkt A, in welchem die Parabel von ihrem Hauptdurchmesser geschnitten wird, heisst der Scheitel, der Hauptdurchmesser AX die Axe, die Constante p, welche in der auf den Hauptdurchmesser als Abscissenaxe und den Scheitel als Ursprung sich beziehenden Gleichung (27) als Coefficient von x erscheint, der Parameter der Parabel.

Fasst man die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphe zusammen, so gelangt man zu dem Schlusse, dass aus einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen nur drei verschiedene krumme Linien hervorgehen: die Ellipse, Hyperbel und Parabel, welche somit die einzigen krummen Linien zweiter Ordnung sind, wobei der Kreis als specieller Fall der Ellipse mit ei geschlossen ist.

Uebrigens kann die Gleichung auch jeder geometrischen Bede tung ermangeln, sie kann einen Punkt, eine gerade Linie, zwei p rallele Gerade, oder endlich zwei sich durchschneidende gerade Lini zum geometrischen Orte haben.

Die obigen Curven heissen bekanntlich auch Kegelschnittslinien, weil sie durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen.

200. Die Beantwortung der Frage, welche von den drei Curven der Ort einer gegebenen Gleichung des 2ten Grades mit bestimmten Coefficienten sei, lässt sich auf sehr einfache Merkmale zurückführen.

Soll die Gl. (1) einer Parabel angehören, so muss $B^2 - AA' = 0$ sein, weil einerseits nur unter dieser Bedingung der Ort der Gl. (1) keinen Mittelpunkt zulässt [§. 192, *b*], anderseits die Parabel die einzige Curve 2ter Ordnung ist, welche keinen Mittelpunkt besitzt. — Ist ausserdem noch $A'C = BC'$, oder $C = C' = 0$, so bedeutet die Gl. (1) zwei parallele, oder eine einzige Gerade [§. 192, *c*], daher diese Oerter auch als Varietäten der Parabel betrachtet werden, in welche diese Curve auch geometrisch leicht übergeführt werden kann.

Soll aber Gl. (1) einer Ellipse oder Hyperbel angehören, so muss $B^2 - AA'$ von 0 verschieden sein, weil nur unter dieser Bedingung ein einziger Mittelpunkt existirt. Beide Curven unterscheiden sich dadurch, dass erstere zwei reelle Axen, letztere nur eine solche besitzt; wir wollen daher diese Axen durch die Coefficienten der Gl. (1) unmittelbar ausdrücken.

Diese Gleichung nimmt bekanntlich [§. 193], wenn wir den Ursprung in den Mittelpunkt versetzen, die Form an:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy = K,$$

wo der Werth von K mittelst der Glgn. (9) und (7) berechnet werden kann.

Verbindet man diese Gl. mit der Gleichung $y = mx$ einer durch den Ursprung (Mittelpunkt) gezogenen Geraden, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte die Ausdrücke:

$$x^2 = \frac{K}{A + A'm^2 + 2Bm}, \quad y^2 = \frac{m^2K}{A + A'm^2 + 2Bm},$$

und für deren Entfernung vom Mittelpunkte:

$$R^2 = x^2 + y^2 = \frac{K(m^2 + 1)}{A + A'm^2 + 2Bm}. \qquad (\alpha)$$

Offenbar wird nun R zu einer der Halbaxen, wenn wir die Gerade $= mx$ mit einem der Hauptdurchmesser zusammenfallen lassen, also Grösse m, von welcher die Richtung von R abhängt, so bestimmen, ss sie den Glgn. (17):

$$A'm + B = ms, \quad A + Bm = s$$

enüge leiste. Multiplicirt man aber die 1te dieser Gleichungen mit m,

und addirt sie zur zweiten, so erhält man:

$$A + A'm^2 + 2Bm = s(m^2 + 1),$$

womit aus (α)

$$R = \sqrt{\frac{K}{s}} \qquad (28)$$

folgt. Diese Gleichung liefert sofort die Werthe der zwei Halbaxen, wenn man die aus (17) durch Elimination von m sich ergebenden zwei Werthe der Hilfsgrösse s:

$$s = \frac{1}{2}(A + A') \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2}$$

substituirt; und zwar, wie man sieht, in reeller oder imaginärer Form, je nachdem der Quotient $K : s$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt nun sogleich, dass für die Ellipse beide Werthe von s mit gleichen, für die Hyperbel mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sein müssen; da ferner der dem oberen Zeichen entsprechende Werth von s nothwendig positiv ist, so muss für die Ellipse:

$$\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2} < A + A', \quad \text{d. i.} \quad B^2 - AA' < 0$$

oder negativ, für die Hyperbel aber $B^2 - AA' > 0$ oder positiv sein.

Die Ellipse wird übrigens imaginär, wenn K negativ ist, weil dann beide Werthe von R imaginär ausfallen; sie degenerirt in einen Kreis, wenn beide Werthe von s gleich, also $A = A'$ und $B = 0$ ist; endlich in einen Punkt, wenn $K = 0$. Kreis und Punkt sind daher Varietäten der Ellipse.

Ist $B^2 - AA' > 0$, so ist, K mag positiv oder negativ sein, der Ort der Gl. (1) eine Hyperbel, welche jedoch für $K = 0$ in ein System zweier sich schneidenden Geraden übergeht.

Wir werden das Binom $B^2 - AA'$ das charakteristische Binom einer Gleichung des 2ten Grades nennen.

201. Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel nehmen eine bemerkenswerthe Form an, wenn man dieselben auf einen Scheitel als Ursprung bezieht, und den durch diesen Scheitel gehenden Durchmesser als Abscissenaxe annimmt, wie dies bei der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$, der Fall ist.

Für die Ellipse hatten wir als Mittelpunktsgleichung:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

legen wir nun den Ursprung in den linken Scheitel A' (Fig. [illegible] S. 338), so haben wir in dieser Gleichung, $x - a$ statt x zu setzen und erhalten dadurch als Scheitelgleichung der Ellipse:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \tag{29}$$

Für die **Hyperbel** versetzen wir den Ursprung in den rechten Scheitel A (Fig. 25, S. 340), zu welchem Zwecke wir in der Mittelpunktsgleichung derselben: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, $x + a$ an die Stelle von x treten lassen, und finden als **Scheitelgleichung der Hyperbel**:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2. \tag{30}$$

Setzt man $\frac{2b^2}{a} = p$, so nehmen beide Gleichungen die Form an:

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a} x^2, \tag{31}$$

wo das obere Zeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel entspricht.

Lässt man in dieser Gleichung, während p unverändert bleibt, a unendlich gross werden (wodurch, wegen $b = \sqrt{\frac{1}{2} ap}$, auch b unendlich zunimmt), so verwandelt sich dieselbe in $y^2 = px$, d. i. in die Scheitelgleichung der Parabel, woraus folgt, dass **die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden kann, deren grosse, beziehungsweise reelle Axe unendlich gross geworden ist.**

Wird noch $\mp \frac{b^2}{a^2} = \mp \frac{p}{2a} = q$ gesetzt, so sieht man, dass alle drei Curven durch eine und dieselbe Gleichung:

$$y^2 = px + qx^2 \tag{32}$$

dargestellt werden, und dass diese Gleichung einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel angehört, je nachdem $q = 0$, negativ oder positiv ist.

Die Grösse $p = \frac{2b^2}{a}$ führt auch in der Ellipse und Hyperbel, der Analogie mit der Parabel gemäss, den Namen **Parameter**; er ist die dritte geometsische Proportionale zu $2a$ und $2b$, da:

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \cdot 2b}{2a}.$$

Endlich zieht man aus der Gl. (31) der Ellipse und Hyperbel noch n Schluss, dass diese beiden Curven in der Nähe ihres Scheitels mit ıer Parabel von gleichem Parameter p um so mehr zusammenfallen, grösser a ist, d. i. je gestreckter sie sind, indem für kleine Werthe n x das Glied $\frac{px^2}{2a}$ gegen px um so unmerklicher wird, je grösser a ist.

202. Eine krumme Linie der zweiten Ordnung kann bekanntlich von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden. Hieraus folgt, dass man sich eine solche Curve durch den Durchschnitt einer beweglichen Geraden mit einem Kreise entstanden denken kann, dessen Halbmesser sich stetig ändert. Versuchen wir, auf Grund dieser Erzeugungsart der Linien zweiter Ordnung, diese analytisch auszudrücken.

Denken wir uns zu diesem Zwecke die Curve (1) construirt, und aus einem beliebigen Punkte α, β als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser R,

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=R^2 \tag{m}$$

beschrieben; dieser wird die Curve im allgemeinen in vier Punkten schneiden, von welchen jedoch nur jene zwei in Betracht kommen, durch welche wir die schneidende Gerade

$$y=ax+c \tag{n}$$

legen. Es ist klar, dass jedem mit einem bestimmten Halbmesser beschriebenen Kreise eine bestimmte Lage der beweglichen Geraden entspricht, woraus folgt, dass a und c Funktionen dieses Halbmessers R sein müssen.

Da die Coordinaten α, β des Kreismittelpunktes willkürlich sind, so wollen wir die Lage dieses Punktes so annehmen (dass dies möglich, wird aus dem Folgenden von selbst hervorgehen), dass die bewegliche Gerade immer zu sich selbst parallel bleibe, wodurch einerseits der Punkt α, β eine gegen die Curve vollkommen bestimmte Lage erhält, anderseits in der Gl. der Geraden (n) blos c veränderlich und von R abhängig wird. Setzen wir also $c=\psi(R)$, so wird die Gleichung der Geraden: $y=ax+\psi(R)$, und wenn wir aus dieser Gleichung und jener (m) des Kreises R eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung $y-ax=\psi(\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2})$ oder:

$$\varphi(y-ax)=\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2} \tag{p}$$

zwischen x und y, welche offenbar den Durchschnittspunkten aller aus α, β beschriebenen Kreise mit der beweglichen Geraden angehört.

Zur Kenntniss der Form der Funktion φ führt die Bedingung, dass der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte eine Linie der 2ten Ordnung, folglich die Gl. (p) algebraisch vom 2ten Grade sein muss, woraus folgt, dass φ nur eine algebraische lineare Funktion von $y-ax$ sein kann, und somit die Form:

$$\varphi(y-ax)=m(y-ax)+n$$

haben muss, wo m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten. Führen wir statt derselben zwei andere Constanten b, k ein, welche mit m und n durch die Gleichungen:

$$m = \frac{k}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad n = - mb$$

verbunden sind, so verwandelt sich (p) in:

$$k \cdot \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2}. \tag{33}$$

Dies ist eine Gleichung vom 2[ten] Grade mit 5 willkürlichen Constanten, folglich die allgemeinste Gleichung des 2[ten] Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen; denn auch die Gl. (1) enthält nur fünf willkürliche Constanten, wie sogleich erhellt, wenn man die ganze Gleichung durch einen der Coefficienten, etwa durch F, dividirt.

Hieraus geht nun einerseits hervor, dass sämmtliche Linien der zweiten Ordnung auf die angenommene Weise wirklich erzeugt werden können; anderseits spricht sich durch die Form der Gl. (33) eine merkwürdige Eigenschaft dieser Linien aus. Setzt man nämlich:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = d, \quad \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2} = r,$$

so folgt aus (33):

$$kd = r, \quad \text{d. i.} \quad r : d = k : 1;$$

nun ist r die Entfernung des Punktes x, y der Curve vom festen Punkte α, β; d der senkrechte Abstand desselben Punktes x, y der Curve von einer festen Geraden, deren Gleichung $y = ax + b$; es folgt demnach aus obiger Proportion der Satz:

Die Linien der zweiten Ordnung haben die Eigenschaft, dass die Enfernungen eines jeden Punktes derselben von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem constanten Verhältnisse $k : 1$ stehen.

Man nennt die feste Gerade Richtlinie (Directrix), den festen Punkt den Brennpunkt der Curve; die Entfernung r eines beliebigen Punktes M der Curve vom Brennpunkte heisst der Radiusvektor oder Leitstrahl dieses Punktes.

Entwickelt man die Gl. (33) und bringt sie auf die Form der Gl. (1), so findet man das charakteristische Binom:

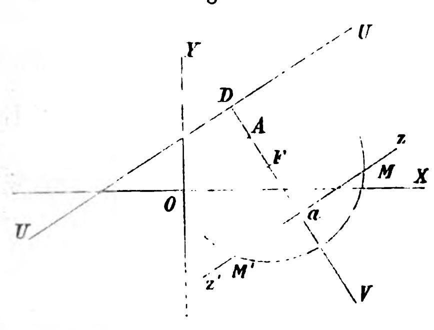
$$B^2 - AA' = (k^2 - 1)(a^2 + 1)^2,$$

ein Ausdruck, dessen Zeichen bloss von jenem des Faktors $k^2 - 1$ abhängt; hieraus folgt, dass die Gl. (33) einer Ellipse, Hyperbel

oder **Parabel** angehört, je nachdem die Verhältnisszahl $k < 1$, > 1 oder $= 1$ ist.

Die Gl. (33) gestattet eine sehr einfache Construction. Sind (Fig. 27) OX, OY die Coordinatenaxen, so construire man zunächst die Richtlinie UU' ($y = ax + b$) und den Brennpunkt F, (α, β). Durch F ziehe man DV senkrecht auf UU', theile den Abstand DF des Brennpunktes von der Richtlinie im Punkte A so, dass $AF : AD = k : 1$, so ist A ein Punkt der Curve. Um noch andere Punkte zu erhalten, ziehe man durch einen beliebigen Punkt a der DV die Gerade zz' senkrecht auf DV, suche zu 1, k und $Da = d$ die 4[te] geom. Proportionale $= r$ und beschreibe aus F mit r als Halbmesser einen Kreis, welcher die zz' in zwei Punkten M, M' der Curve schneidet.

Fig 27.



Aus der Symmetrie der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt folgt übrigens, dass diese Curven zwei Richtlinien und zwei Brennpunkte besitzen, welche zu beiden Seiten des Mittelpunktes symmetrisch liegen.

203. Die Gl. (33) wird einfacher, wenn man eine Richtlinie UU' zur Ordinatenaxe und die durch den Brennpunkt senkrecht darauf gezogene Gerade DV zur Abscissenaxe nimmt, wodurch offenbar $b = \beta = 0$ und $a = \infty$ wird; hiedurch verwandelt sich (33), wenn man sogleich quadrirt, in folgende:

$$k^2x^2 = y^2 + (x - \alpha)^2, \tag{34}$$

wo α der Abstand des Brennpunktes von der Richtlinie.

Man kann diese Gleichung dazu benützen, um über die Lage der Richtlinien und Brennpunkte Aufschluss zu erhalten. Da nämlich in (34) die 1[te] Potenz von y fehlt, so ist die Abscissenaxe ein Hauptdurchmesser; die Richtlinien stehen demnach senkrecht auf einem Hauptdurchmesser der Curve, in welchem z gleich die Brennpunkte liegen. Dieser Hauptdurchmesser in der Parabel selbstverständlich die Axe derselben; in der I perbel aber deren erste Axe, weil derselbe von der Curve zwei Punkten, den Scheiteln, geschnitten wird, für welche man a (34), $y = 0$ setzend, die reellen Abscissenwerthe:

$$x_1 = \frac{\alpha}{1+k} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\alpha}{1-k}$$

findet. Was die Ellipse betrifft, so ist $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{\alpha k}{1-k^2}$ die Länge der einen Halbaxe, welche auf dem die Brennpunkte enthaltenden Hauptdurchmesser liegt; ferner ist $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{\alpha}{1-k^2}$ die Abscisse des Mittelpunktes, welche statt x in (34) substituirt, für die andere Halbaxe den Werth $\frac{\alpha k}{\sqrt{1-k^2}}$ darbietet; dieser ist aber, weil $1-k^2 < 1$, offenbar $< \frac{\alpha k}{1-k^2}$. Die Brennpunkte liegen daher auf der grossen Axe der Ellipse.

Für $x = 0$, folgt aus (34): $y = \sqrt{-\alpha}$, zum Beweise, dass die Richtlinien von der Curve nicht geschnitten werden; sie liegen also bei der Ellipse ausserhalb derselben, bei der Hyperbel zwischen den Scheiteln und zwar je eine Richtlinie mit dem zugehörigen Brennpunkte auf jeder Seite des Mittelpunktes.

204. Verlegen wir den Ursprung in den einen Scheitel A und setzen zu diesem Zwecke in (34) $x + x_1 = x + \frac{\alpha}{1+k}$ statt x, so erhalten wir als Scheitelgleichung der Curven 2ter Ordnung:

$$y^2 = 2\alpha k x + (k^2 - 1)\, x^2, \tag{35}$$

welche genau dieselbe Form hat, wie die Gleichungen (29) bis (32) [§. 201], und sich, wie wir im vor. §. gesehen haben, auf dasselbe Coordinatensystem bezieht. Diese Gleichungen sind daher unmittelbar mit einander vergleichbar und man hat:

$$\alpha k = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}, \quad 1 - k^2 = \pm \frac{b^2}{a^2},$$

wo p der Parameter ist, und das obere Zeichen (so wie im folgenden immer) auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel sich bezieht. Hieraus findet man:

für die Ellipse, Kürze halber $\sqrt{a^2 - b^2} = e$ setzend:

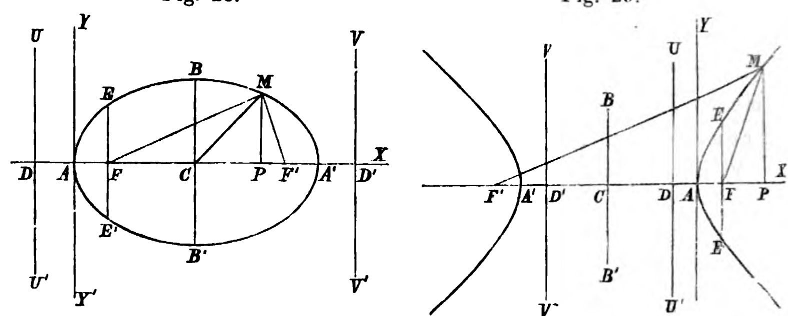
$$\alpha = \frac{b^2}{e}, \quad k = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad a = \frac{\alpha k}{1-k^2}, \quad b = \frac{\alpha k}{\sqrt{1-k^2}};$$

für die Hyperbel, Kürze halber $\sqrt{a^2 + b^2} = e$ setzend:

$$\alpha = \frac{b^2}{e}, \quad k = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad a = \frac{\alpha k}{k^2 - 1}, \quad b = \frac{\alpha k}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

1) Sowohl für die Ellipse als Hyperbel (Fig. 28 und 29) hat man $AF = k \,.\, AD = k(a - AF)$, somit $AF = \frac{ak}{1+k}$. Setzt man diesen Werth für x in (35), so kommt $y = ak = \frac{p}{2}$; die bei beiden Curven

Fig. 28. Fig. 29.



unter dem Namen **Parameter** eingeführte Grösse $p = \frac{2b^2}{a}$ ist daher der im **Brennpunkte errichteten Doppelordinate** EE' gleich.

2) Man hat ferner $CF = AC \mp AF = a \mp AF$; aber $AF = \frac{ak}{1+k} = \frac{b^2}{a+e} = \pm \frac{(a^2 - e^2)}{a+e} = \pm (a - e)$, somit $CF = e$. Die oben eingeführte Grösse $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$ ist daher die **Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte** und heisst **Excentricität**. Sie ist, wie man sieht, in der Ellipse immer kleiner, in der Hyperbel grösser als a, die halbe grosse oder beziehungsweise erste Axe. In Folge der Relation $e^2 = a^2 \mp b^2$ bilden die beiden Halbaxen und die Excentricität ein rechtwinkeliges Dreieck, so dass jede dieser Grössen leicht construirt werden kann, wenn die beiden anderen gegeben sind.

3) Es ist $CD = CF \pm DF = e \pm a = e \pm \frac{b^2}{e} = \frac{a^2}{e}$; der Abstand der Richtlinie vom Centrum ist daher in beiden Curven die 3te geometrische Proportionale zu e und a.

4) Sei M ein beliebiger Punkt der Ellipse oder Hyperbel, $CP = x$ dessen Abscisse, vom Mittelpunkte C aus gezählt, $FM = r$, $F'M =$ seine Radienvektoren, so ist $FM = k \,.\, PD$, $F'M = k \,.\, PD'$; d. i.:

$$r = k(x \pm CD), \quad r' = k(CD \mp x).$$

Setzt man für k und CD die Werthe $\frac{e}{a}$ und $\frac{a^2}{e}$, so kommt:

für die Ellipse: $r = a + \frac{e}{a}x, \quad r' = a - \frac{e}{a}x;$ (36)

für die Hyperbel: $r = \frac{e}{a}x - a, \quad r' = \frac{e}{a}x + a;$ (37)

Gleichungen, durch welche die Leitstrahlen eines Punktes der Curve durch die vom Mittelpunkte gezählte Abscisse desselben rational ausgedrückt werden.

5) Durch Addition der Glgn. (36) folgt $r + r' = 2a$; d. h. die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist constant und der grossen Axe gleich.

Vermöge dieser Haupteigenschaft ist daher die Ellipse der geometrische Ort der Scheitelpunkte sämmtlicher Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundlinie $= 2e$ so construirt werden, dass die Summe der beiden anderen Seiten eine constante Grösse $= 2a$ ist.

6) Durch Subtraktion der Glgn. (37) erhält man $r' - r = 2a$; d. h. die Differenz der Leitstrahlen eines beliebigen Punktes der Hyperbel ist constant und der ersten Axe gleich.

In Folge dieser Grundeigenschaft ist daher die Hyperbel der geometrische Ort der Scheitelpunkte sämmtlicher Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundlinie $= 2e$ so construirt werden, dass die Differenz der beiden anderen Seiten eine constante Grösse $= 2a$ ist.

Es ist sehr leicht, aus diesen beiden Haupteigenschaften die Gleichungen der beiden Curven abzuleiten.

7) Die Grösse $k = \frac{e}{a}$ ist, wie man sieht, nichts anderes, als das Verhältniss der Excentricität e zur halben grossen oder ersten Axe, und der Ausdruck der Excentricität selbst, wenn $a = 1$ angenommen wird; sie mag die numerische Excentricität heissen, im Gegensatze zur linearen e. Es ist $b^2 = \pm (a^2 - e^2) = \pm a^2(1 - k^2)$; führt man diesen Werth von b^2 in die Mittelpunktsgleichungen (24) und (26) der Ellipse und Hyperbel ein, in die erstere mit dem oberen, in die letztere mit dem unteren Zeichen, so kommt:

$$y^2 = (1 - k^2)(a^2 - x^2) \tag{38}$$

Mittelpunktsgleichung der Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $k < 1$ oder > 1 ist.

8) Für die Parabel folgt aus (35) wegen $k = 1$, die Gl. $y^2 = 2ax$, welche mit Gl. (32), wo $q = 0$ zu setzen ist, verglichen, die Relation

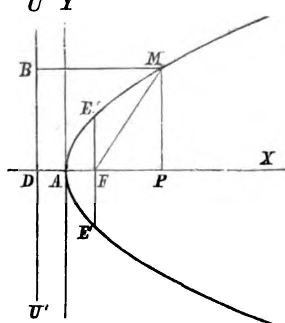
$p = 2\alpha$ darbietet. Der Parameter p der Parabel ist daher gleich dem doppelten Abstande des Brennpunktes von der Richtlinie, oder auch gleich dem vierfachen Abstande des Brennpunktes vom Scheitel, weil, wegen $k = 1$, $AF = AD = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}p$ ist. (Fig. 30.)

Setzt man in $y^2 = 2\alpha x$, $x = AF = \frac{1}{2}\alpha$, so kommt:

$$y = \pm \tfrac{1}{2}p,$$

woraus folgt, dass auch in der Parabel der Parameter gleich ist der im Brennpunkte errichteten Doppelordinate EE'.

Fig. 30.



Endlich hat man für den Leitstrahl $FM = r$ irgend eines Punktes M der Parabel:

$$FM = PD = AD + AP, \text{ d. i.}$$

$$r = \tfrac{1}{4}p + x. \tag{39}$$

Die Parabel ist der geometrische Ort sämmtlicher Punkte, welche von einer festen Geraden, der Richtlinie, und einem festen Punkte, dem Brennpunkte, gleich weit entfernt sind, mittelst welcher Eigenschaft sich die Gleichung der Curve sehr leicht ableiten lässt.

FÜNFTES KAPITEL.

ÜBER EINIGE DER VORZÜGLICHSTEN EIGENSCHAFTEN DER LINIEN ZWEITER ORDNUNG.

I. Die Ellipse.

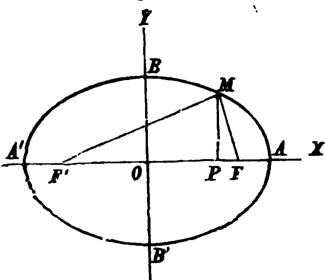
205. Zur Entwickelung der Eigenschaften dieser Curve wer[illegible] wir uns im Folgenden ihrer Mittelpunktsgleichung:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

bedienen, wo a und b die halbe grosse und kleine Axe bedeuten, [illegible] auf ersterer die Abscissen gezählt sind.

Bezeichnet man die lineare Excentricität, d. i. den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte, $OF = OF'$ (Fig. 31), mit e, das Verhältniss derselben zur grossen Axe, die numerische Excentricität mit ε, so ist bekanntlich:

Fig. 31.



$$e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

und man hat für die Leitstrahlen $FM = r$, $F'M = r'$ eines Ellipsenpunktes M, dessen Abscisse $OP = x$, die Ausdrücke:

$$r = a - \frac{e}{a}x, \quad r' = a + \frac{e}{a}x,$$

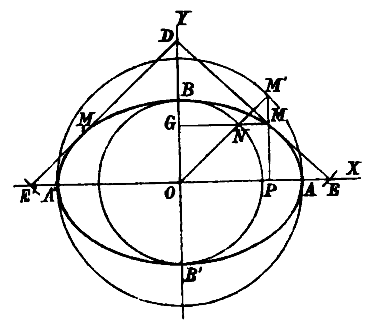
deren Summe $= 2a$ d. i. der grossen Axe gleich ist. Auf diese Eigenschaft gründet sich das bekannte Verfahren, die Ellipse durch Punkte zu beschreiben.

Schreibt man die Gl. (1) in der Form $a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$, oder:

$$\frac{y^2}{(a - x)(a + x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

und beachtet, dass $a - x = AP$ und $a + x = A'P$ die Segmente sind, in welche die grosse Axe durch die Ordinate y getheilt wird, so spricht selbe den Satz aus: das Quadrat der Ordinate eines Punktes der Ellipse steht zu dem Rechtecke aus den Abständen des Fusspunktes derselben von den Endpunkten der grossen Axe in einem constanten Verhältnisse $= b^2 : a^2$.

Fig. 32.



Von den beiden Kreisen, welche über der grossen und kleinen Axe der Ellipse als Durchmessern beschrieben werden können, wollen wir den ersteren den umschriebenen, letzteren den eingeschriebenen Kreis nennen. Sind (Fig. 32) $y = MP$, $y' = M'P$ die zu einer beliebigen Abscisse $OP = x$ gehörigen Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises, so ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$, somit $y : y' = b : a$; d. h. die zu derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und

des umschriebenen Kreises stehen in dem constanten Verhältnisse $= b : a$.

Eben so findet man, dass die zu gleichen Ordinaten gehörigen Abscissen der Ellipse und des eingeschriebenen Kreises in dem constanten Verhältnisse $a : b$ stehen.

Hieraus folgt, dass man Punkte der Ellipse erhält, wenn man die Ordinaten des umschriebenen Kreises in dem Verhältnisse $a : b$ verkürzt, oder die Abscissen des eingeschriebenen in dem Verhältnisse $b : a$ verlängert, worauf sich folgende Construction der Ellipse gründet. Zieht man zu einem beliebigen Punkte M' des umschriebenen Kreises den Halbmesser OM', welcher den eingeschriebenen Kreis im Punkte N schneidet, und durch diesen Punkt eine Parallele zur grossen Axe, so schneidet diese die Ordinate des Punktes M' in einem Punkte M der Ellipse.

206. Aufgabe. Eine gerade Linie DE (Fig. 32) von gegebener Länge bewege sich so, dass ihre Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels XOY fortrücken; man suche die Gl. der Curve, welche ein fester Punkt M der Geraden beschreibt.

Nimmt man die Schenkel des rechten Winkels als Axen der x und y, setzt die constanten Entfernungen $DM = a$, $EM = b$, ferner $OP = MG = x$, $MP = y$, so ist für jede Lage der Geraden DE:

$MP^2 : ME^2 = GD^2 : DM^2$, d. i. $y^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : a^2$, somit:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Der Punkt M beschreibt daher eine Ellipse, deren Halbaxen a und b sind. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass auch von irgend einem Punkte in der Verlängerung der DE eine Ellipse beschrieben wird.

Hierauf gründet sich folgendes Verfahren, die Ellipse durch Punkte zu construiren. Aus einem, in einer der beiden Axen, z. B. BB' gewählten Punkte D beschreibe man mit einem Halbmesser $DE = a + b$ einen Kreis, welcher die andere Axe in zwei Punkten E, E' schneidet; zieht man DE und DE', und macht $DM = DM_1 = a$, so sind M, M_1 Punkte der Ellipse.

Auch ist hiedurch ein Mittel geboten, die Ellipse durch ei[n] stetigen Zug zu beschreiben. Lassen wir ein Lineal sich so beweg[en], dass zwei feste Punkte D und E desselben auf den Schenkeln ei[nes] rechten Winkels fortgleiten, so beschreibt irgend ein in der DE li[e]gender fester Punkt des Lineals, in welchem ein schreibender Stift a[n]gebracht ist, eine Ellipse (Ellipsograph).

VON DER TANGENTE AN DER ELLIPSE.

207. Verbinden wir die Gleichung einer Geraden:

$$y = mx + n \tag{1}$$

mit der Gl. der Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, so erhalten wir durch Elimination von y die Gleichung:

$$(a^2m^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

aus welcher für die Abscissen der Durchschnittspunkte die Werthe:

$$x = \frac{-a\,(amn \pm b\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2})}{a^2m^2 + b^2}$$

folgen. Die Ellipse wird daher von der Geraden in zwei Punkten oder gar nicht geschnitten, je nachdem $a^2m^2 + b^2 - n^2 >$ oder < 0 ist. Die Sekante wird zur Tangente, wenn die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen, wozu erfordert wird, dass in obigem Ausdrucke von x das Radikal verschwinde.

Es ist demnach:

$$a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0 \tag{2}$$

die Bedingungsgleichung für die Berührung der Geraden (1) und der Ellipse. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir als Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}.$$

Bestimmt man aber aus diesen Gleichungen m und n, so erhält man

$$m = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}, \quad n = \frac{b^2}{\eta},$$

als diejenigen Werthe, welche die Constanten m und n haben müssen, damit die Gerade (1) die Ellipse in einem gegebenen Punkte ξ, η berühre. Durch Substitution dieser Werthe in (1) erhält man:

$$y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}\,x + \frac{b^2}{\eta},$$

oder, wenn man von dieser Gleichung jene: $\eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}\,\xi + \frac{b^2}{\eta}$ abzieht, welche ausdrückt, dass ξ, η ein Punkt der Ellipse ist:

$$y - \eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}\,(x - \xi) \tag{3}$$

als **Gleichung der Tangente** an der Ellipse im Punkte ξ, η. Verbindet man diese Gleichung (nach Wegschaffung des Nenners $a^2\eta$) mit

der Gleichung $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2$, welche ausdrückt, dass ξ, η ein Punkt der Ellipse ist, so erhält man:

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2, \tag{4}$$

eine mehr symmetrische Form der Gleichung der Tangente, welche sich von der Gl. der Ellipse nur dadurch unterscheidet, dass die Quadrate x^2 und y^2 durch die Rechtecke ξx und ηy ersetzt sind. Der Winkel τ, welchen die Tangente am Punkte ξ, η mit der Abscissenaxe einschliesst, bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \tag{5}$$

Die im Berührungspunkte M senkrecht auf die Tangente errichtete Gerade heisst **Normale** der Curve im Punkte M. Mit Rücksicht auf (3) wird die **Gleichung der Normale** der Ellipse im Punkte ξ, η:

$$y - \eta = \frac{a^2\eta}{b^2\xi}(x - \xi). \tag{6}$$

208. Es seien (Fig. 33) MT und MN die Tangente und Normale am Punkte $M(\xi, \eta)$; die Stücke PT und PN der Abscissenaxe, welche zwischen dem Fusspunkte der Ordinate des Berührungspunktes und ihren Durchschnittspunkten mit der Tangente und Normale liegen, werden **Subtangente** und **Subnormale** genannt. Die Stücke MT und MN der Tangente und Normale zwischen dem Berührungspunkte und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Axe der x, pflegt man im engeren Sinne **Tangente** und **Normale** zu nennen.

Fig. 33.

Um Ausdrücke für die Längen dieser 4 Stücke zu erhalten, setzen wir in den Glgn. (3) und (6) der Tangente und Normale [§. 207] $y = 0$, wodurch x die Abscisse beziehungsweise der Punkte T und N wird, und erhalten, da $\xi = OP$:

$$x - \xi = PT = \text{Subtangente} = \frac{a^2\eta^2}{b^2\xi} = \frac{a^2 - \xi^2}{\xi},$$

$$x - \xi = PN = \text{Subnormale} = -\frac{b^2\xi}{a^2},$$

wo die entgegengesetzten Zeichen dieser Ausdrücke daher rühren, dass die Subtangente und Subnormale immer auf entgegengesetzten Seiten

der Ordinate liegen, von welcher aus sie gezählt werden. Mit Hilfe dieser Ausdrücke findet man ferner aus den rechtwinkeligen Dreiecken *MPT* und *MPN*:

$$MT = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2\xi}\sqrt{b^4\xi^2 + a^4\eta^2} = \frac{a\eta}{b\xi}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2\xi^2},$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4\xi^2 + a^4\eta^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2\xi^2}.$$

Aus der Bemerkung, dass der Ausdruck der Subtangente von b und η unabhängig ist und somit für einerlei ξ denselben Werth erhält in allen über derselben grossen Axe beschriebenen Ellipsen, folgt eine einfache Construction der Tangente. Man beschreibe über der grossen Axe einen Kreis, verlängere die Ordinate des Berührungspunktes M bis zum Durchschnitte M' mit dem Kreise, und ziehe an diesen in M' eine Tangente; der Durchschnittspunkt T derselben mit der Abscissenaxe, mit dem Punkte M verbunden, gibt die Tangente an der Ellipse im Punkte M.

Während die Subtangente, wie aus ihrem Ausdrucke leicht erhellt, aller Werthe von 0 bis $\pm\infty$ fähig ist, findet dies bei der Subnormale nicht Statt; ihr Ausdruck wird Null für $\xi = 0$, weil in diesem Falle die Normale mit der kleinen Axe, die Punkte P und N somit im Mittelpunkte zusammenfallen; mit zunehmendem ξ wird die Subnormale immer grösser, erreicht aber für $\xi = a$ ihren grössten Werth $\frac{b^2}{a} =$ $\frac{1}{2}p =$ dem halben Parameter, als Grenze, welche sie nicht überschreitet.

209. Es sei nun ausserhalb der Ellipse ein Punkt $K(x', y')$, (Fig. 34, S. 358) gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Tangente an die Ellipse gezogen werden. — Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes mit ξ, η, so ist:

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2$$

die Gleichung der Tangente, und wir erhalten zur Bestimmung von ξ, η die beiden Bedingungsgleichungen:

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$a^2\eta y' + b^2\xi x' = a^2b^2, \tag{2}$$

von welchen die erste ausdrückt, dass der Punkt ξ, η in der Ellipse liegen, die zweite, dass x', y' ein Punkt der Tangente sein soll. Aus beiden folgt durch successive Elimination:

$$\xi = \frac{a^2(b^2x' \pm y'\sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2}, \quad \eta = \frac{b^2(a^2y' \mp x'\sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2},$$

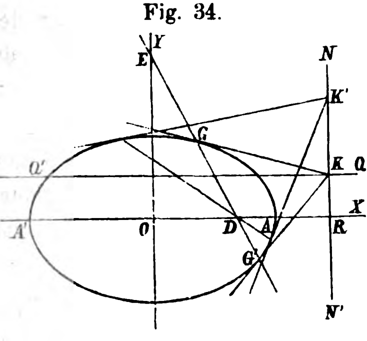
wo Kürze halber $N = a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2$ gesetzt ist, und die oberen

und unteren Zeichen zusammengehören. Vorausgesetzt, dass N positiv ist, d. h. dass der Punkt x', y' **ausserhalb** der Ellipse liegt, können somit, der doppelten Zeichen wegen, durch den genannten Punkt zwei Tangenten an die Ellipse gezogen werden. Für den Neigungswinkel τ derselben gegen die Abscissenaxe findet man:

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta} = -\frac{x'y' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}.$$

Für $N = 0$ reduciren sich obige Werthe ξ und η auf $\xi = x'$, $\eta = y'$, wie es sein muss, weil in diesem Falle der gegebene Punkt x', y' in der Ellipse liegt, und somit selbst zum Berührungspunkte wird.

Fig. 34.



Zur Construction der Tangente bedient man sich am einfachsten der geometrischen Oerter der Glgn. (1) und (2), deren Durchschnittspunkte ja eben die Berührungspunkte sind.

Nun ist der geometrische Ort der Gl. (1) die gegebene Ellipse selbst; jener der Gl. (2) eine gerade Linie, deren Durchschnittspunkte D und E mit den beiden Axen leicht zu construiren sind, da aus (2):

$$\text{für} \quad \eta = 0 : \xi = OD = \frac{a^2}{x'}, \quad \text{für} \quad \xi = 0 : \eta = OE = \frac{b^2}{y'}$$

folgt; zieht man sodann durch die Punkte D und E eine Gerade, so schneidet diese die Ellipse in den gesuchten Berührungspunkten G, G'.

Die Gerade GG', welche durch die beiden Berührungspunkte G und G' geht, heisst **Berührungssehne**. Aus dem Umstande, dass der Werth von OD von der Ordinate $RK = y'$ des Punktes K unabhängig ist, folgt der Satz:

Wenn man von beliebigen Punkten K, K' etc. einer auf die Richtung der grossen Axe senkrechten Geraden NN' Tangenten an die Ellipse zieht, so schneiden sich sämmtliche Berührungssehnen in einem und demselben Punkte D der grossen Axe.

Der Punkt D und die Gerade NN' heissen (so wie beim Kreise) mit Beziehung auf einander **Pol** und **Polare**.

Auf dieselbe Weise folgt aus dem Ausdrucke von OE, dass der Punkt E der Pol ist in Bezug auf die durch den Punkt K senkrecht auf die kleine Axe gezogene Gerade QQ' als Polare. Wie obiger Satz

umgekehrt werden kann, ist von selbst einleuchtend; zu einer Verallgemeinerung desselben werden wir später [§. 219] gelangen.

210. Zieht man (Fig. 33. S. 356) den Halbmesser OM des Berührungspunktes $M(\xi, \eta)$, so ist, wenn sein Neigungswinkel gegen die Axe der x mit ψ bezeichnet wird, $\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{\xi}$, welche Gleichung mit Gl. (5) [§. 207] verglichen:

$$\operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\tau = -\frac{b^2}{a^2}$$

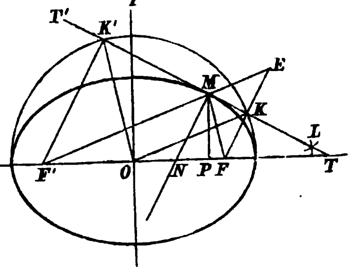
gibt, woraus folgt, dass das Produkt $\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\tau$ eine constante Grösse ist. — Ist $\lambda = OMT$ der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Berührungspunktes die Tangente schneidet, so hat man, wegen $\lambda = \tau - \psi$:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\tau} = -\frac{a^2 b^2}{\eta\xi(a^2 - b^2)} = -\frac{a^2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 . \eta\xi}.$$

Wie man sieht, wird $\operatorname{tg}\lambda = \infty$, d. i. $\lambda = 90^0$ nur in dem Falle, wenn entweder ξ oder η Null ist; die Endpunkte der Axen sind daher die einzigen Punkte, in welchen die Tangente auf dem zugehörigen Halbmesser senkrecht steht.

211. Es seien an einen Punkt M der Ellipse (Fig. 35) die Tangente, Normale und die beiden Leitstrahlen gezogen. Für die Abscisse ON des Durchschnittspunktes N der Normale mit der Axe der x findet man, in der Gleichung derselben, [(6), §. 207] $y = 0$ setzend:

Fig. 35.



$$x = ON = \frac{e^2}{a^2}\xi.$$

Lässt man in diesem Ausdrucke ξ von 0 bis a zunehmen, so wächst $x = ON$ von 0 bis $\frac{e^2}{a} < e$, woraus erhellt, dass die grosse Axe von der Normale immer zwischen den Brennpunkten geschnitten wird. Nun ist:

$$FN = OF - ON = e - \frac{e^2}{a^2}\xi = \frac{e}{a}\left(a - \frac{e}{a}\xi\right) = \frac{er}{a},$$

$$F'N = OF' + ON = e + \frac{e^2}{a^2}\xi = \frac{e}{a}\left(a + \frac{e}{a}\xi\right) = \frac{er'}{a},$$

folglich: $FN : F'N = r : r' = FM : F'M$;

bringt man diese Proportion in Verbindung mit dem $\triangle\ FMF'$, so folgt daraus nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie, dass der

von den beiden Leitstrahlen eines Punktes gebildete Winkel durch die Normale dieses Punktes halbirt wird.

Hieraus ergeben sich sogleich noch folgende Sätze:

1) die Tangente bildet mit den beiden Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

2) Die Tangente halbirt den von einem Leitstrahle z. B. FM und der Verlängerung des anderen gebildeten Winkel FME.

3) Verlängert man einen Radiusvektor, z. B. $F'M$, und macht die Verlängerung $ME = FM =$ dem anderen Leitstrahle, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck EMF, dessen Grundlinie EF durch die Tangente im Punkte K senkrecht geschnitten und halbirt wird.

4) Verbindet man den Punkt K mit dem Mittelpunkte O, so ist, weil die KO die EF und FF' in den Punkten K und O halbirt, KO parallel zu $F'E$; somit $KO : EF' = OF : FF'$, d. i. wegen $FE = F'M + ME = 2a$, $KO = a$; ebenso beweist man, dass $K'O = a$, wenn FK' senkrecht auf die Tangente gezogen wird. Daraus folgt, dass die Entfernung der Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel vom Mittelpunkte constant und der halben grossen Axe gleich ist, oder mit anderen Worten: der geometrische Ort der Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Perpendikel ist der umschriebene Kreis.

5) Setzt man $\angle FTK = \tau'$, so ist $FK = FT . \sin \tau'$, und $F'K' = F'T . \sin \tau' = (2e + FT) \sin \tau'$. Nun folgt aus der Gl. der Tangente für $y = 0 : OT = \frac{a^2}{\xi}$, folglich $FT = \frac{a^2}{\xi} - e$ und $F'T = \frac{a^2}{\xi} + e$; ferner ist, wegen $\operatorname{tg} \tau' = \operatorname{tg}(180^0 - \tau) = - \operatorname{tg} \tau$:

$$\sin \tau' = \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \tau'^2}} = \frac{b^2 \xi}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, \text{ somit:}$$

$$FK = \frac{b^2 (a^2 - e\xi)}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, \quad F'K' = \frac{b^2 (a^2 + e\xi)}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, \text{ folglich:}$$

$$FK . F'K' = \frac{b^4 (a^4 - e^2 \xi^2)}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2} = \frac{b^4 \{a^4 - (a^2 - b^2) \xi^2\}}{b^2 \{a^4 - (a^2 - b^2) \xi^2\}} = b^2;$$

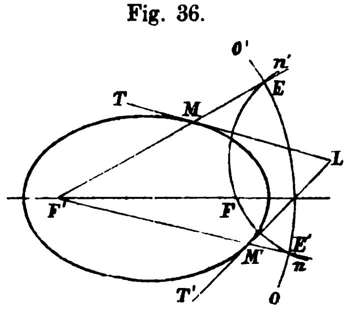
d. h. das Produkt der aus den beiden Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel ist constant und dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich.

Aus dem Satze Nr. 3 folgt ein bequemes Verfahren zur Construktion der Tangente:

a) Wenn der Berührungspunkt M gegeben ist. Man verlängere (Fig. 35) den einen Radiusvektor $F'M$ des Berührungspunktes um das Stück $ME = MF$ und beschreibe aus den zwei Punkten E und F Kreisbogen, welche sich in einem Punkte L der Tangente schneiden.

b) Durch einen ausserhalb der Ellipse gegebenen Punkt L eine Tangente zu ziehen. Denkt man sich (Fig. 35) die Tangente MLT construirt, so bemerkt man sogleich, dass der Berührungspunkt M bekannt wird, wenn sich der Punkt E finden lässt, indem die EF' die Ellipse im Punkte M schneidet. Der Punkt E ist aber durch die bekannten Entfernungen $EL = FL$ und $EF' = MF + MF' = 2a$ bestimmt. Man beschreibe daher (Fig. 36) aus einem der Brennpunkte, z. B. F' mit dem Halbmesser $= 2a$ einen Kreisbogen oo', und aus dem gegebenen Punkte L mit dem Abstande desselben vom anderen Brennpunkte als Halbmesser einen zweiten Kreisbogen nn', welcher den ersteren in zwei Punkten E, E' schneiden wird; verbindet man diese Punkte mit F' durch Gerade, so schneiden diese die Ellipse in den gesuchten Berührungspunkten M und M'.

Fig. 36.



VON DEN DURCHMESSERN DER ELLIPSE.

212. Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ist bekannt, dass in der Ellipse, als einer Curve der zweiten Ordnung, *a*) für jedes System paralleler Sehnen ein Durchmesser existirt, welcher sie sämmtlich halbirt; *b*) dass alle Durchmesser gerade Linien sind, welche durch den Mittelpunkt gehen; *c*) dass umgekehrt jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade ein Durchmesser ist, welchem ein System paralleler Chorden entspricht, das von ihm halbirt wird.

Ist die Ellipse mit ihrem Mittelpunkte gegeben, so lässt sich der zu einer bestimmten Sehnenrichtung gehörige Durchmesser leicht construiren. Man halbire eine der gegebenen Sehnen und ziehe durch den Halbirungspunkt und den Mittelpunkt eine Gerade, welche der gesuchte Durchmesser ist.

Sei nun φ der Neigungswinkel einer der parallelen Sehnen gegen die Axe der x, so ist $y = x \operatorname{tg} \varphi + n$ die Gleichung derselben, welche

mit der Gleichung der Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, verbunden, durch Elimination von y die Gleichung:

$$(a^2 \operatorname{tg}\varphi^2 + b^2)\, x^2 + 2a^2 n \operatorname{tg}\varphi \,.\, x + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

darbietet, deren Wurzeln x_1, x_2 die Abscissen der Durchschnittspunkte der Sehne und der Ellipse sind. Bezeichnet man daher mit α, β die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne, so hat man:

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 n \operatorname{tg}\varphi}{a^2 \operatorname{tg}\varphi^2 + b^2}; \quad \beta = \alpha \operatorname{tg}\varphi + n = \frac{b^2 n}{a^2 \operatorname{tg}\varphi^2 + b^2}.$$

Die Gleichung des zugehörigen Durchmessers, als einer durch den Ursprung und den Punkt α, β gehenden Geraden, ist $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, d. h. wenn man für α und β obige Werthe substituirt:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\varphi} x. \tag{1}$$

Ist ψ der Neigungswinkel dieses Durchmessers gegen die Axe der x, so ist $\operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\varphi}$, woraus:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2} \tag{2}$$

folgt. **Das Produkt der Tangenten der Winkel, welche ein Durchmesser und das zugehörige Sehnensystem mit der grossen Axe einschliessen, ist somit eine constante Grösse und** $= -\frac{b^2}{a^2}$.

Aus der Symmetrie der Gl. (2) in Bezug auf die Winkel φ und ψ erhellt sogleich, dass, wenn man einen zweiten Durchmesser unter dem Winkel φ gegen die grosse Axe zieht, das zu diesem gehörige Sehnensystem diese Axe unter dem Winkel ψ schneiden werde.

Diese zwei Durchmesser haben somit die Eigenschaft, dass jeder von ihnen das zu dem anderen parallele Sehnensystem halbirt. Zwei solche Durchmesser werden **conjugirte Durchmesser** genannt. Man bemerkt von selbst, wie diese Eigenschaft benützt werden kann, um zu einem gegebenen Durchmesser den conjugirten zu construiren.

Die Gl. (2) drückt offenbar die Bedingung aus, welcher die Neigungswinkel φ und ψ zweier Durchmesser gegen die grosse Axe Genüge leisten müssen, damit dieselben ein System conjugirter Durchmesser bilden.

Da vermöge der Gl. (2) das Produkt $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi$ immer negativ ist, so folgt, dass von den beiden Winkeln φ und ψ, welche zwei conju-

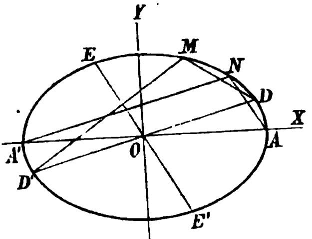
girte Durchmesser mit der grossen Axe einschliessen, der eine immer spitz, der andere stumpf ist und folglich jeder der beiden Durchmesser in zwei anderen elliptischen Quadranten liegt. Lassen wir φ den spitzen Winkel bedeuten, so ist $\psi - \varphi = u$ der von der kleinen Axe durchschnittene Winkel der beiden Durchmesser und man hat:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi} = -\frac{a^2 \operatorname{tg}\varphi + b^2 \operatorname{cotg}\varphi}{a^2 - b^2},$$

woraus erhellt, dass dieser Winkel immer stumpf und folglich der von der grossen Axe durchschnittene Nebenwinkel immer spitzig ist. Letzterer wird gewöhnlich der Conjugationswinkel genannt.

Sollen die beiden Durchmesser auf einander senkrecht stehen, so muss $u = 90^0$, somit $\operatorname{tg} u = \infty$ sein, welchen Werth $\operatorname{tg} u$ vermöge des obigen Ausdruckes nur für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^0$ erhält, da in der Ellipse $a^2 - b^2$ von 0 verschieden ist. Die Axen der Ellipse bilden daher das einzige System rechtwinkeliger conjugirter Durchmesser (Hauptdurchmesser). Für den Kreis folgt jedoch aus obiger Gleichung, wegen $a = b$, für jeden Werth von φ, $u = 90^0$, daher im Kreise jedes System conjugirter Durchmesser ein rechtwinkeliges ist.

Fig. 37.



213. Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers DD' (Fig. 37) mit einem beliebigen Punkte M der Ellipse, so heissen die so entstehenden Sehnen MD und MD' Supplementarsehnen. Bezeichnet man mit x', y' die Coordinaten des Punktes M, mit x'', y'' jene des Punktes D, so sind $-x''$, $-y''$ jene von D', und man hat als Gleichungen der beiden Sehnen MD und MD':

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'); \quad y - y' = \frac{y' + y''}{x' + x''}(x - x').$$

Sind nun φ und ψ die Winkel derselben mit der als Abscissenaxe angenommenen grossen Axe, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}.$$

Da aber die Punkte D, D' und M auf der Ellipse liegen, so hat man $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$, woraus durch Subtraktion $a^2(y'^2 - y''^2) + b^2(x'^2 - x''^2) = 0$ folgt, womit die obige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (n)$$

Das Produkt $\operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\psi$ ist also, wie man sieht, constant, und nicht bloss von der Lage des Punktes M gegen den Durchmesser DD', sondern auch von der Richtung des letzteren unabhängig. Hieraus folgt der Satz:

1) Zieht man durch die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers Parallele zu einem Paare Supplementarsehnen, so schneiden sich dieselben in einem Punkte der Ellipse und bilden demnach ebenfalls ein Paar Supplementarsehnen.

Aus der Uebereinstimmung obiger Gl. (n) mit Gl. (2) im vorigen Paragraphe folgt ferner:

2) Zwei Durchmesser, welche zu zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, sind conjugirt.

Auch dieser Satz bietet ein Mittel dar, zu einem gegebenen Durchmesser DD' den conjugirten zu construiren. Durch den Endpunkt eines beliebigen anderen Durchmessers z. B. AA' (Fig. 37) ziehe man die Sehne $A'N$ parallel mit DD', verbinde N mit A, und ziehe EE' parallel zu AN, so ist EE' der gesuchte, zu DD' conjugirte Durchmesser.

Fig. 38.

Suchen wir noch den von zwei Supplementarsehnen AN, $A'N$ (Fig. 38) eingeschlossenen Winkel ANA' zu bestimmen, wobei wir dieselben über der grossen Axe construirt annehmen. Sind x, y die Coordinaten des Punktes N, so hat man:

$$\operatorname{tg} NAX = -\frac{y}{a-x}, \quad \operatorname{tg} NA'X = \frac{y}{a+x},$$

somit wegen $ANA' = NAX - NA'X$:

$$\operatorname{tg} ANA' = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)\,y}, \tag{1}$$

wenn man für x^2 den aus der Gl. der Curve folgenden Werth substituirt. Mit Rücksicht auf den in Rede stehenden Winkel kann y positiv angenommen werden; es ist somit $\operatorname{tg} ANA'$ wesentlich negativ, und somit der von zwei über der grossen Axe construirten Supplementarsehnen eingeschlossene Winkel immer stumpf. Er erreicht seinen grössten Werth für $y = b$, wenn die beiden Sehnen im Endpunkte der kleinen Axe zusammenlaufen, und man hat für dieses Maximum:

$$\operatorname{tg} ABA' = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \tag{2}$$

Mit abnehmendem y wird der Winkel ANA' immer kleiner und hat für $y = 0$ den rechten Winkel zur Grenze.

Eben so findet man für den von zwei über der kleinen Axe construirten Supplementarsehnen gebildeten Winkel BNB':

$$\operatorname{tg} BNB' = \frac{2a^2 b}{(a^2 - b^2)\,x}; \tag{3}$$

dieser Winkel ist somit immer spitzig und erreicht für $x = a$ seinen kleinsten Werth BAB', für welchen

$$\operatorname{tg} BAB' = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \tag{4}$$

wird. Mit abnehmendem x wird $\angle\, BNB'$ immer grösser und hat für $x = 0$ den rechten Winkel zur Grenze.

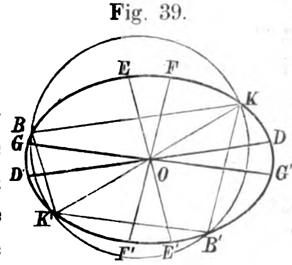
Bringt man hiemit die obigen beiden Sätze in Verbindung, so gelangt man zu dem Schlusse, dass der Winkel, welchen zwei Supplementarsehnen oder zwei conjugirte Durchmesser mit einander bilden, nicht grösser als ABA' und nicht kleiner als BAB' werden kann.

Aus den Glgn. (1) und (3) erhellt übrigens, dass über beiden Axen, also auch über jedem Durchmesser zwei Paare Supplementarsehnen construirt werden können, welche gleiche Winkel einschliessen. Daher gibt es auch immer zwei Systeme conjugirter Durchmesser von gleichem Conjugationswinkel, mit Ausnahme des Systems der conjugirten Hauptdurchmesser oder Axen.

214. Aufgabe 1. Es ist eine Ellipse gegeben; man soll ein System conjugirter Durchmesser construiren, welche sich unter einem gegebenen Winkel γ schneiden. (Fig. 39.)

Man ziehe zwei parallele Sehnen und durch deren Halbirungspunkte den Durchmesser KK'; durch Halbirung desselben erhält man zuvörderst den Mittelpunkt O. Ueber KK' als Sehne beschreibe man einen Kreis, so dass der eine über KK' stehende Kreisbogen KBK' den gegebenen Winkel γ als Peripheriewinkel enthalte. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt B dieses Kreisbogens und der Ellipse mit den Punkten K und K', und zieht durch den Mittelpunkt O parallel zu BK und BK' die Durchmesser DD' und EE', so sind dies die gesuchten Durchmesser.

Fig. 39.



Der Kreis schneidet die Ellipse noch in einem zweiten Punkte B', und es ist bekanntlich $KB'K' = 180^0 - \gamma$; zieht man daher KB' und $K'B'$ und damit parallel die Durchmesser FF' und GG', so bilden diese offenbar das zweite System conjugirter Durchmesser, welche sich ebenfalls unter dem Winkel γ schneiden.

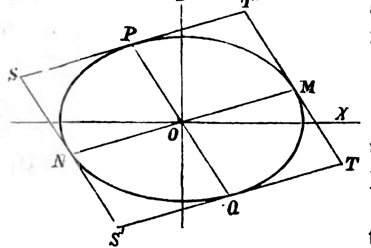
Hiemit ist also zugleich die Aufgabe gelöst, zu einem gegebenen Systeme conjugirter Durchmesser das zweite von gleichem Conjugationswinkel zu construiren.

Aufgabe 2. Es ist eine Ellipse gegeben; man soll die Axen derselben construiren.

Diese Aufgabe ist nur ein specieller Fall der vorhergehenden, für $\gamma = 90^0$. Der Kreis ist, wie leicht einzusehen, aus dem Mittelpunkte der Ellipse über einem beliebigen Durchmesser derselben zu beschreiben, und sonst wie oben zu verfahren.

215. Zieht man an einem beliebigen Punkte $M(x, y)$ der Ellipse die Tangente TT', (Fig. 40) und den Durchmesser MN, so hat man für den Neigungswinkel τ der Tangente gegen die als Abscissenaxe angenommene grosse Axe:

Fig. 40.



$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{[Gl. (5) §. 207]}$$

und, wenn φ der Neigungswinkel des Durchmessers gegen die grosse Axe ist, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$; folglich, wenn beide Gleichungen multiplicirt werden:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\tau = -\frac{b^2}{a^2},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (2), §. 212 folgt, dass die Tangente an einem beliebigen Punkte der Ellipse parallel liegt zu jenem Durchmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt gezogenen conjugirt ist.

Da hiernach die an den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten parallel sind, so bilden die vier an den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser MN und PQ construirten Tangenten ein Parallelogramm $SS'TT'$.

DIE ELLIPSE BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER DURCHMESSER.

216. Wir haben bisher die Gleichung der Ellipse in der Form:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

angewendet, welche Form bekanntlich davon herrührt, dass der Coordinatenanfang Mittelpunkt der Curve ist, wodurch die Abwesenheit der linearen Glieder bedingt wird, und jede der Coordinatenaxen die zur anderen parallelen Sehnen halbirt, in Folge dessen das Glied mit dem Produkte xy fehlen muss. Hieraus folgt aber, dass die Gleichung der Curve obige Form nicht verändern wird, wenn man mit Beibehaltung des Mittelpunktes als Ursprung, irgend ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen wählt.

Fig. 41.

Sei nun (Fig. 41) OX, OY ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatensystem angenommen; α, α' die Winkel, welche die neuen Axen OX, OY mit der grossen Axe bilden, so haben wir zum Behufe der Transformation in (1) $x\cos\alpha + y\cos\alpha'$ statt x, $x\sin\alpha + y\sin\alpha'$ statt y zu schreiben [Gl. (4), §. 164.], und erhalten dadurch:

$$(a^2\sin\alpha'^2 + b^2\cos\alpha'^2)\,y^2 + (a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\,x^2 +$$
$$+\,2\,(a^2\sin\alpha\sin\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha')\,xy = a^2b^2.$$

Es ist aber der Coefficient von xy:

$$a^2\sin\alpha\sin\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha' = a^2\cos\alpha\cos\alpha'\left(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' + \frac{b^2}{a^2}\right) = 0,$$

vermöge der zwischen den Winkeln α, α' bestehenden Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

[Gl. (2), §. 212], wodurch sich obige Gleichung in folgende verwandelt:

$$(a^2\sin\alpha'^2 + b^2\cos\alpha'^2)\,y^2 + (a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\,x^2 = a^2b^2. \tag{2}$$

Setzt man noch:

$$\frac{a^2b^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2} = m^2, \quad \frac{a^2b^2}{a^2\sin\alpha'^2 + b^2\cos\alpha'^2} = n^2, \tag{3}$$

so erhält man:

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2 \tag{4}$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\text{für} \quad y = 0: \quad x^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OD'}^2 = m^2,$$
$$\text{für} \quad x = 0: \quad y^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = n^2;$$

es sind also m und n die Hälften der conjugirten Durchmesser, auf welche die Ellipse bezogen ist.

217. Zwischen den sechs Stücken a, b, m, n, α, α' bestehen nach Obigem die drei Gleichungen:

$$\frac{a^2b^2}{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2} = m^2 \ (1), \qquad \frac{a^2b^2}{a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2} = n^2 \quad (2)$$

$$a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0, \quad (3)$$

deren letzte mit

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3')$$

identisch ist.

1) Durch Multiplikation von (1) und (2) erhält man:

$$a^4b^4 = m^2n^2[a^2b^2 \sin\alpha'^2 \cos\alpha^2 + a^4 \sin\alpha^2 \sin\alpha'^2 + b^4 \cos\alpha^2 \cos\alpha'^2 + \\ + a^2b^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha'^2],$$

und wenn man (3) zum Quadrate erhebt:

$$a^4 \sin\alpha^2 \sin\alpha'^2 + b^4 \cos\alpha^2 \cos\alpha'^2 = -2a^2b^2 \sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha',$$

womit die vorhergehende Gleichung übergeht in:

$$a^2b^2 = m^2n^2(\sin\alpha' \cos\alpha - \cos\alpha' \sin\alpha)^2 = m^2n^2 \sin(\alpha' - \alpha)^2,$$

woraus

$$ab = mn \sin(\alpha' - \alpha) \quad (4)$$

folgt.

Zieht man (Fig. 41) ED und ED', ferner EF senkrecht auf DD', so ist im $\triangle\ EFO: EF = n \sin(\alpha' - \alpha)$, somit:

$$\triangle\ DED' = mn \sin(\alpha' - \alpha) = ab;$$

anderseits drückt ab offenbar den Flächeninhalt des Dreieckes aus, dessen Grundlinie die grosse Axe $= AA' = 2a$ und Höhe die halbe kleine Axe $= b$ ist; die Gl. (4) spricht daher folgenden Satz aus:

Das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser verbindet, ist dem Rhombus gleich, dessen Ecken die Endpunkte der beiden Axen sind.

Zieht man ferner an den Endpunkten der beiden conjugirten Durchmesser DD', EE' die Tangenten, so ist der Flächeninhalt des von denselben eingeschlossenen Parallelogrammes $GHIK$ offenbar dem doppelten Flächeninhalte des Parallelogrammes $DED'E'$ gleich, somit:

$$GHIK = 2ED'E'D = 4mn\sin(\alpha' - \alpha) = 4ab,$$

woraus sich noch folgender Satz ergibt:

Die Fläche des Parallelogrammes, welches von den vier an den Endpunkten zweier conjugirten Durchmesser gezogenen Tangenten gebildet wird, ist eine constante Grösse und dem Rechtecke aus den beiden Axen gleich.

2) Nach bekannten goniometrischen Formeln findet man aus (3'):

$$\sin\alpha^2 = \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}\alpha'^2}, \quad \cos\alpha^2 = \frac{a^4 \operatorname{tg}\alpha'^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}\alpha'^2},$$

$$\sin\alpha'^2 = \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}\alpha^2}, \quad \cos\alpha'^2 = \frac{a^4 \operatorname{tg}\alpha^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}\alpha^2},$$

welche Werthe, in (1) und (2) substituirt:

$$m^2 = \frac{a^4\sin\alpha'^2 + b^4\cos\alpha'^2}{a^2\sin\alpha'^2 + b^2\cos\alpha'^2} \ldots (5), \quad n^2 = \frac{a^4\sin\alpha^2 + b^4\cos\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2} \ldots (6).$$

geben. Durch Addition von (1) und (6) oder (2) und (5) erhält man:

$$m^2 + n^2 = \frac{a^4\sin\alpha^2 + a^2b^2 + b^4\cos\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2} = \frac{a^4\sin\alpha'^2 + a^2b^2 + b^4\cos\alpha'^2}{a^2\sin\alpha'^2 + b^2\cos\alpha'^2},$$

woraus, wenn die Division verrichtet wird,

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 \qquad (7)$$

folgt. Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist daher eine constante Grösse und der Summe der Quadrate der Axen gleich.

Wir bemerken noch, dass, wenn von den 6 Grössen a, b, m, n, α, α' drei gegeben sind, die anderen drei mittelst der Gleichungen (1), (2), (3) oder (3') gefunden werden können, von welchen übrigens die beiden ersteren auch durch die Gleichungen (4) und (7) vertreten werden können. Hieher gehören z. B. folgende Aufgaben: 1) Zwei conjugirte Durchmesser und der Conjugationswinkel sind gegeben, die Axen zu berechnen. 2) Die Axen sind gegeben; man sucht ein System conjugirter Durchmesser, welche einen gegebenen Winkel $\alpha' - \alpha$ einschliessen.

218. Unter den unzähligen Systemen conjugirter Durchmesser der Ellipse ist noch dasjenige bemerkenswerth, dessen Durchmesser den die Endpunkte der beiden Axen verbindenden Sehnen parallel sind, und, wie aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf ihre Hauptaxen sogleich erhellt, gleiche Längen haben. Bezieht man die Ellipse auf dieses System conjugirter Durchmesser, so wird ihre Gleichung (wegen $m = n$ in Gl. (4) §. 216):

$$x^2 + y^2 = m^2,$$

und hat, wie man sieht, mit der auf rechtwinkelige Axen bezogenen Mittelpunktsgleichung des Kreises gleiche Form. Jede Gleichung von dieser Form, bezogen auf ein schiefwinkeliges Axensystem ist daher die Gleichung einer auf das System der gleichen conjugirten Durchmesser bezogenen Ellipse. Bezeichnen, wie oben, α und α' die Winkel der zwei gleichen Durchmesser gegen die Abscissenaxe, so ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b}{a}$$

und vermöge der Gl. (7): $m^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

219. Aus der vollkommenen Uebereinstimmung der Formen, welche die Gl. der Ellipse annimmt, wenn dieselbe auf die Axen oder auf ein beliebiges System conjugirter Durchmesser bezogen wird, folgt, dass alle bisher entwickelten Eigenschaften dieser Curve, welche von der Richtung der Durchmesser unabhängig sind, auch dann bestehen, wenn dieselbe auf ein System conjugirter Durchmesser bezogen wird. So namentlich die Gleichungen der Tangente und die Formeln und Construktionen des §. 209 über die Aufgabe, von einem ausserhalb der Ellipse gegebenen Punkte eine Tangente an die Curve zu ziehen.

Was insbesondere die Ergebnisse des letztgenannten Paragraphes anbelangt, so können wir jetzt, wenn wir bedenken, dass zu jeder in der Ebene der Ellipse gegebenen Geraden ein paralleler Durchmesser gezogen werden kann, und die dort entwickelten Formeln sich nicht ändern, wenn statt der Axen irgend ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatensystem angenommen wird (nur dass dann selbstverständlich unter a und b die Hälften dieser conjugirten Durchmesser zu verstehen sind), folgenden Satz aussprechen:

Wenn von beliebigen Punkten irgend einer in der Ebene der Ellipse gezogenen Geraden *(Polare)* Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so schneiden sich sämmtliche Gerade, welche die zu je zwei von demselben Punkte ausgehenden Tangenten gehörigen Berührungspunkte verbinden, in einem Punkte *(Pol)*, welcher auf jenem Durchmesser liegt, der zu dem der gegebenen Geraden parallelen Durchmesser conjugirt ist.

Und umgekehrt:

Zieht man durch irgend einen in der Ebene der Ellipse gegebenen Punkt *(Pol)* Sehnen oder Sekanten und zu je zwei Punkten, in denen die Ellipse von jeder Sehne oder Sekante geschnitten wird, die Tangenten, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier zusammengehöriger Tangenten auf einer zu jenem Durchmesser parallelen Geraden *(Polare)*, welcher dem durch den gegebenen Punkte gezogenen conjugirt ist.

II. Die Hyperbel.

220. Die Gleichung der Hyperbel, auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptdurchmesser bezogen, ist:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \qquad (1)$$

wo $2a$ die erste oder reelle, $2b$ die zweite oder imaginäre Axe bezeichnet, und erstere als Abscissenaxe angenommen ist.

Für $a = b$ verwandelt sich obige Gleichung in $y^2 - x^2 = -a^2$, und die Hyperbel heisst in diesem Falle eine gleichseitige; diese ist unter den Hyperbeln das, was der Kreis unter den Ellipsen.

Bezeichnet man die lineare Excentricität, d. i. den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte mit e, die numerische Excentricität mit ε, so ist bekanntlich [§. 204]:

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad b^2 = e^2 - a^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1),$$

und man hat für die Leitstrahlen $FM = r$, $F'M = r'$ (Fig. 29, S. 350) eines beliebigen Hyperbelpunktes M, dessen vom Mittelpunkte gezählte Abscisse $CP = x$ ist, die Ausdrücke:

$$r = \frac{e}{a}x - a, \quad r' = \frac{e}{a}x + a,$$

deren Differenz constant und gleich ist der ersten Axe $2a = AA'$. Auf diese Eigenschaft gründet sich eine einfache Construktion der Hyperbel durch Punkte, bei welcher zu verweilen nicht nöthig sein wird.

Die Gl. (1) in der Form:

$$\frac{y^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{b^2}{a^2}$$

ſchrieben, spricht den Satz aus, dass das Quadrat der Ordinate dem Rechtecke aus den Abständen ihres Fusspunktes n beiden Scheiteln der Hyperbel in einem constanten ɪrhältnisse $= b^2 : a^2$ stehe.

Construirt man über der ersten Axe der Hyperbel (1) eine gleichseitige Hyperbel, und bezeichnet mit y, y' die zu derselben Abscisse x gehörigen Ordinaten beider Curven, so hat man:

$$x = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \pm \sqrt{x^2 - a^2},$$

somit $y : y' = b : a$; der in dieser Proportion ausgesprochene Satz ist, so wie der vorhergehende, den beiden [§. 205] für die Ellipse bewiesenen analog; er kann jedoch zur Construktion der Hyperbel nicht benützt werden, da eine gleichseitige Hyperbel nicht leichter als irgend eine andere zu construiren ist.

Aus der Vergleichung der Mittelpunktsgleichungen der Hyperbel und der Ellipse geht vorher, dass diese in jene übergeht, wenn man $-b^2$ statt b^2, oder $b\sqrt{-1}$ statt b schreibt. Aus diesem Grunde können die aus der Gleichung der Ellipse abgeleiteten Gleichungen und Formeln durch Aenderung des Zeichens von b^2 unmittelbar in die entsprechenden auf die Hyperbel sich beziehenden umgewandelt werden. In Folge dieser Aehnlichkeit besitzen beide Curven auch analoge Eigenschaften, namentlich ist die Ableitung derselben häufig so übereinstimmend, dass wir im Folgenden in solchen Fällen bloss die Resultate anführen, und behufs der Ableitung auf die entsprechenden vorhergehenden Paragraphen verweisen werden.

VON DER TANGENTE AN DER HYPERBEL.

221. Verbinden wir die Gleichung der Hyperbel: $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mit jener einer beliebigen Geraden:

$$y = mx + n, \tag{1}$$

so erhalten wir durch Elimination von y die Gleichung:

$$x^2(a^2m^2 - b^2) + 2a^2mnx + a^2(b^2 + n^2) = 0, \tag{α}$$

welche sofort die Abscissen der Durchschnittspunkte liefert und anzeigt, dass die Hyperbel von der Geraden in zwei Punkten geschnitten wird, den Fall ausgenommen, wenn $a^2m^2 - b^2 = 0$, d. i. $m = \pm \frac{b}{a}$ ist, in welchem Falle die Gerade die Hyperbel nur in einem Punkte schneidet, weil dann (α) auf den 1sten Grad herabsinkt. Schliessen wir vorerst diesen besonderen Fall aus, so erhalten wir durch Auflösung von (α) als Abscissen der Durchschnittspunkte:

$$x = \frac{-a\left\{amn \pm b\sqrt{b^2 + n^2 - a^2m^2}\right\}}{a^2m^2 - b^2}. \tag{β}$$

Damit die Sekante zur Tangente werde, müssen die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen; es muss demnach in diesem Ausdrucke die Wurzelgrösse verschwinden, wodurch wir als Bedingungsgleichung für die Berührung:

$$a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0 \tag{2}$$

erhalten. Dem bei der Ellipse betretenen Wege folgend, finden wir:

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 - b^2}, \quad \eta = -\frac{b^2n}{a^2m^2 - b^2}$$

als Coordinaten des Berührungspunktes, und:

$$y - \eta = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - \xi), \tag{3}$$

oder

$$a^2\eta y - b^2\xi x = -a^2b^2, \tag{4}$$

als Gleichung der Tangente im Punkte ξ, η. Bezeichnen wir mit τ den Winkel, welchen die Tangente am Punkte ξ, η der Hyperbel mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \tag{5}$$

Als Gleichung der Normale im Punkte ξ, η der Hyperbel hat man nun:

$$y - \eta = -\frac{a^2\eta}{b^2\xi}(x - \xi). \tag{6}$$

Ferner findet man (Fig. 42, S. 374):

$$PT = \text{Subtangente} = -\frac{a^2\eta^2}{b^2\xi} = -\frac{\xi^2 - a^2}{\xi},$$

$$PN = \text{Subnormale} = \frac{b^2\xi}{a^2},$$

$$MT = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2\xi}\sqrt{a^4\eta^2 + b^4\xi^2},$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4\eta^2 + b^4\xi^2}.$$

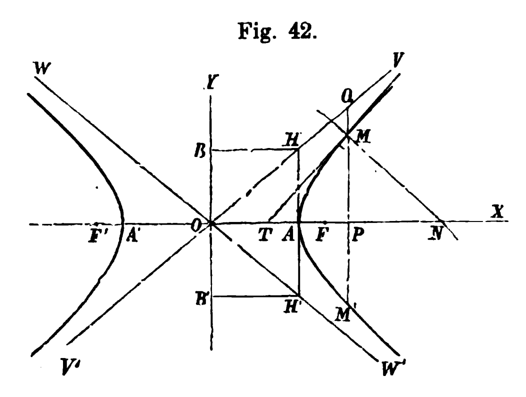
Wie man sieht, ist auch in der Hyperbel, wie in der Ellipse, die Subtangente von η und b unabhängig; beschreibt man daher über derselben ersten Axe eine Reihe von Hyperbeln, und zieht an dieselben in Punkten, denen derselbe Werth der Abscisse ξ entspricht, Tangenten, so schneiden sich diese in einem und demselben Punkte der ersten Axe.

Die Subnormale erhält für $\xi = a$, d. i. im Scheitel der Hyperbel ihren kleinsten Werth $\frac{b^2}{a}$ = dem halben Parameter, und wächst mit

zunehmendem ξ bis ins Unendliche. Während also in der Ellipse der Werth der Subnormale immer zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}p$ eingeschlossen ist, liegt derselbe in der Hyperbel zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}p$ und ∞.

222. Der Ausdruck (5) für $\operatorname{tg}\tau$ verdient noch eine nähere Erörterung. In der Ellipse kann die Tangente alle möglichen Neigungen gegen die Axe der x annehmen; dies ist bei der Hyperbel nicht der Fall. Denn eliminirt man mit Hilfe der Gleichung der Curve η aus (5), so erhält man:

Fig. 42.



$$\operatorname{tg}\tau = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{\xi^2}}}.$$

Es ist nun $\xi = a$ der (numerisch) kleinste mögliche Werth von ξ, für welchen $\operatorname{tg}\tau = \pm\infty$, somit $\tau = 90^0$ wird; d. i. in den Scheiteln steht die Tangente senkrecht auf der ersten Axe. Lässt man nun ξ grösser und grösser werden, so wird, da $\frac{a^2}{\xi^2}$ fortwährend abnimmt, $\operatorname{tg}\tau$ immer kleiner und hat für $\xi = \infty$ die Grösse $\pm\frac{b}{a}$ zur Grenze, unter welche sie nicht herabsinken kann.

Errichtet man daher im Scheitel A (Fig. 42) eine Senkrechte und macht $AH = -AH' = b$, zieht durch den Mittelpunkt O und die Punkte H und H' die Geraden VV', WW' so ist:

$$\operatorname{tg} VOX = +\frac{b}{a},\quad \operatorname{tg} WOX = -\frac{b}{a},$$

woraus in Verbindung mit dem oben Gesagten hervorgeht, dass die Tangente an der Hyperbel mit der x-Axe keinen kleineren spitzen Winkel als VOX, keinen grösseren stumpfen als WOX bilden kann.

Setzt man ferner in Gl. (4) der Tangente $y = 0$, so wird:

$$x = OT = \frac{a^2}{\xi};$$

hieraus folgt, dass der Durchschnittspunkt der Tangente mit der x-A immer zwischen dem Mittelpunkte und einem der beiden Scheitel lie

und ersterem um so näher kommt, je grösser ξ wird; rückt nun der Berührungspunkt in unendliche Entfernung, d. i. wird $\xi = \infty$, so hat man gleichzeitig: $\operatorname{tg}\tau = \pm \frac{b}{a}$, $OT = 0$. Je weiter sich daher der Berührungspunkt entfernt, desto mehr nähert sich die Tangente MT einer der beiden Geraden VV', WW', deren Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

ist, und fällt für $\xi = \infty$ mit einer derselben zusammen.

Bezeichnet man mit y und y' die zu derselben Abscisse $OP = x$ gehörigen Ordinaten der Hyperbel und der Geraden VV', so ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2;$$

durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man:

$$(y' - y)(y' + y) = b^2.$$

Das Produkt $(y' - y)(y' + y) = MQ \,.\, M'Q$ ist demnach eine constante Grösse und es folgt hieraus, dass, wenn x, und somit auch y und y' grösser und grösser werden, die Differenz $y' - y = MQ$ fortwährend abnehmen und unendlich klein werden muss, wenn x unendlich gross wird. Die Hyperbel nähert sich daher immer mehr und mehr den Geraden VV', WW', ohne jemals mit ihnen völlig zusammenfallen.

Man nennt eine gerade oder krumme Linie, an welche sich ein unendlicher Curvenast immer mehr und mehr anschmiegt, ohne jedoch mit ihr je zusammenzufallen, eine Asymptote der Curve. Die Hyperbel besitzt daher zwei geradlinige Asymptoten, welche sich im Mittelpunkte schneiden, und deren Gleichungen:

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x$$

sind.

Es ergibt sich nun auch leicht die geometrische Bedeutung des im Eingange des §. 221 erwähnten besonderen Falles, dass eine Gerade $y = mx + n$ eine Hyperbel nur in einem Punkte schneidet, wenn $= \pm \frac{b}{a}$ ist; die Gerade ist nämlich dann einer Asymptote parallel. …raus folgt zugleich, dass es unmöglich ist, in einer Hyperbel eine … einer Asymptote parallele Sehne zu ziehen.

Für die Durchschnittspunkte einer durch den Mittelpunkt gehenden …raden $y = mx$ mit der Hyperbel findet man, (in (α) $n = 0$ setzend:)

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \quad y = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}},$$

woraus folgt, dass ein Durchschnitt stattfindet oder nicht, je nachdem m numerisch kleiner oder grösser ist als $\frac{b}{a}$, d. h. je nachdem die Gerade zwischen einer Asymptote und der ersten, oder beziehungsweise zweiten Axe der Hyperbel liegt.

223. Die Aufgabe, von einem ausserhalb der Hyperbel liegenden Punkte x', y' eine Tangente an dieselbe zu ziehen, wird auf dieselbe Weise zur Lösung gebracht, wie bei der Ellipse [§. 209.]. In sämmtlichen dort entwickelten Formeln hat man nur das Zeichen von b^2 zu verändern, um sie für die Hyperbel umzugestalten, und die daraus gezogenen Folgerungen und Sätze gelten unverändert auch für diese Curve.

224. Da der Durchschnittspunkt T einer Tangente MT (Fig. 43) mit der ersten Axe immer zwischen den Scheiteln, folglich um so mehr zwischen den Brennpunkten liegt, und $OT = \frac{a^2}{\xi}$ ist [§. 222], so hat man, wenn $r = FM$, $r' = F'M$ die Leitstrahlen des Berührungspunktes M sind:

$$FT = e - \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi}\left(\frac{e\xi}{a} - a\right) = \frac{ar}{\xi},$$

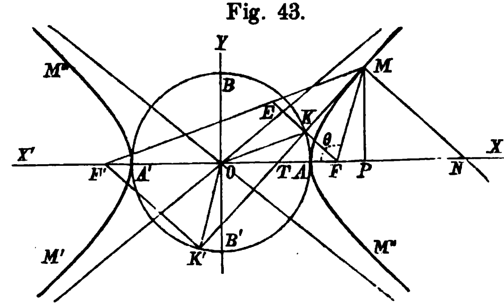
$$F'T = e + \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi}\left(\frac{e\xi}{a} + a\right) = \frac{ar'}{\xi},$$

woraus:

$$FT : F'T = r : r'$$

folgt. Diese Proportion, auf das Dreieck $FF'M$ bezogen, spricht den Satz aus: die Tangente halbirt den von den Leitstrahlen des Berührungspunktes eingeschlossenen Winkel.

Fig. 43.



Dieses stimmt vollkommen mit der analogen Eigenschaft der Ellipse überein, daher auch alle dort [§. 211] gezogenen Folgerungen, so wie die daraus abgeleiteten Constructionen unmittelbar auf die Hyperbel übertragen werden können. In Bezug auf letztere, welche in Fig. 43 ausgeführt

sind, entstehen aus dem Umstande, dass in der Hyperbel die Tangente zwischen den beiden Leitstrahlen, in der Ellipse ausserhalb derselben liegt, ganz geringe Modificationen, welche sogleich in die Augen fallen.

VON DEN DURCHMESSERN DER HYPERBEL.

225. Schliesst man die Richtung der Asymptoten aus, zu welchen bekanntlich keine parallelen Sehnen existiren, so entspricht auch in der Hyperbel jedem Systeme paralleler Sehnen ein geradliniger durch den Mittelpunkt gehender Durchmesser. Bezeichnen wir daher, wie §. 212, mit φ den Neigungswinkel der parallelen Sehnen gegen die als Abscissenaxe angenommene erste Axe, so finden wir als Gleichung des zugehörigen Durchmessers:

$$y = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x,$$

folglich, wenn ψ der Winkel ist, welchen der Durchmesser mit der x-Axe einschliesst:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2}. \tag{1}$$

Hieraus folgt, dass — wie in der Ellipse — jedem Durchmesser ein conjugirter entspricht, deren jeder die zu dem anderen parallel gezogenen Sehnen halbirt.

Weil das Produkt $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$ stets positiv ist, so sind beide Winkel φ und ψ gleichzeitig spitz oder stumpf; in der Hyperbel liegen demnach zwei conjugirte Durchmesser immer in demselben Quadranten, und zwar, weil, wenn $\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} \varphi' > \frac{b}{a}$ sein muss, auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote, so dass der eine Durchmesser zwischen der ersten Axe und der Asymptote, der conjugirte zwischen der Asymptote und der zweiten Axe liegt.

Nach dem am Schlusse des §. 222 Gesagten trifft nur der erste dieser beiden Durchmesser, nicht aber der zweite, die Hyperbel, welche Eigenschaft daher jedes System conjugirter Durchmesser mit dem Axensysteme gemein hat. Analog mit Letzterem wollen wir jenen von zwei conjugirten Durchmessern den ersten nennen, welcher die Hyperbel schneidet, den anderen den zweiten.

Auch geht aus dem Gesagten hervor, dass die Zunahme des Winkels φ die Abnahme von ψ zur Folge hat, so dass zwei conjugirte Durchmesser sich immer näher rücken, je mehr sich der erste von der ersten Axe entfernt, und endlich in der Asymptote zusammenfallen.

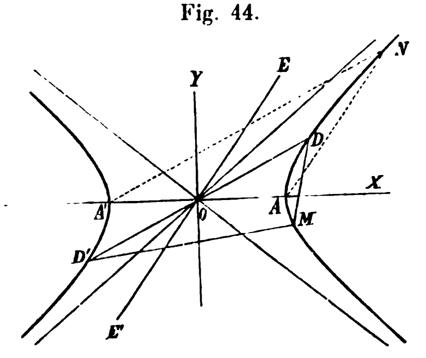
In der gleichseitigen Hyperbel ist wegen $a = b$, $\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = 1$, d. h. die Winkel, welche zwei conjugirte Durchmesser mit der ersten Axe einschliessen, ergänzen einander zu 90^0.

226. Verbindet man die Endpunkte eines ersten Durchmessers DD' (Fig. 44) mit einem beliebigen Punkte M der Hyperbel, so hat man ein Paar Supplementarsehnen, für welche man auf dem in §. 213 betretenen Wege die Relation:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}$$

findet, wenn φ, ψ die von denselben mit der ersten Axe eingeschlossenen Winkel bedeuten. Die Uebereinstimmung derselben mit der auf ein System conjugirter Durchmesser sich beziehenden Gleichung (1) im vorigen §. führt zu denselben Folgerungen, welche wir [§. 213] für die Ellipse erhalten haben. Um daher zu einem gegebenen Durchmesser DD' die Richtung des conjugirten zu construiren, ziehe man $A'N$ parallel zu DD' und verbinde N mit A, so ist EE', durch den Mittelpunkt zu AN parallel gezogen, die Richtung des conjugirten Durchmessers. Auch werden die Aufgaben: Ein System conjugirter Durchmesser zu construiren, welche einen gegebenen Winkel einschliessen; so wie die Axen einer gegebenen Hyperbel zu construiren, in ähnlicher Weise wie bei der Ellipse [§. 214] aufgelöst.

Fig. 44.

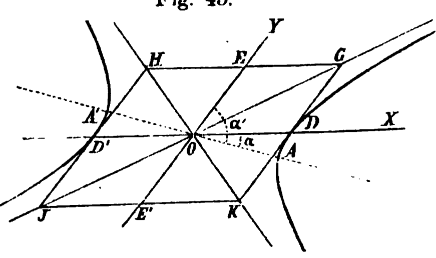


Eben so, wie für die Ellipse, wird auch für die Hyperbel der Satz bewiesen, dass eine an die Curve gezogene Tangente parallel ist zu jenem Durchmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt gezogenen conjugirt ist.

DIE HYPERBEL BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER DURCHMESSER.

227. Nehmen wir ein System conjugirter Durchmesser, OX, OY (Fig. 45) der Hyperbel als Coordinatenaxen, und sind α, α' die Winkel, welche beziehungsweise der erste als Axe der x angenommene und der zweite Durchmesser mit der ersten Axe bilden, so haben wir in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $x\cos\alpha + y\cos\alpha'$ statt x und $x\sin\alpha + y\sin\alpha'$ statt y zu substituiren und erhalten dadurch als transformirte Gleichung:

Fig. 45.



$$y^2(a^2\sin\alpha'^2 - b^2\cos\alpha'^2) + 2xy(a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha') - x^2(b^2\cos\alpha^2 - a^2\sin\alpha^2) = -a^2b^2,$$

aus welcher zunächst in Folge der zwischen den Winkeln α, α' stattfindenden Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2} \tag{1}$$

oder

$$a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0$$

das Glied mit xy verschwindet. Da ferner $\operatorname{tg}\alpha^2 < \frac{b^2}{a^2}$ und $\operatorname{tg}\alpha'^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ist, so sind die beiden Coefficienten von x^2 und y^2 wesentlich positiv; setzen wir daher:

$$m^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos\alpha^2 - a^2\sin\alpha^2},\quad n^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\alpha'^2 - b^2\cos\alpha'^2}, \tag{2}$$

so erhalten wir als Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser:

$$m^2y^2 - n^2x^2 = -m^2n^2, \tag{3}$$

welche, wie man sieht, mit der Mittelpunktsgleichung der Form nach vollkommen übereinstimmt.

Aus (3) folgt für $y = 0 : x^2 = OD^2 = OD'^2 = m^2$, so dass m die Hälfte des ersten Durchmessers darstellt. Für $x = 0$ erhält man $y = \pm n\sqrt{-1}$: der zweite Durchmesser wird also, wie ohnehin bekannt, von der Hyperbel nicht geschnitten; der aus (2) folgende Werth von n wird, der Analogie nach, als Länge des zweiten Durchmessers auf diesem aufgetragen ($OE = OE' = n$).

Die Gleichung der Asymptoten, bezogen auf die Hauptaxen, ist bekanntlich: $y = \pm \frac{b}{a} x$, und nimmt durch Erhebung zum Quadrate die Form $a^2y^2 - b^2x^2 = 0$ an. Transformiren wir dieselbe auf das obige System conjugirter Durchmesser OD, OE, so erhalten wir:

$$y^2(a^2 \sin\alpha'^2 - b^2 \cos\alpha'^2) - x^2(b^2 \cos\alpha^2 - a^2 \sin\alpha^2) = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf (2):

$$y = \pm \frac{n}{m} x \tag{4}$$

folgt. Also behält auch die Gl. der Asymptoten dieselbe Form, man mag was immer für ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen wählen.

Setzt man in (4) $x = m = OD$, so wird $y = n = DG$, woraus folgt, dass die Asymptoten mit den Diagonalen des aus zwei beliebigen conjugirten Durchmessern construirten Parallelogrammes zusammenfallen; und umgekehrt: die Eckpunkte des aus zwei beliebigen Durchmessern construirten Parallelogrammes liegen auf den Asymptoten.

Sind daher die Hyperbel und ihre Asymptoten gegeben, so ist es mit Hilfe dieses Satzes leicht, die Länge des zu einem beliebigen ersten Durchmesser conjugirten zweiten Durchmessers zu construiren; oder die Asymptoten zu construiren, wenn ein Paar conjugirter Durchmesser der Richtung und Länge nach gegeben sind; oder unter derselben Voraussetzung die Richtung der beiden Axen der Hyperbel zu construiren, wenn man noch beachtet, dass diese die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbiren.

Die sechs Stücke a, b, m, n, α, α' sind durch die 3 Gleichungen (1) und (2) verbunden, mit deren Hilfe daher aus drei gegebenen Stücken die anderen gefunden werden können. Auf dem in §. 217 betretenen Wege erhalten wir aus diesen Gleichungen.

$$ab = mn \sin(\alpha' - \alpha), \tag{5}$$
$$m^2 - n^2 = a^2 - b^2. \tag{6}$$

Es ist somit in der Hyperbel: 1) das aus zwei conjugirten Durchmessern construirte Parallelogramm constant ui dem Rechtecke der Axen gleich (wie in der Ellipse); 2) di Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchme ser ist eine constante Grösse und gleich der Differen der Quadrate der beiden Axen.

Aus (6) folgt, dass m nicht $= n$ werden kann, wenn a von b verschieden ist; in der Hyperbel existirt also kein System conjugirter Durchmesser von gleicher Länge; ist hingegen $a = b$, so wird auch $m = n$, d. h. in der gleichseitigen Hyperbel haben je zwei conjugirte Durchmesser immer gleiche Länge.

Das in §. 219 Gesagte gilt unverändert auch von der Hyperbel.

DIE HYPERBEL BEZOGEN AUF IHRE ASYMPTOTEN.

228. Bringt man die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf die Form:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right), \tag{1}$$

so erkennt man sogleich, dass derselben zwei geradlinige Asymptoten zukommen, welche in der Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \tag{2}$$

begriffen sind. Denn beim fortwährenden Wachsen von x nähert sich der aus (1) folgende Werth von y immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit dem aus (2) resultirenden Ordinatenwerthe, d. h. mit anderen Worten, die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr den durch (2) dargestellten Geraden, ohne aber je mit ihnen zusammenzufallen; letztere sind daher Asymptoten der Hyperbel.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogen, aufsuchen. Bezeichnen wir mit 2λ den Asymptotenwinkel, d. h. jenen von beiden Asymptoten gebildeten Winkel, in welchem die erste Axe liegt, so haben wir zum Behufe der Transformation der Mittelpunktsgleichung von den Formeln (4) §. 164 Gebrauch zu machen und daselbst $\alpha = -\lambda$, $\alpha' = +\lambda$ zu setzen, somit in der Mittelpunktsgleichung statt x und y die Ausdrücke:

$$x \cos\lambda + y \cos\lambda = (y + x) \cos\lambda,$$
$$-x \sin\lambda + y \sin\lambda = (y - x) \sin\lambda,$$

ı substituiren. Nun ist $\operatorname{tg}\lambda = \frac{b}{a}$, somit $\cos\lambda^2 = \frac{a^2}{e^2}$, $\sin\lambda^2 = \frac{b^2}{e^2}$, enn $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ die lineare Excentricität bedeutet. Hiemit geht ıe Mittelpunktsgleichung über in:

$$a^2 (y - x)^2 \frac{b^2}{e^2} - b^2 (y + x)^2 \frac{a^2}{e^2} = -a^2 b^2,$$

woraus nach einfacher Reduktion:

$$xy = \left(\frac{e}{2}\right)^2 \tag{3}$$

als Asymptotengleichung der Hyperbel folgt.

Umgekehrt gehört jede auf recht- oder schiefwinkelige Coordinaten bezogene Gleichung von der Form $xy = k^2$ einer (bei rechtwinkeligen Coordinaten gleichseitigen) Hyperbel an, deren Excentricität $e = 2k$ ist. Die Grösse $k^2 = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ heisst die Potenz der Hyperbel.

Aus (3) folgt, dass das Rechteck aus den zu den Asymptoten parallelen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Hyperbel constant und dem Quadrate der halben Excentricität gleich, somit letztere die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden Coordinaten ist.

Sind daher die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel gegeben, so ist die Excentricität $e = 2\sqrt{xy}$ leicht zu construiren, wodurch, da die Richtung der ersten Axe den Asymptotenwinkel halbirt, die Brennpunkte und mit diesem die Längen der beiden Axen gefunden werden können, da (Fig. 42, S. 374) $OH = OH' = \sqrt{a^2 + b^2} = e = OF$ ist.

Die Aufgabe, wenn ein System conjugirter Durchmesser der Richtung und Grösse nach gegeben ist, die Axen zu construiren, lässt sich jetzt ebenfalls leicht auflösen, indem man die Asymptoten und die Richtung der Axen nach dem vorigen §. construirt und beachtet, dass man in den Endpunkten des ersten Durchmessers zwei der Hyperbel angehörige Punkte hat.

229. Zieht man eine beliebige Sekante GH (Fig. 46), welche auf den beiden als Coordinatenaxen angenommenen Asymptoten die Stücke $OG = \alpha$, $OH = \beta$ abschneidet, so ist die Gleichung derselben:

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1. \tag{1}$$

Eliminirt man aus dieser und der Asymptotengleichung der Hyperbel y, so erhält man:

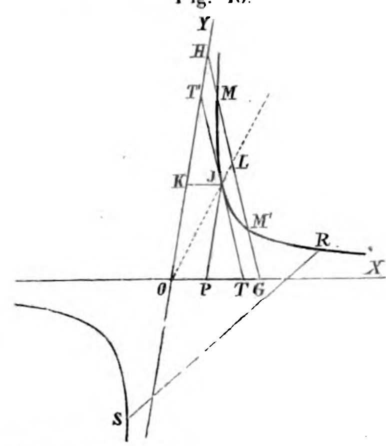
$$x^2 - \alpha x + \frac{\alpha e^2}{4\beta} = 0, \tag{2}$$

eine Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2 die Abscissen der Durchschnittspunkte M, M' der Hyperbel und Sekante sind. Ist nun L der Halbirungspunkt der Sehne MM' und sind ξ, η dessen Coordinaten, so hat man:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}, \text{ womit aus (1) } \eta = \frac{\beta}{2}$$

sich ergibt. Hieraus folgt, dass der Punkt L auch die GH halbirt. Da also $GL = HL$ und $LM = LM'$, so ist $HM = GM'$, d. h. die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Abschnitte einer beliebigen Sekante oder Sehne sind gleich. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass der Satz auch für eine solche Sehne (wie z. B. RS) gelte, welche zwei Punkte der beiden Hyperbeläste verbindet.

Fig. 46.



Hierauf gründet sich ein sehr einfaches Verfahren zur Construction der Hyperbel, wenn ein Punkt derselben und die Asymptoten gegeben sind. Sei M der gegebene Punkt der Hyperbel; man ziehe durch denselben eine beliebige Sekante, welche die Asymptoten in G und H schneidet und mache $GM' = HM$, so ist M' ein Punkt der Hyperbel. Jede andere durch M gezogene Sekante liefert einen neuen Punkt; jeder so erhaltene Punkt kann wieder als Ausgangspunkt genommen werden, wodurch die vier Zweige der Curve leicht erhalten werden.

Aus (2) folgt:

$$x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\left(\alpha - \frac{c^2}{\beta}\right)};$$

soll die Sekante GH zur Tangente TT' werden, so müssen die beiden Durchschnittspunkte M, M' in einem einzigen Punkt J zusammenfallen, wozu erfordert wird, dass die Wurzelgrösse verschwinde; es ist also:

$$\alpha\beta = c^2$$

die Bedingungsgleichung für die Berührung, und für die Coordinaten $OP = \xi$, $PJ = \eta$ des Berührungspunktes J erhält man:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}, \quad \eta = \frac{\beta}{2};$$

mit ist $\alpha = OT = 2\xi$, $\beta = OT' = 2\eta$, mit welchen Werthen die l. (1) in die Asymptotengleichung der Tangente:

$$\frac{y}{2\eta} + \frac{x}{2\xi} = 1$$

übergeht. Aus den so eben erhaltenen Werthen der von der Tangente auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken:

$$OT = 2\xi = 2OP, \quad OT' = 2\eta = 2PJ$$

folgt:

1) $JT = JT'$; d. h. der Berührungspunkt halbirt das zwischen den Asymptoten enthaltene Stück der Tangente, welcher Satz übrigens in dem obigen von einer Sekante bewiesenen als specieller Fall enthalten ist.

2) Ein einfaches Verfahren zur Construction der Tangente an einem gegebenen Punkt der Hyperbel. Ist J dieser Punkt, so ziehe man JP parallel zu einer Asymptote, und mache $PT = PO$, so ist JT die gesuchte Tangente.

Multiplicirt man die Asymptotengleichung der Hyperbel mit $\sin 2\lambda$, wo 2λ wie oben den Asymptotenwinkel bezeichnet, so kommt:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{e^2}{4} \sin 2\lambda\,;$$

nun ist:

$$\sin 2\lambda = 2 \sin\lambda \cos\lambda = \frac{2ab}{e^2},$$

somit:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{1}{2}\, ab\,;$$

der Ausdruck $xy \sin 2\lambda$ stellt aber die Fläche des Parallelogrammes $JKOP$ vor, welches über den zu den Asymptoten parallelen Coordinaten JP, OP eines beliebigen Hyperbelpunktes construirt ist; diese Fläche ist also constant und dem 8ten Theile des aus den beiden Axen $2a$ und $2b$ construirten Rechteckes gleich.

III. Die Parabel.

230. Diese Curve unterscheidet sich von der Ellipse und Hyperbel wesentlich dadurch, dass sie keinen Mittelpunkt, folglich nur einen Hauptdurchmesser und nur einen Brennpunkt besitzt. Nimmt man den Hauptdurchmesser, die Axe der Parabel, als Abscissenaxe, den Durchschnittspunkt derselben mit der Curve (den Scheitel) als Ursprung, so ist bekanntlich die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = px,$$

wo die Constante p der Parameter der Parabel genannt wird.

Man definirt die Parabel gewöhnlich nach der [aus §. 204] bekannten Eigenschaft derselben, dass jeder ihrer Punkte von einer feste

Geraden (der Richtlinie) und einem festen Punkte (dem Brennpunkte) gleichweit entfernt ist. Der Parameter ist bekanntlich das Doppelte des Abstandes des Brennpunktes von der Richtlinie und folglich gleich der im Brennpunkte errichteten Doppelordinate.

Wie mit Hilfe obiger Eigenschaft die Parabel durch Punkte construirt werden kann, wenn Brennpunkt und Richtlinie gegeben sind, fällt sogleich in die Augen. Aus der Gleichung der Curve erhellt übrigens, dass die Ordinate jedes Punktes derselben die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen seiner Abscisse und dem Parameter, woraus folgt, dass jedes Verfahren der Elementar-Geometrie, zu zwei gegebenen Strecken die 3te geometrische Proportionale zu finden, zur Construktion der Parabel benützt werden kann.

VON DER TANGENTE AN DER PARABEL.

231. Verbinden wir die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ mit der Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden, so erhalten wir zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichungen:

$$a^2x^2 - (p - 2ab)\,x + b^2 = 0, \qquad (\alpha)$$
$$y = ax + b.$$

Ist $a = 0$, d. h. die Gerade parallel zur x-Axe, so sinkt die Gl. (α) auf den 1ten Grad herab, woraus folgt, dass eine zur x-Axe parallele Gerade die Parabel nur in einem Punkte schneidet. Ist aber a von Null verschieden, so zieht man aus (α) den Werth:

$$x = \frac{p - 2ab \pm \sqrt{p(p - 4ab)}}{2a^2},$$

woraus erhellt, dass die Gerade die Parabel nicht trifft, wenn $4ab > p$, und in zwei Punkten schneidet, wenn $4ab < p$. Sollen die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen, die Sekante also zur Tangente werden, so muss die Bedingung

$$p = 4ab \qquad (\beta)$$

erfüllt werden, und man erhält als Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\xi = \frac{p - 2ab}{2a^2}, \quad \eta = \frac{p}{2a},$$

woraus, da $\eta^2 = p\xi$ ist, $a = \dfrac{p}{2\eta}$, $b = \dfrac{\eta}{2}$ folgt. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Geraden, so erhält man als Gleichung der Tangente am Punkte ξ, η:

$$y = \frac{p}{2\eta} x + \frac{\eta}{2},$$

welche, indem man beiderseits η abzieht und aus dem zweiten Theile den Faktor $\frac{p}{2\eta}$ heraushebt, mit Rücksicht auf die Gl. $\eta^2 = p\xi$, die bequemeren Formen:

$$y - \eta = \frac{p}{2\eta}(x - \xi), \tag{1}$$

oder

$$y\eta = \frac{p}{2}(x + \xi) \tag{2}$$

annimmt. Der Winkel τ, welchen die Tangente im Punkte ξ, η mit der x-Axe einschliesst, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\eta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\xi}} \tag{3}$$

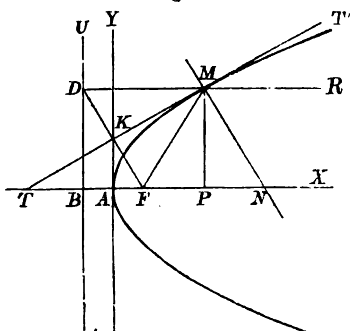
bestimmt. Für $\eta = 0$ wird $\tau = 90^0$, d. h. die Tangente am Scheitel steht auf der Axe senkrecht; je grösser η oder ξ wird, d. h. je weiter sich der Berührungspunkt vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird τ und folglich die Tangente immer mehr und mehr zur Axe parallel.

Für die **Gleichung der Normale** im Punkte ξ, η erhält man aus (1):

$$y - \eta = -\frac{2\eta}{p}(x - \xi). \tag{4}$$

Setzt man in der Gl. (1) der Tangente und jener (4) der Normale, $y = 0$, so stellt $x - \xi$ beziehungsweise die Subtangente PT (Fig. 47) und Subnormale PN vor; man erhält daher:

Fig. 47.



$$\text{Subtangente } PT = -2\xi,$$

$$\text{Subnormale } PN = \frac{p}{2}.$$

In der Parabel ist daher die Subtangente gleich der doppelten vom Scheitel aus gezählten Abscisse des Berührungspunktes, die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

Wie diese beiden Eigenschaften zu einer sehr einfachen Construction der Tangente oder Normale an einem gegebenen Parabelpunkte benützt werden können, fällt sogleich in die Augen.

Da $PT = 2\xi$, so ist auch $AT = \xi$, somit $FT = \xi + \frac{p}{4} = FM$, und das Dreieck MFT gleichschenkelig; zieht man daher noch durch den Berührungspunkt M die RD senkrecht auf die Richtlinie UU', so ist:

$$\angle FMT = MTF = DMT = RMT';$$

beachtet man nun noch, dass wegen $MF = MD$ das Dreieck MDF gleichschenkelig ist, so ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Winkel, welche die Tangente mit dem Radiusvektor des Berührungspunktes und einer durch letzteren parallel zur Axe gezogenen Geraden bildet, sind gleich; folglich wird auch der von dieser Geraden und dem Leitstrahle gebildete Winkel durch die Normale halbirt.

2) Die Gerade, welche den Brennpunkt mit dem Fusspunkte des vom Berührungspunkte auf die Richtlinie gefällten Perpendikels verbindet, wird von der Tangente senkrecht geschnitten und halbirt.

Man sieht von selbst, wie auch diese Eigenschaften in mehr als einer Weise zur Construktion der Tangente oder Normale an einem gegebenen Punkte der Parabel benützt werden können.

Da die FD im Punkte K, die BF im Scheitelpunkte A halbirt wird, so ist AK parallel zu UU', somit senkrecht auf die Axe; bemerkt man nun, dass K der Fusspunkt des aus dem Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels ist, so ergibt sich der Satz: der geometrische Ort der Fusspunkte der aus dem Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikel ist die durch den Scheitel senkrecht auf die Axe gezogene Gerade.

232. Um von einem ausserhalb der Parabel gelegenen Punkte G (Fig. 48, siehe S. 388) eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beachte man, dass nach Obigem jeder Punkt der Tangente GM von den beiden Punkten F und D gleichweit entfernt ist und folglich auch die Tangente die FD senkrecht durchschneidet. Beschreibt man daher aus G mit dem Halbmesser GF einen Kreis, welcher die Richtlinie in zwei Punkten D und D' schneidet, so sind die aus G auf DF und $D'F$ gefällten Perpendikel die gesuchten Tangenten. Oder man ziehe durch D und D' Parallele zur Axe, deren Durchschnittspunkte mit der Parabel die Berührungspunkte M, M' geben.

Um die Aufgabe analytisch aufzulösen, seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η des Berührungspunktes die beiden Gleichungen:

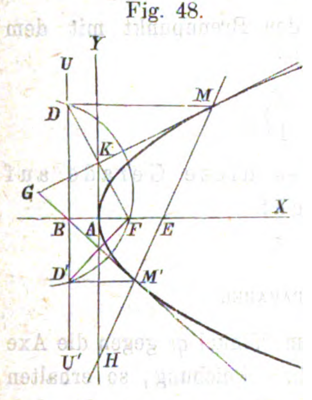
$$y'\eta = \frac{p}{2}(x' + \xi) \text{ und } \eta^2 = p\xi, \qquad (m)$$

deren erste ausdrückt, dass die Tangente durch den Punkt x', y' geht, die zweite, dass der Berührungspunkt auf der Parabel liegt. Durch Elimination von ξ erhält man:

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 - px'},$$

woraus folgt, dass durch den Punkt x', y' zwei Tangenten gezogen werden können, oder eine oder gar keine, je nachdem $y'^2 >, =$ oder $< px'$ ist, d. h. je nachdem der Punkt x', y' ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt. Zur Construktion der Berührungspunkte bedient man sich am einfachsten der geometrischen Oerter der Gleichungen (m). Der Ort der zweiten Gleichung ist die gegebene Parabel selbst; jener der ersten eine Gerade, die **Berührungssehne**, welche die Coordinatenaxen in den Punkten E und H schneidet, für welche man, einmal η, dann $\xi = 0$ setzend:

Fig. 48.



$$\xi = AE = -x', \quad \eta = AH = \frac{px'}{2y'}$$

findet, welche Punkte daher leicht construirt werden können. Zieht man dann die EH, so schneidet diese die Parabel in den gesuchten Berührungspunkten M und M'.

Da die Abscisse $AE = -x'$ des Punktes, in welchem die Berührungssehne die Axe schneidet, von der Ordinate y' des gegebenen Punktes unabhängig ist, so gilt auch in der Parabel der Satz: **Wenn von beliebigen Punkten einer auf der Axe der Parabel senkrecht stehenden Geraden (Polare) Tangenten an die Curve gezogen werden, so schneiden sich sämmtliche Berührungssehnen in einem und demselben auf der Axe gelegenen Punkte (Pol); und umgekehrt.**

Ein beachtenswerthes Resultat ergibt sich noch, wenn man den Punkt x', y' auf der Direktrix annimmt, wodurch $x' = -\frac{1}{4}p$ und die Ordinate η der Berührungspunkte.

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2}$$

wird. Bezeichnet man nun mit τ, τ' die Neigungswinkel der beiden Tangenten gegen die Axe der x, so hat man [Gl. (3), §. 231]:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{p}{2(y' + \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2})}, \quad \operatorname{tg}\tau' = \frac{p}{2(y' - \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2})},$$

woraus $\operatorname{tg}\tau \,.\, \operatorname{tg}\tau' = -1$ folgt, d. h. die beiden Tangenten stehen auf einander senkrecht.

Die Gleichung der Berührungssehne wird:

$$\eta = \frac{p}{2y'}\left(\xi - \frac{p}{4}\right), \qquad (n)$$

woraus für $\eta = 0 : \xi = \frac{1}{4}p$ folgt; d. h. die Berührungssehne geht durch den Brennpunkt.

Die Gleichung der Geraden, welche den Brennpunkt mit dem Punkte $x' = -\frac{1}{4}p$, y' verbindet, ist endlich:

$$y - y' = -\frac{2y'}{p}\left(x + \frac{p}{4}\right),$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (n) folgt, dass diese Gerade auf der Berührungssehne senkrecht steht.

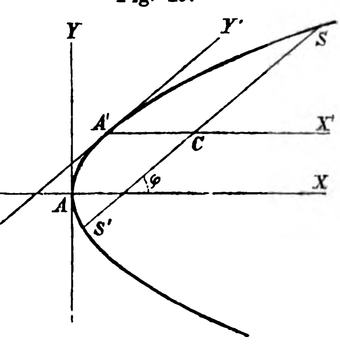
VON DEN DURCHMESSERN DER PARABEL.

233. Es sei SS' (Fig. 49) eine unter dem Winkel φ gegen die Axe geneigte Sehne, folglich $y = x \operatorname{tg}\varphi + b$ ihre Gleichung, so erhalten wir durch Verbindung derselben mit der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$, zur Bestimmung der Ordinaten der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$y^2 - p \operatorname{cotg}\varphi \,.\, y + pb \operatorname{cotg}\varphi = 0,$$

wobei wir φ von 0 verschieden voraussetzen, weil sonst [§. 231] die Gerade die Parabel nur in einem Punkte schneiden, folglich keine Sehne darstellen könnte. Sind dann y_1, y_2 die Ordinaten der Durchschnittspunkte S, S', so ist $y_1 + y_2 = p \operatorname{cotg}\varphi$, und, wenn mit β die Ordinate des Halbirungspunktes C der Sehne bezeichnet wird:

Fig. 49.



$$\beta = \tfrac{1}{2}p \operatorname{cotg}\varphi. \qquad (1)$$

Da dieser Werth von β bloss von dem Neigungswinkel φ der Sehne abhängig ist, so folgt, dass in der Pa-

rabel der geometrische Ort der Halbirungspunkte eines Systems paralleler Sehnen, d. h. der zu diesem Sehnensysteme gehörige Durchmesser eine zur Axe parallele Gerade ist, wie aus den allgemeinen Untersuchungen des vorigen Kapitels bereits bekannt ist. Mit Hilfe der Gl. (1) findet man den zu einem gegebenen Chordensysteme zugehörigen Durchmesser und umgekehrt; indem, wenn β, d. i. der Abstand des Durchmessers $A'X'$ von der Axe gegeben ist, aus (1):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2\beta} \tag{2}$$

sich ergibt. Zieht man in dem Punkte A', in welchem der Durchmesser die Parabel schneidet, eine Tangente an dieselbe, so hat man, da β die Ordinate von A', für den Neigungswinkel τ derselben gegen die Axe den Ausdruck $\operatorname{tg}\tau = \frac{p}{2\beta}$ [Gl. (3), §. 231], somit wegen (2): $\tau = \varphi$.

Es ist somit die Tangente parallel zu jenen Sehnen, welche von dem durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser halbirt werden.

Diese Eigenschaft hat also die Parabel mit der Ellipse und Hyperbel gemein; in den zwei letztgenannten Curven existirt aber ein zur Tangente paralleler, dem Durchmesser des Berührungspunktes conjugirter Durchmesser, welcher in der Parabel, da dieselbe keinen Mittelpunkt hat, fehlt. Der Analogie nach wird in der Parabel eine Tangente und der Durchmesser des Berührungspunktes ein System conjugirter Durchmesser oder besser conjugirter Axen genannt. Die Scheiteltangente und die Axe der Parabel, welche beide der Gleichung $y^2 = px$ als Coordinatenaxen zu Grunde liegen, bilden, wie man sieht, ebenfalls ein solches System conjugirter Axen und zwar das einzige rechtwinkelige, weil nur für $\beta = 0$ aus (2) $\varphi = 90^0$ sich ergibt.

DIE PARABEL BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER AXEN.

234. Sei $A'X'$, $A'Y'$ (Fig. 49, S. 389), ein System conjugirter Axen, auf welche wir nun die Parabel beziehen wollen; $\angle X'A'Y' = \varphi$; α, β die Coordinaten des neuen Ursprunges A', bezogen auf die Hauptaxen AX, AY. Um die Gleichung $y^2 = px$ auf das neue Coordinatensystem zu transformiren, haben wir von den Formeln (4), §. 164, Gebrauch zu machen und statt a, b, α, α' beziehungsweise α, β, 0, φ zu setzen, wodurch dieselben in $x = \alpha + x' + y' \cos\varphi$, $y = \beta + y' \sin\varphi$ übergehen. Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung $y^2 = px$ kommt:

$$y^2 \sin\varphi^2 + y(2\beta \sin\varphi - p \cos\varphi) + \beta^2 - p\alpha = px.$$

Es ist aber in Folge der Gl. (2) des vorigen §.:

$$2\beta \sin\varphi - p \cos\varphi = 0;$$

ferner, da der Punkt α, β in der Parabel liegt, $\beta^2 = p\alpha$; hiedurch verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$y^2 = p \operatorname{cosec}\varphi^2 . x, \tag{1}$$

und diese ist die Gleichung der Parabel vom Parameter $= p$, bezogen auf ein System conjugirter Axen, welche den Winkel φ einschliessen. Setzt man:

$$p \operatorname{cosec}\varphi^2 = m, \tag{2}$$

so nimmt sie die mit der Scheitelgleichung der Parabel vollkommen übereinstimmende Form:

$$y^2 = mx \tag{3}$$

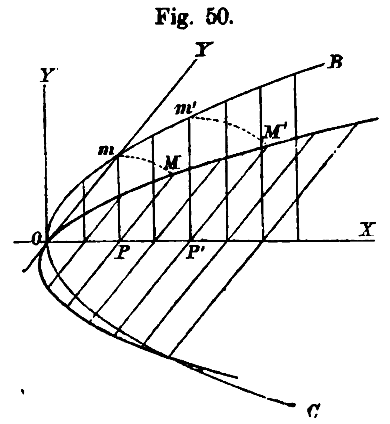
an. Jede Gleichung von dieser Form, welche sich auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem vom Coordinatenwinkel φ bezieht, gehört demnach einer Parabel an, deren Parameter $p = m \sin\varphi^2$ ist.

Aus (2) [§. 233] folgt: $\sin\varphi^2 = \frac{p^2}{4\beta^2 + p^2} = \frac{p}{4\alpha + p}$, weil $\beta^2 = \alpha p$; hiemit wird $m = p + 4\alpha$. Nun ist aber der Radiusvektor r des Punktes A': $r = \alpha + \frac{1}{4}p$, somit $m = 4r$, woraus die geometrische Bedeutung der Constante m in (3) erhellt. Dieselbe ist, wie man sieht, das Vierfache des Abstandes des Ursprunges A' vom Brennpunkte.

Aus der Uebereinstimmung der Form der Gl. (3) der Parabel, bezogen auf ein System conjugirter Axen, mit der Scheitelgleichung folgt, dass alle früher entwickelten Eigenschaften, welche von dem Coordinatenwinkel unabhängig sind, auf das neue System übertragen werden können.

So erkennt man aus (3), dass in jedem Systeme conjugirter Axen die Ordinaten die mittleren geometrischen Proportionalen sind zwischen den Abscissen und dem Parameter m. Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren zur Construction der Parabel $y^2 = mx$, wenn die Axen OX, OY, (Fig. 50) und m gegeben sind. Man errichte in O das Perpendikel OY auf OX und construire mit dem Parameter m über OX, als Axe, die Parabel BOC. Zieht man sodann aus

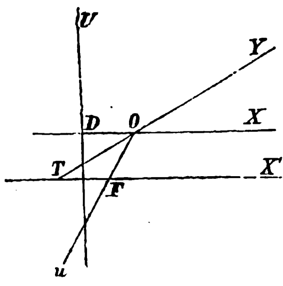
Fig. 50.



verschiedenen Punkten P, P', ... der OX Parallele zu OY' und OY, von welchen die ersteren die Parabel BOC in den Punkten m, m', .., schneiden, und macht $PM = Pm$, $P'M' = P'm'$ u. s. w., so erhält man Punkte M, M', ... welche der Parabel $y^2 = mx$ angehören.

Uebrigens kann man auch zuerst Brennpunkt und Richtlinie der Parabel construiren. Sind nämlich OX, OY (Fig. 51) die gegebenen conjugirten Axen und zwar OX der Durchmesser, so ist OY eine Tangente an der Parabel im Punkte O; macht man daher $\angle TOu = XOY$, so geht Ou durch den Brennpunkt; nimmt man ferner $OF = \frac{1}{4} m$, so ist F der Brennpunkt, und die durch F parallel zu OX gezogene Gerade FX' die Axe. Wird endlich OX über O hinaus verlängert und $OD = OF$ gemacht, so ist UU' durch D senkrecht auf FX' gezogen, die Richtlinie.

Fig. 51.



Durch ein ähnliches Verfahren findet man die Elemente einer Parabel, welche schon construirt gegeben ist. Durch Halbirung zweier parallel gezogener Sehnen ergibt sich zunächst ein Durchmesser OX und die Richtung der Tangente OY, womit die Richtung Ou construirt werden kann, in welcher der Brennpunkt liegen muss. Wiederholt man diese Construction unter Anwendung eines anderen Paares paralleler Sehnen, so ergibt sich der Brennpunkt und hiemit die Richtlinie und Axe.

Die auf die Tangente sich beziehenden Gleichungen (1), (2) und (3), [§. 231] gelten auch für ein System conjugirter Axen, wenn man nur den Parameter p durch die Constante m der Gl. (3) ersetzt; daher ist auch in einem schiefwinkeligen Coordinatensysteme die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes.

Da ferner auch die Formeln des §. 232 unverändert bleiben, so kann der letzte a. a. O. ausgesprochene Satz nun allgemeiner folgendermassen ausgedrückt werden: Wenn von beliebigen Punkten irgend einer in der Ebene der Parabel gelegenen Geraden (Polare) Tangenten an die Curve gezogen werden, so schneiden sich sämmtliche Berührungssehnen in einem Punkte (Pol), welcher auf jenem Durchmesser liegt, dessen conjugirter der gegebenen Geraden parallel ist. Dieser Satz lässt sich auf bekannte Weise umkehren und gilt demnach für alle Linien zweiter Ordnung.

SECHSTES KAPITEL.

ÜBER DIE POLARGLEICHUNGEN DER LINIEN ZWEITER ORDNUNG, UND ÜBER DIE BESTIMMUNG DIESER CURVEN NACH GEGEBENEN BEDINGUNGEN.

I. Polargleichungen der Linien zweiter Ordnung.

235. Bekanntlich kann die Lage eines Punktes M in der Ebene durch seinen Abstand von einem festen Punkte, dem Pole, und den Winkel bestimmt werden, welchen die Richtung vom Pole nach dem Punkte M mit einer durch den Pol gelegten festen Geraden, der Polaraxe, einschliesst. Man nennt diese Bestimmungsstücke Polarcoordinaten; die eine dieser Coordinaten, der Abstand des Punktes M vom Pole führt den Namen Radiusvektor; die andere, der obenerwähnte Winkel, kann Polarwinkel genannt werden. Ist nun M ein Punkt einer nach einem bestimmten Gesetze gebildeten Curve, so muss sich dieses Gesetz durch eine zwischen den Polarcoordinaten r, θ dieses Punktes der Curve stattfindende Gleichung $\varphi(r, \theta) = 0$ oder $r = f(\theta)$ ebenso ausdrücken lassen, wie dies durch Parallelcoordinaten bisher geschehen ist. Die Gleichung $r = f(\theta)$ heisst die Polargleichung der Curve.

Ist die auf Parallelcoordinaten bezogene Gleichung der Curve, $y = f(x)$, gegeben, so erhält man die Polargleichung, indem man in der Gl. $y = f(x)$ die Werthe von x und y, in Funktion von r und θ ausgedrückt, einsetzt, wozu die Formeln (1) oder (3), [§. 161] dienen. Eben so kann man umgekehrt durch Anwendung der Formeln (2) oder (4) a. a. O. aus der Polargleichung die Gl. $y = f(x)$ ableiten.

Im Folgenden wollen wir die Polargleichungen der Linien zweiter Ordnung entwickeln, und zwar — was hier bequemer ist — mit Benützung bereits bekannter Eigenschaften derselben, ohne von der oben erwähnten Transformation Gebrauch zu machen. Wir werden dabei einen Brennpunkt als Pol und die durch denselben gehende Axe der Curve als Polaraxe annehmen; den Polarwinkel werden wir von jenem Theile der Axe aus zählen, in welchem bei der Parabel und Hyperbel die Scheitel, und bei der Ellipse der dem Pole nähere Scheitel liegt.

I. Ellipse. Sei (Fig. 31, S. 353) F der Pol, FX die Polaraxe, M ein Punkt der Curve, $FM = r$, $\angle MFX = \theta$, so hat man, wenn

wir die vom Mittelpunkte gezählte Abscisse $OP = x$ und die numerische Excentricität $\frac{e}{a} = \varepsilon$ setzen, bekanntlich $r = a - \varepsilon x$; somit, weil

$x = OF - PF = a\varepsilon + r\cos\theta$ ist: $r = a(1 - \varepsilon^2) - r\varepsilon \cos\theta$,

woraus die gesuchte **Polargleichung der Ellipse:**

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{1}$$

folgt. Durch Einführung des Parameters $p = \frac{2b^2}{a} = 2a(1 - \varepsilon^2)$ erhält dieselbe die Form:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon\cos\theta)}. \tag{2}$$

In der Ellipse ist bekanntlich $\varepsilon < 1$, daher auch $\varepsilon\cos\theta$ immer numerisch kleiner als 1, und r kann weder negativ noch unendlich werden. Verfolgt man die Werthe, welche der Radiusvektor r annimmt, während θ von 0 bis 360^0 wächst, so findet man leicht, dass die Glgn. (1) oder (2), indem r immer positiv bleibt, die ganze Ellipse darstellen, wenn man θ alle Werthe von 0 bis 360^0 durchlaufen lässt.

II. **Hyperbel.** Sei (Fig. 43, S. 376) F der Pol, FX' die Polaraxe, $FM = r$, $\angle MFX' = \theta$, so ist $r = \varepsilon x - a$ und $x = OP = OF + FP = a\varepsilon - r\cos\theta$, somit $r = a(\varepsilon^2 - 1) - r\varepsilon\cos\theta$, woraus als **Polargleichung der Hyperbel:**

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{3}$$

folgt, welche durch Einführung des Parameters $p = \frac{2b^2}{a} = 2a(\varepsilon^2 - 1)$ die Form:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon\cos\theta)} \tag{4}$$

annimmt. Da in der Hyperbel $\varepsilon > 1$, so kann r unendlich und negativ werden. Verfolgt man die Werthe von r, während θ von 0 bis 360^0 wächst, und bezeichnet mit θ' jenen zwischen 90^0 und 180^0 liegenden Werth von θ, für welchen:

$$\cos\theta' = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\theta' = -\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = -\frac{b}{a}$$

ist, und welcher $r = \infty$ macht, so findet man leicht, dass der Radiusvektor den Hyperbelast $M'A'M'''$ beschreibt, während θ von θ' bis $360^0 - \theta'$ wächst, wenn man die für diese Werthe von θ aus (4) folgenden negativen Werthe von r auf dem rückwärts über den Pol hinaus

verlängerten Radiusvektor aufträgt. Von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta'$, und von $\theta = 360^0 - \theta'$ bis 360^0 ist der Radiusvektor r positiv, und beschreibt in dem ersteren Intervalle den Zweig AM, in letzterem den Zweig AM'' desjenigen Hyperbelastes, dessen Brennpunkt der Pol ist.

III. Parabel. Für diese Curve hat man:

$$r = x + \frac{p}{4},$$

und wenn (Fig. 30, S. 352) $\angle AFM = \theta$ ist, $x = AP = AF + FP = \frac{1}{4}p - r\cos\theta$; somit:

$$r = \frac{p}{2(1 + \cos\theta)} = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\theta^2}. \tag{5}$$

Man überzeugt sich ohne Mühe, dass diese Gleichungen die ganze Parabel darstellen, wenn man θ alle Werthe von 0 bis 360^0 durchlaufen lässt, wobei r immer positiv bleibt.

236. Die Vergleichung der Gleichungen (3), (4) und (5) lehrt, dass die Polargleichung:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon\cos\theta)} \tag{m}$$

alle drei Curven umfasst, und einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel angehört, je nachdem ε kleiner, grösser oder gleich 1 ist.

Es tritt wohl selten eine Veranlassung ein, einen anderen Punkt, als den Brennpunkt, als Pol anzunehmen; wohl kann aber der Fall vorkommen, dass die Polaraxe nicht mit der durch die Brennpunkte gehenden Axe zusammenfällt, wie dies obige Gleichungen voraussetzen, sondern unter einem Winkel α gegen dieselbe geneigt ist. Man hat dann, wie man leicht findet, nur $\theta + \alpha$ an die Stelle von θ zu setzen, wodurch man allgemeiner:

$$r = \frac{p}{2[1 + \varepsilon\cos(\alpha + \theta)]} \tag{n}$$

für die Polargleichung der Linien 2ter Ordnung erhält.

Die Polargleichung der Hyperbel gibt uns noch zur folgenden Bemerkung über Polarcoordinaten überhaupt Veranlassung. So lange es sich bloss um die Bestimmung der Lage einzelner Punkte in der Ebene handelt, kann der Radiusvektor immer als eine wesentlich positive Grösse betrachtet werden, wenn man den Polarwinkel von 0 bis 360^0 nimmt. Dies ist nicht immer so, wenn man eine Curve durch eine Polargleichung darstellen will. Die Hyperbel bot ein Beispiel, wo wir negative Werthe des Radiusvektor zulassen mussten, damit eine

und dieselbe Gleichung beide Aeste der Hyperbel gebe. Um für den links liegenden Ast der Hyperbel ebenfalls positive Werthe von r zu erhalten, müssten wir die Gleichung:

$$r = \frac{p}{2(1 - \varepsilon \cos \theta)}$$

anwenden, welche aus der früheren hervorgeht, wenn man $180^0 + \theta$ statt θ schreibt, unter θ wieder den Winkel verstanden, welcher von einem zu dem in Rede stehenden Aste gezogenen Radiusvektor mit dem durch die Scheitel gehenden Theile der Polaraxe eingeschlossen wird.

Bei den bisher betrachteten Polargleichungen genügte es ferner, den Polarwinkel θ zwischen den Grenzen 0 und 360^0 sich bewegen zu lassen. Auch dies ist bei manchen Curven (z. B. den Spiralen) unzulässig; offenbar immer dann, wenn die Polargleichung nicht bloss periodische Funktionen von θ, wie sin., cos. etc., sondern den Bogen θ selbst enthält, welcher dann im Allgemeinen aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig betrachtet werden muss. Es ist dann überhaupt der Natur der Sache angemessen, beide Polarcoordinaten r und θ (gleich den Parallelcoordinaten) als lineare Coordinaten aufzufassen; mit dem Unterschiede, dass r eine geradlinige Länge, θ aber die Länge eines Bogens bezeichnet, welcher auf einem mit dem Halbmesser $= 1$ aus dem Pole als Mittelpunkt beschriebenen Kreise aufgetragen wird, und zwar von einem der beiden Punkte aus, in welchen der Kreis von der Polaraxe geschnitten wird, nach der einen oder anderen Richtung, je nachdem θ positiv oder negativ genommen wird.

II. Ueber die Bestimmung der Linien des zweiten Grades nach gegebenen Bedingungen.

237. Man kann die Aufgabe stellen, eine Linie der zweiten Ordnung zu suchen, sei es auf dem Wege der Analyse oder durch Construction, welche gewissen Bedingungen Genüge leistet; z. B. durch eine Anzahl gegebener Punkte geht, oder gegebene Gerade berührt, u. dgl. Die allgemeine Gleichung dieser Linien ist bekanntlich:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0$$

und nimmt durch Division mit F die Form:

$$ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cx + 2c'y + 1 = 0 \tag{1}$$

an, in welcher dieselbe noch fünf unbestimmte Constanten enthält, zu deren Bestimmung daher im Allgemeinen fünf von einander unabhängige Bedingungen erfordert werden und hinreichend sind.

Soll die gesuchte Curve eine Parabel sein, so genügen vier Bedingungen zu deren Bestimmung, da für diesen Fall noch die Bedingungsgleichung $b^2 - aa' = 0$ erfüllt werden muss.

Ob die Aufgabe nun eine oder mehrere Auflösungen zulasse, d. h. ob es nur eine oder mehrere Curven 2ter Ordnung gibt, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten, hängt von der Natur der letzteren ab, je nachdem sie auf Gleichungen führen, welche nach a, b, c, d, e vom ersten oder von höherem Grade sind.

Eine der einfachsten Aufgaben ist jene, durch fünf gegebene Punkte eine Linie der 2ten Ordnung zu legen. Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines dieser Punkte, so müssen dieselben der Gl. (1) Genüge leisten, wodurch sich die Bedingungsgleichung:

$$ax_1^2 + a'y_1^2 + 2bx_1y_1 + 2cx_1 + 2c'y_1 + 1 = 0$$

ergibt; jeder der vier anderen Punkte liefert eine Gleichung von derselben Form; die so erhaltenen fünf Bedingungsgleichungen sind, wie man sieht, in Bezug auf die Unbekannten a, a', u. s. w. vom ersten Grade und geben daher für jede derselben nur einen reellen Werth, daher auch die Aufgabe nur eine Auflösuug zulässt. Werden die gefundenen Werthe von a, a', u. s. w. in (1) substituirt, so hat man die Gleichung der gesuchten Curve, welche durch die gegebenen fünf Punkte geht, und eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein wird, je nachdem $b^2 - aa' < 0$, > 0 oder $= 0$ sich ergibt. Hieraus folgt zugleich, dass zwei Linien zweiter Ordnung, ohne zusammenzufallen, nicht mehr als vier Punkte gemeinschaftlich haben können.

Soll die gesuchte Curve eine Parabel sein, so sind nur vier Punkte zur Bestimmung derselben erforderlich, weil zu den durch diese gelieferten vier Bedingungsgleichungen noch die Gleichung $b^2 - aa' = 0$ hinzutritt, deren quadratische Form übrigens zur Folge hat, dass durch vier Punkte im Allgemeinen zwei Parabeln gelegt werden können, und unter Umständen auch gar keine, wenn die Auflösung auf imaginäre Resultate führt.

Da übrigens eine Curve 2ter Ordnung von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, so ist von selbst einleuchtend, dass von den gegebenen Punkten nicht drei in einer Geraden liegen dürfen. Wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würde man durch die Auflösung wohl eine Gleichung 2ten Grades finden, welche jedoch keiner Curve, sondern zweien oder einer Geraden angehört, auch wohl unbestimmt werden kann.

Die analytische Auflösung ist auf dem oben angedeuteten Wege, in Folge der auszuführenden Eliminationen, ziemlich weitläufig, selbst

wenn man die Coordinatenaxen so legt, dass vier von den zehn Coordinaten der fünf Punkte $= 0$ werden. Einfacher gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele, wobei man von der in der Anmerkung zu §. 176 gemachten Bemerkung Gebrauch macht. Seien M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 die gegebenen Punkte. Lassen wir vorläufig einen derselben, z. B. M_5 ganz beiseite; durch die vier übrigen lassen sich sechs gerade Linien ziehen, aus welchen wir **vier** wählen, mit der Bedingung, dass nicht drei derselben durch einen und denselben Punkt gehen. Seien z. B. (1, 2), (3, 4), (1, 4), (2, 3) die gewählten Geraden, deren Gleichungen durch:

$$(1,\ 2) = 0, \quad (3,\ 4) = 0, \quad (1,\ 4) = 0, \quad (2,\ 3) = 0$$

dargestellt werden mögen. Man bilde durch Multiplikation die Gleichungen 2ten Grades nach x, y:

$$(1,\ 2) \,.\, (3,\ 4) = 0, \quad (1,\ 4) \,.\, (2,\ 3) = 0,$$

so stellt die erste derselben das System der zwei Geraden (1, 2) und (3, 4) vor, und wird daher durch die Coordinaten der vier Punkte M_1 M_2, M_3, M_4 befriediget; die zweite hat die beiden Geraden (1, 4) und (2, 3) zum geometrischen Orte, daher ihr dieselben Coordinaten Genüge leisten. Multipliciren wir daher eine dieser Gleichungen mit einer unbestimmten Constanten λ, und addiren wir sie zur anderen, so erhalten wir die Gleichung:

$$(1,\ 2) \,.\, (3,\ 4) + \lambda\, (1,\ 4) \,.\, (2,\ 3) = 0 \qquad (\alpha)$$

welche offenbar durch die Coordinaten derselben vier Punkte identisch wird, und daher, weil sie vom 2ten Grade ist, die allgemeine Gleichung aller Linien der zweiten Ordnung sein wird, welche durch die vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4, gelegt werden können.

Damit nun die Curve auch noch den Punkt M_5 enthalte, wird man die Coordinaten dieses Punktes statt x und y in (α) substituiren, wodurch sich eine Bedingungsgleichung ergibt, aus welcher λ gefunden wird. Soll die Curve eine Parabel sein, so bestimmt sich λ aus (α) selbst durch die Bedingung $b^2 - aa' = 0$.

Wenn die Curve, statt durch den Punkt M_5 zu gehen, eine gegebene Gerade berühren soll, so wird man aus (α) mit Hilfe der Gleichung der gegebenen Geraden, $y = mx + n$, eine Veränderliche eliminiren und ausdrücken, dass die Eliminationsgleichung zwei gleich Wurzeln besitze, wodurch sich wieder eine Bedingungsgleichung zur Bestimmung von λ ergibt.

Befinden sich unter den gegebenen Stücken gewisse ausgezeichnete, den Linien zweiter Ordnung zukommende Punkte oder Linien, so wird

dadurch die Anzahl der zur Bestimmung der Curve nöthigen Bedingungen vermindert. Ist z. B. der Mittelpunkt gegeben, wenn es sich um eine Ellipse oder Hyperbel handelt, so sind nur noch drei Bedingungen erforderlich, da dann die Gleichung, wenn der Mittelpunkt als Ursprung genommen wird, nothwendig die Form:

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2 + 1 = 0$$

haben muss, welche nur drei unbestimmte Constanten enthält.

Eben so verhält es sich, wenn ein Brennpunkt gegeben ist. Denn wird dieser als Pol und eine beliebige durch denselben gelegte Gerade als Polaraxe angenommen, so ist die Polargleichung der Linien 2[ter] Ordnung:

$$r = \frac{p}{2[1 + \varepsilon\cos(\alpha + \theta)]},$$

welche nur drei unbestimmte Constanten, p, ε und α enthält. Die zur Bestimmung derselben erforderlichen drei Bedingungen reduciren sich auf zwei, wenn die Curve eine Parabel sein soll, weil für diese $\varepsilon = 1$.

Nehmen wir z. B. an, es seien nebst dem Brennpunkte drei Punkte gegeben, durch welche die Curve gehen soll; bringt man die obige Gleichung auf die Form:

$$r + r\varepsilon\cos(\alpha + \theta) = \tfrac{1}{2}p,$$

so nimmt dieselbe durch Auflösung von $\cos(\alpha + \theta)$ und Einführung zweier neuen Constanten:

$$h = \varepsilon\cos\alpha, \quad k = \varepsilon\sin\alpha,$$

die Form an:

$$r + h.r\cos\theta - k.r\sin\theta = \tfrac{1}{2}p.$$

Es seien nun x, y die rechtwinkeligen Coordinaten eines der gegebenen Punkte, bezogen auf den Pol als Ursprung und die Polaraxe als Abscissenaxe, so ist:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

wodurch sich die letzte Gleichung in folgende verwandelt:

$$r + hx - ky = \tfrac{1}{2}p,$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jeder der drei Punkte liefert nun eine solche Gleichung, aus welchen sofort der Parameter p und die beiden Constanten h und k gefunden werden. Endlich hat man:

$$\varepsilon = \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{h}.$$

Ist die Lage eines Systemes conjugirter Durchmesser gegeben, so bedarf man zur Bestimmung einer Ellipse oder Hyperbel nur noch

zweier, einer Parabel nur einer Bedingung, wie aus den auf ein System conjugirter Durchmesser bezogenen Gleichungen dieser Curven unmittelbar erhellt.

Ist zur Bestimmung einer Hyperbel eine Asymptote gegeben, so vertritt dieses Datum die Stelle von zwei Bedingungen, einer Tangente nämlich mit gegebenem (in unendlicher Entfernung liegenden) Berührungspunkte. Sind beide Asymptoten gegeben, so ist nur noch eine Bedingung erforderlich, da die Asymptotengleichung nur eine Constante enthält.

SIEBENTES KAPITEL.

ÜBER EINIGE ALGEBRAISCHE LINIEN HÖHERER ORDNUNG UND EINIGE TRANSCENDENTE CURVEN.

I. Algebraische Linien höherer Ordnung.

238. Eine erschöpfende Untersuchung der algebraischen Curven von höherer als der zweiten Ordnung, durch Analyse der allgemeinen Gleichungen des 3ten, 4ten, u. s. w. Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, ist in Folge der damit verbundenen Weitläufigkeit und der Unzulänglichkeit der analytischen Hilfsmittel nicht leicht durchführbar. Die Anzahl der in einer Gleichung höheren Grades zwischen zwei Veränderlichen enthaltenen geometrischen Gebilde wächst mit dem Grade ausserordentlich rasch. Schon Newton hat die Linien 3ten Grades untersucht und 72 Arten derselben in 14 Gattungen unterschieden, zu denen Stirling und Cramer noch 6 Arten hinzugefügt haben; Euler theilt sie in 16 Geschlechter. Letzterer hat auch noch die Linien 4ter Ordnung betrachtet und 146 Geschlechter derselben unterschieden, welche wieder eine noch viel grössere Zahl von Arten unter sich begreifen. Bei der geringen praktischen Wichtigkeit fast aller dieser Curven hat man sich daher darauf beschränkt, einzelne derselben, welche sich bei Gelegenheit besonderer Aufgaben dargeboten haben, näher zu untersuchen. Einige der bemerkenswertheren wollen wir im folgenden betrachten.

Unter den Curven höherer Ordnung gehören jene zu den einfachsten, bei welchen die Ordinate durch eine algebraische, ganze, rationale Funktion der Abscisse ausgedrückt ist, deren Gleichung daher die Form hat:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_m x^m.$$

Man nennt diese Curven überhaupt parabolische Curven des m^{ten} Grades, wenn die Funktion rechter Hand vom m^{ten} Grade.*) Da jedem Werthe von x nur ein Werth von y entspricht, welcher gleichzeitig mit x, letzteres sowohl positiv als negativ genommen, unendlich wächst, so bestehen diese Curven aus einem ununterbrochenen, nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Zuge. Wir sind diesen Curven schon in der Theorie der algebraischen Gleichungen begegnet, wo sie von besonderer Wichtigkeit sind.

Eine parabolische Curve des m^{ten} Grades enthält im allgemeinen $m + 1$ Constanten und erfordert daher zu ihrer Bestimmung $m + 1$ von einander unabhängige Bedingungen. Die wichtigste hieher gehörige Aufgabe ist, die Curve so zu bestimmen, dass sie durch $m + 1$ gegebene Punkte gehe; eine Aufgabe, welche mit derjenigen identisch ist, welche in §. 154 aufgelöst wurde.

Parabeln höherer Ordnung nennt man insbesondere Curven, deren Gleichungen die Form $y^n = px^m$ haben; die sogenannte gemeine, conische oder apollonische Parabel: $y^2 = px$, ist hievon ein specieller Fall. Die Curve, deren Gleichung $y^2 = px^3$ ist, heisst insbesondere Neil'sche oder cubische Parabel, und steht mit der gemeinen Parabel in einem nahen Zusammenhang, auf welchen wir später zurückkommen werden. Was überhaupt die Gestalt der Parabeln höherer Ordnung betrifft, so hängt diese wesentlich davon ab, ob die Exponenten m und n, welche immer ganze positive Zahlen sind, beide gerade, oder ungerade, oder der eine gerade, der andere ungerade ist.

239. Aufgabe. Eine Curve von der Beschaffenheit zu finden, dass das Produkt der Entfernungen jedes ihrer

---

*) Die Gl. vom 2ten Grade: $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$, hat die gemeine Parabel zum geometrischen Orte, deren Axe parallel liegt zur Axe der y, deren Scheitel die Grösse $-\frac{A_1}{2A_2}$ zur Abscisse, die Grösse $\frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_2}$ zur Ordinate hat und deren Parameter $= \frac{1}{A_2}$ ist, wie man mit Hilfe der im IV. Kapitel, §. 197 vorgetragenen Lehren leicht findet.

Punkte von zwei festen Punkten einer gegebenen Constanten a^2 gleich sei.

Nehmen wir die Verbindungslinie der festen Punkte F, F' (Fig. 52) zur Abscissenaxe, den Halbirungspunkt O der $FF' = 2e$ zum Ursprung, so ist $\overline{FM}^2 = y^2 + (e - x)^2$, $\overline{F'M}^2 = y^2 + (e + x)^2$, und der Bedingung der Aufgabe gemäss $FM \cdot F'M = a^2$, somit:

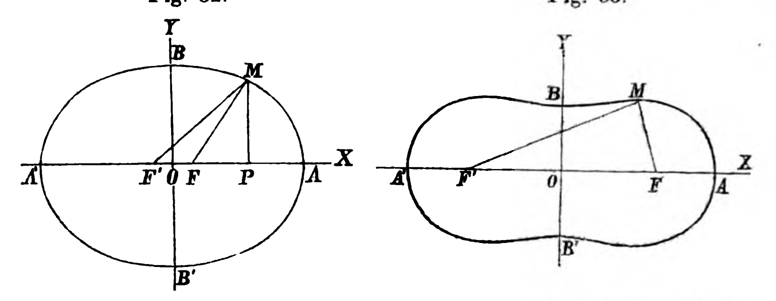
$$[y^2 + (e - x)^2]\,[y^2 + (e + x)^2] = a^4,$$

woraus nach leichter Reduktion:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = a^4 - e^4 \tag{1}$$

als Gleichung der gesuchten Curve gefunden wird. Sie ist, wie man

Fig. 52. Fig. 53.



sieht, vom 4ten Grade und führt den Namen Cassini'sche Curve.

Da die Gl. (1) sich nicht ändert, wenn man $-x$, $-y$ statt x, y schreibt, so ist der Ursprung ein **Mittelpunkt** der Curve, welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbirt. Addirt man zur Gleichung (1) ein Mal $4e^2x^2$, das andere Mal $-4e^2y^2$, so kann sie auf folgende Formen gebracht werden:

$$y^2 = -e^2 - x^2 \pm \sqrt{a^4 + 4e^2x^2}, \tag{2}$$

$$x^2 = e^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 - 4e^2y^2}, \tag{3}$$

woraus zunächst hervorgeht, dass die Curve die Coordinatenaxen zu **Hauptdurchmessern** hat, daher von denselben in symmetrische Theile getheilt wird und in einen begrenzten Raum eingeschlossen ist, also keine unendlichen Aeste besitzt.

Sind x', y' die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit den beiden Axen, so findet man:

$$x' = \pm\sqrt{e^2 \pm a^2}, \quad y' = \pm\sqrt{a^2 - e^2}.$$

Zur weiteren Discussion sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $a > e$; in diesem Falle ist in dem Ausdrucke von x' unter den Wurzelzeichen nur das Zeichen $+$ zulässig, daher die Curve jede der

beiden Axen nur in zwei Punkten schneidet. Jedem Werthe von x, welcher numerisch kleiner ist als $x' = \sqrt{e^2 + a^2}$, entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von y; für jeden grösseren Werth von x wird y imaginär; denn, ist $x^2 < e^2 + a^2$, so hat man $a^2 > x^2 - e^2$, $a^4 > (x^2 - e^2)^2$ oder $a^4 > x^4 - 2e^2x^2 + e^4$, oder $a^4 + 4e^2x^2 > (x^2 + e^2)^2$, d. i. $\sqrt{a^4 + 4e^2x^2} > x^2 + e^2$, somit in (2) y^2 positiv und umgekehrt. Die Curve schliesst daher einen länglichen Raum ein, hat übrigens eine ovale oder ellipsenförmige Gestalt (Fig. 52), wenn $a > e\sqrt{2}$, und eine an den Punkten B, B' eingedrückte (Fig. 53), wenn a zwischen $e\sqrt{2}$ und e liegt.

2) $a = e$. Die Gleichung der Curve ist in diesem Falle:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = 0, \tag{4}$$

oder:

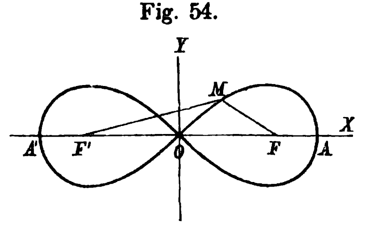
$$y^2 = -e^2 - x^2 + e\sqrt{e^2 + 4x^2},$$

aus welcher für $y = 0$:

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad x' = \pm e\sqrt{2}$$

folgt. Die Curve schneidet daher die Abscissenaxe im Ursprunge und in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten desselben im Abstande $e\sqrt{2}$ liegen. Für jeden Werth von x, welcher numerisch $> e\sqrt{2}$, wird y imaginär, während jedem numerisch kleineren Werthe von x zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von y entsprechen. Hieraus folgt, dass die Curve (Fig. 54) eine schleifenförmige Gestalt hat, wovon sie den Namen Lemniscate oder Schleifenlinie führt. Der Punkt O ist ein sogenannter doppelter Punkt, weil er von der Curve zweimal geschnitten wird. Den grössten Werth erreicht die Ordinate in dem Abstande $x = \pm \frac{1}{2}e\sqrt{3}$ und die entsprechenden Punkte der Curve liegen in einem Kreise, welcher aus dem Punkte O mit dem Halbmesser $OF = e$ beschrieben wird. In der Figur ist $OF = OF' = e$, die halbe Axe $OA = OA' = e\sqrt{2}$ und für jeden Punkt M der Curve:

Fig. 54.



$$FM \,.\, F'M = \overline{OF}^2.$$

3) $a < e$. In diesem Falle wird $y' = \pm\sqrt{a^2 - e^2}$ imaginär, daher die y-Axe von der Curve nicht geschnitten. Letztere schneidet die x-Axe in 4 Punkten, welchen die Abscissen $x_1 = \pm\sqrt{e^2 - a^2}$ und $x_2 = \pm\sqrt{e^2 + a^2}$ zugehören; für jeden Werth von x, welcher numerisch kleiner als x_1 oder grösser als x_2 ist, fällt y imaginär aus, erhält

aber für jedes x, dessen Zahlenwerth zwischen x_1 und x_2 liegt, zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe, daher die Curve in diesem Falle aus zwei getrennten, die festen Punkte F, F' umschliessenden Theilen besteht (Fig. 55).

Fig. 55

Unter diesen verschiedenen Formen ist die Lemniscate die bemerkenswertheste Curve. Die Gleichung derselben wird sehr einfach, wenn man sie durch Polarcoordinaten ausdrückt. Setzt man in (4) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, so erhält man als Polargleichung der Lemniscate:

$$r = \pm c\sqrt{2\cos 2\theta},$$

woraus man zugleich schliessen kann, dass die beiden Tangenten im Punkte O (wo $r = 0$) mit der x-Axe die Winkel $= \pm 45^0$ einschliessen.

Die Lemniscate erscheint auch als der geometrische Ort der Fusspunkte der aus dem Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten gefällten Perpendikel. Ist nämlich überhaupt:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung einer Hyperbel, $y = mx + n \ldots (\alpha)$ die Gleichung einer Tangente an derselben, so ist [§. 221] $a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0 \ldots (\beta)$ die Bedingungsgleichung für die Berührung, und $y = -\frac{1}{m}x \ldots (\gamma)$ die Gleichung des aus dem Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels. Durch Elimination von m und n aus den Gleichungen (α), (β), (γ) erhält man:

$$(y^2 + x^2)^2 + b^2y^2 - a^2x^2 = 0$$

als Gleichung der Fusspunktcurve, welche für $a = b$, d. i. für die gleichseitige Hyperbel in die Gleichung der Lemniscate:

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$$

übergeht, deren halbe Axe $= a =$ der 1sten Halbaxe der Hyperbel ist.

240. Aufgabe. Die Fusspunktcurve der aus dem Scheitel einer Parabel $y^2 = px$ auf die Tangenten gefällten Perpendikel zu finden.

Ist $y = mx + n$ die Gleichung der Tangente, so hat man $p = 4mn$ [§. 231, Gl. (β)] als Bedingung der Berührung und $y = -\frac{1}{m}x$

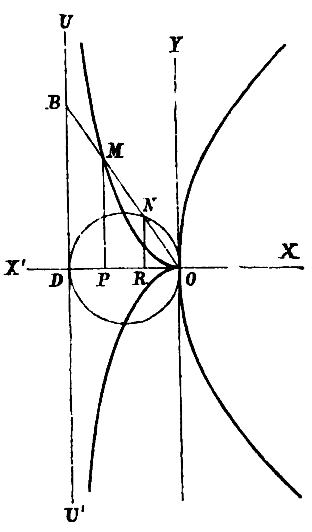
als Gleichung des aus dem Scheitel auf die Tangente gefällten Perpendikels. Durch Elimination von m und n aus diesen drei Gleichungen findet man als Gleichung der gesuchten Curve, welche den Namen Cissois oder Cissoide führt:

$$y^2 = -\frac{4x^3}{p + 4x},$$

woraus sogleich erhellt, dass y nur für solche negative Werthe von x reell wird, welche zwischen 0 und $-\frac{p}{4}$ liegen. Die Curve liegt daher gänzlich zwischen der Directrix UU' (Fig. 56) der Parabel, und der im Scheitel derselben errichteten Tangente OY. Vertauscht man die beiden Halbaxen der x, schreibt also $-x$ statt $+x$, so geht obige Gleichung, wenn man Kürze halber $p = 4q$ setzt, über in:

$$y^2 = \frac{x^3}{q - x}.$$

Fig. 56.



Jedem zwischen 0 und q liegenden Werthe von x entsprechen zwei gleiche, entgegengesetzte Werthe von y, daher die Curve zu beiden Seiten der x-Axe symmetrisch ist. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$, die Curve geht daher durch den Ursprung; mit zunehmendem x wächst auch y und wird unendlich gross für $x = q$. — Der Nenner $q - x$ gibt den Abstand eines Punktes der Cissoide von der Directrix; da nun $q - x = \frac{x^3}{y^2}$, so sieht man, dass dieser Abstand mit wachsendem y immer kleiner wird und der Nulle sich unendlich nähert; die Directrix ist daher eine Asymptote unserer Curve.

Beschreibt man über $OD = q$ als Durchmesser einen Kreis, so ist $y^2 = qx - x^2$ dessen Gleichung; zieht man nun durch den Ursprung O eine beliebige Gerade OB, deren Gleichung $y = ax$ sein mag, so schneidet diese den Kreis und die Cissoide in den Punkten N und M, und man findet für die Abscissen dieser Punkte:

$$OR = \frac{q}{1 + a^2}, \quad OP = \frac{a^2 q}{1 + a^2},$$

somit auch $DP = OD - OP = \frac{q}{1 + a^2} = OR$, folglich $BM = ON$

wodurch ein sehr einfaches Mittel gegeben ist, die Cissoide durch Punkte zu construiren.

II. Transcendente Curven.

241. Im Allgemeinen wird jede Curve, deren Gleichung sich nicht in Form einer algebraischen rationalen Funktion der Parallelcoordinaten x, y darstellen lässt, eine transcendente genannt. Es gehören daher auch solche Curven in diese Classe, in deren Gleichungen x oder y, oder beide Coordinaten zu Potenzen mit irrationalen Exponenten erhoben vorkommen, z. B. $y = x^{\sqrt{2}}$. Wir wollen jedoch hier nur solche betrachten, bei welchen die eine Coordinate durch eine transcendente Funktion der anderen bestimmt ist.

Logarithmische Linie (Logistik).

Bezeichnet e die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist die Gleichung dieser Curve in ihrer einfachsten Gestalt:

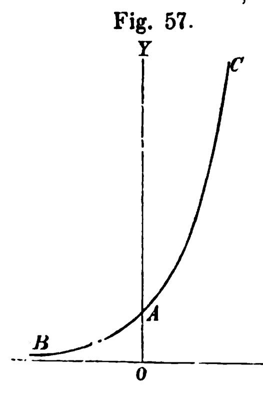
$$y = ae^{\frac{x}{a}}, \quad \text{oder} \quad x = al\frac{y}{a}, \tag{1}$$

oder, wenn a als Längeneinheit angenommen wird:

$$y = e^x, \quad x = ly, \tag{2}$$

so dass also die Abscissen die natürlichen Logarithmen der Ordinaten darstellen. Aus (1) folgt $y = a$ für $x = 0$; die Curve schneidet also die Ordinatenaxe in dem Abstande $OA = a$ vom Ursprunge (Fig. 57). Mit zunehmendem x wird auch y immer grösser und wächst mit x ins Unendliche. Für negative Werthe von x bleibt y positiv, wird jedoch um so kleiner, je grösser der Zahlenwerth von x wird, und unendlich klein für $x = -\infty$; die x-Axe ist daher eine Asymptote der Curve, welche gänzlich oberhalb der x-Axe liegt. Unterhalb dieser Axe liegen nur einzelne, isolirte Punkte in unendlicher Anzahl, welche zwar obigen Gleichungen Genüge leisten, aber keine stetige Folge bilden, daher der Curve nicht angehören. Ein solcher isolirter Punkt ergibt sich nämlich für jeden Werth von x, welcher einen Bruch mit geradem Nenner zum Ausdrucke hat. Denn setzt man $x = \frac{p}{2q} = ly$, so kann man die Gl. (2)

Fig. 57.



auf die Form:

$$\frac{p}{q} = ly^2, \text{ oder } y^2 = e^{\frac{p}{q}}, \text{ d. i. } y = \pm\sqrt{e^{\frac{p}{q}}}$$

bringen; der positive dieser beiden Werthe ist der zur Abscisse $x = \frac{p}{2q}$ gehörige Ordinatenwerth der Curve, der negative liefert einen isolirten Punkt.

Eine allgemeinere Form der Gleichung der logarithmischen Linie ist: $y = mb^{\frac{x}{n}}$, wo b eine positive absolute Zahl, m und n lineare Grössen von beliebigem Zeichen bedeuten. Sie lässt sich leicht auf die Form (1) bringen. Man setze zuerst:

$$b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{a}}, \text{ somit } a = \frac{n}{lb},$$

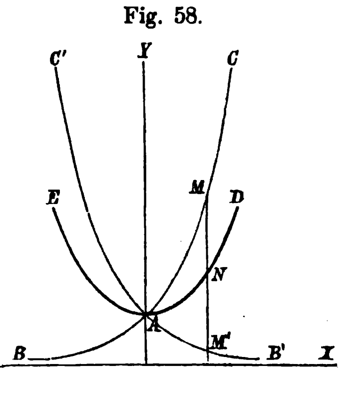
so wird $y = me^{\frac{x}{a}}$. Verrückt man nun den Ursprung auf der Abscissenaxe um das noch unbestimmte Stück ξ, setzt also $x + \xi$ statt x, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$y = me^{\frac{x}{a} + \frac{\xi}{a}} = me^{\frac{\xi}{a}} \cdot e^{\frac{x}{a}},$$

woraus, wenn man ξ so bestimmt, dass $me^{\frac{\xi}{a}} = a$ wird, d. i. wenn man $\xi = al\frac{a}{m}$ setzt, $y = ae^{\frac{x}{a}}$ folgt.

Denkt man sich die logarithmische Linie BAC (Fig. 58), deren Gleichung $y = ae^{\frac{x}{a}}$, um die Axe der y gedreht, so kommt sie in die Lage $B'AC'$ und hat zur Gleichung $y = ae^{-\frac{x}{a}}$. Irgend eine zur y-Axe in dem Abstande $OP = x$ parallele Gerade schneidet diese beiden Curven in den Punkten M und M'; ist nun N der Halbirungspunkt der MM', so hat man $PN = \frac{1}{2}(PM + PM')$, und folglich ist:

Fig. 58.



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

die Gleichung des geometrischen Ortes DAE dieser Halbirungspunkte, welcher somit ebenfalls eine transcendente Curve

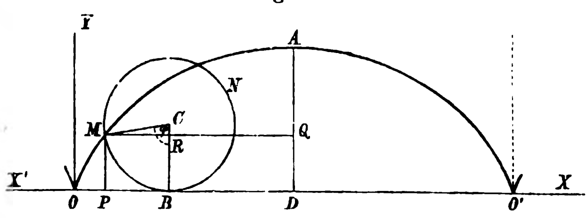
ist. Sie führt den Namen Kettenlinie, weil, wie in der Mechanik gezeigt wird, eine Kette, oder vielmehr ein vollkommen biegsamer, undehnbarer Faden, welcher in allen Punkten durch gleiche Gewichte belastet ist, die Gestalt dieser Curve annimmt.

242. Rolllinien. Wenn sich eine gegebene Curve auf einer anderen festen Curve, ohne zu gleiten, wälzt, so wird ein in der Ebene der ersten Curve liegender, mit ihr fest verbundener Punkt eine Curve beschreiben, welche eine Rolllinie genannt wird. Unter den mannigfaltigen Curven dieser Art wollen wir folgende betrachten.

1. Die gemeine Cycloide.

Lässt man einen Kreis auf einer festen Geraden rollen, so beschreibt irgend ein bestimmter Punkt der Peripherie des Kreises eine Curve, welche gemeine Cycloide, oder auch schlechthin Cycloide genannt wird. Um die Gleichung dieser Curve zu erhalten, sei (Fig. 59) XX' die feste Gerade, Grundlinie, MBN der wälzende Kreis

Fig. 59.



(Erzeugungskreis) in irgend einer seiner Lagen; M der beschreibende Punkt, also ein Punkt der Cycloide, und O ein Punkt in der XX', mit welchem der beschreibende Punkt M in einer früheren Lage des Kreises zusammenfiel. Nehmen wir die XX' als Abscissenaxe, die im Punkte O darauf Senkrechte OY als Ordinatenaxe, so ist $OP = x$, $MP = y$. Setzt man nun den Winkel BCM, den sogenannten Wälzungswinkel $= \varphi$, so ist arc $BM = a\varphi$, wenn a der Halbmesser des Kreises und φ im Bogenmaass für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt ist. Ferner folgt aus der Natur der Wälzung $OB =$ arc $BM = a\varphi$; da nun $OP = x = OB - BP = OB - MR$, und $MR = a \sin\varphi$, ferner $MP = y = CB - CR$, und $CR = a \cos\varphi$ ist, so hat man:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi). \tag{1}$$

Durch Elimination von φ erhält man die Gleichung der Cycloide: es folgt nämlich aus der 2ten dieser Gleichungen: $\cos\varphi = \frac{a - y}{a}$, somit:



$$\varphi = \text{arc cos}\,\frac{a-y}{a},\quad \sin\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2},$$

folglich:

$$x = a\,\text{arc cos}\,\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}. \tag{2}$$

In den meisten Fällen bedient man sich jedoch statt dieser Gleichung (2) mit Vortheil des Systems der Gleichungen (1), welche die Coordinaten x, y eines Punktes der Cycloide durch eine dritte Veränderliche φ ausdrücken, welche aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist.

Für jeden Werth von φ, von der Form $\pm 2n\pi$, wo n eine positive ganze Zahl, wird $y=0$, während die zugehörigen Werthe von x durch den Ausdruck $\pm 2na\pi$ gegeben sind; die Cycloide trifft also die x-Axe in unendlich vielen Punkten $\ldots O, O', \ldots$, welche in der Entfernung $2a\pi$ auf einander folgen, und die Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Bögen, wie OAO', von welchen in der Regel nur einer in Betracht gezogen wird. Die Ordinate erreicht ihren grössten Werth $=2a$ für $\cos\varphi = -1$, d. i. für $\varphi = \pi$, (oder allgemein $\varphi = \pm(2n+1)\pi$), zu welchem Werthe von φ die Abscisse $x = OD = a\pi = \frac{1}{2}OO'$ gehört. Der entsprechende höchste Punkt A der Cycloide heisst der S c h e i t e l. Die zu beiden Seiten des Scheitels liegenden Hälften OA und AO' der Cycloide sind congruent, da bekanntlich $\cos(\pi-\psi) = \cos(\pi+\psi)$ ist. Das aus dem Scheitel senkrecht auf die feste Gerade XX' gefällte Perpendikel AD heisst die A x e der Cycloide.

In den Anwendungen ist es meistens bequemer, den Scheitel A zum Ursprung zu nehmen; werden die neuen Abscissen auf der Axe AD gezählt, so ist $AQ = x'$, $MQ = y'$ und $x = OD - MQ = a\pi - y'$; $y = AD - AQ = 2a - x'$, wodurch die Gleichungen (1) übergehen in:

$$x' = a + a\cos\varphi,\quad y' = a(\pi-\varphi) + a\sin\varphi,$$

oder, wenn man $\pi - \varphi = \psi$ setzt:

$$x' = a(1-\cos\psi),\quad y' = a(\psi + \sin\psi), \tag{3}$$

aus welchen man noch durch Elimination von ψ:

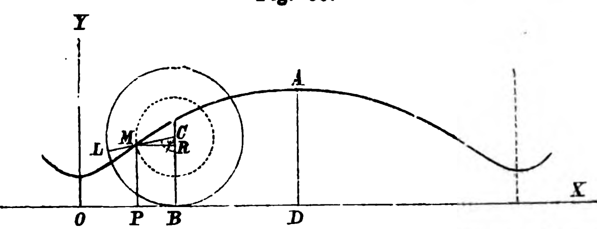
$$y' = a\,\text{arc cos}\,\frac{a-x'}{a} + \sqrt{2ax'-x'^2} \tag{4}$$

findet.

2. Die gedehnte und die verkürzte Cycloide.

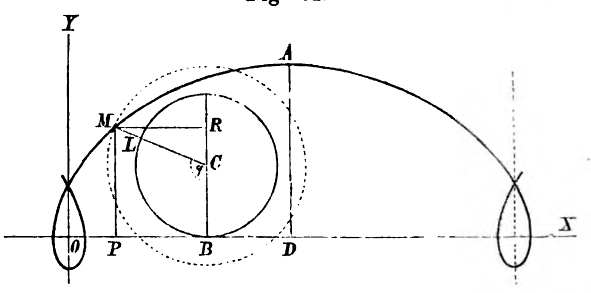
248. Wenn der beschreibende Punkt M nicht in der Peripherie des Erzeugungskreises, sondern innerhalb oder ausserhalb derselben liegt, so entsteht im ersten Falle die sogenannte gedehnte oder geschweifte Cycloide (Fig. 60), im zweiten die verkürzte oder verschlungene Cycloide (Fig. 61). Wählt man wieder die Grundlinie als Abscissenaxe und als Ursprung einen Punkt derselben, in welchem

Fig. 60.



sie den Erzeugungskreis berührt bei einer jener Lagen desselben, wo der beschreibende Punkt vertical unter dem Mittelpunkte liegt; bezeichnet man ferner mit a den Halbmesser des Erzeugungskreises, mit

Fig. 61.



b den Abstand des beschreibenden Punktes M vom Mittelpunkte desselben, mit φ den Wälzungswinkel MCB (Fig. 60 und 61) und setzt $OP = x$, $MP = y$, so erhält man auf dem für die Cycloide betretenen Wege:

$$x = a\varphi - b \sin\varphi, \quad y = a - b \cos\varphi,$$

oder durch Elimination von φ:

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2 - (a-y)^2}$$

als Gleichung der gedehnten oder verkürzten Cycloide, je nachdem $b <$ oder $> a$ ist. Für $a = b$ gehen diese Gleichungen in jene der gemeinen Cycloide über. Nimmt man den Scheitel A als Ursprung und zählt die Abscissen x' auf der Axe AD, so erhält die letztere Gleichung die einfachere Form:

$$y' = a \arccos \frac{b - x'}{b} + \sqrt{2bx' - x'^2}.$$

3. Die Epicycloide und Hypocycloide.

244. Wenn ein Kreis (der Erzeugungskreis) auf der convexen Seite der Peripherie eines anderen festen Kreises, des Grundkreises, fortrollt, so beschreibt ein fester Punkt in der Peripherie des Erzeugungskreises die Epicycloide.

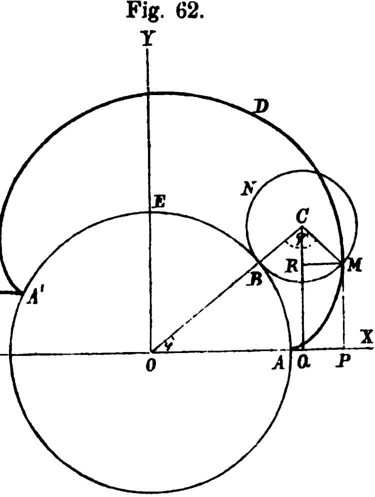


Fig. 62.

Nehmen wir zuerst an, die Berührung der beiden Kreise sei eine äussere, und ABA' (Fig. 62) der Grundkreis; BMN der Erzeugungskreis in einer beliebigen Lage; M der beschreibende Punkt, welcher in einer früheren Lage des letztgenannten Kreises mit dem Punkte A des Grundkreises zusammenfiel. Nehmen wir den Mittelpunkt O des Grundkreises zum Ursprung, den durch A gehenden verlängerten Durchmesser desselben als Abscissenaxe, und fällen wir die Perpendikel MP, CQ und MR, so sind die Coordinaten des Punktes M der Epicycloide:

$$x = OP = OQ + MR; \quad y = MP = CQ - CR;$$

bezeichnen wir nun mit R, r die Halbmesser des Grund- und Erzeugungskreises, mit φ und φ' die Winkel AOB und BCM, so ist zunächst

$$\text{arc } AB = \text{arc } BM, \text{ d. i. } R\varphi = r\varphi', \text{ somit } \varphi' = \frac{R}{r}\varphi;$$

ferner

$$OQ = (R + r)\cos\varphi, \quad MR = r \sin MCR$$
$$CQ = (R + r)\sin\varphi, \quad CR = r \cos MCR,$$

und, da $\angle MCR = \varphi' - (90^0 - \varphi) = -[90^0 - (\varphi + \varphi')] = -[90^0 - \frac{R + r}{r}\varphi]$ ist:

$$\sin MCR = -\cos \frac{R + r}{r}\varphi, \quad \cos MCR = \sin \frac{R + r}{r}\varphi;$$

durch Substitution dieser Werthe in obige Ausdrücke von x und y erhält man für die Epicycloide das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - r\cos\frac{R + r}{r}\varphi, \\ y &= (R + r)\sin\varphi - r\sin\frac{R + r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wenn der Erzeugungskreis aus einer bestimmten Lage z. B. jener, bei welcher M mit A in Berührung war, zu rollen beginnt, so wird, nachdem die Länge des auf dem Grundkreise durchlaufenen Bogens AEA' der Peripherie des Erzeugungskreises gleich geworden ist, der Punkt M wieder in A' auf den Grundkreis fallen, wobei dieser Punkt den epicycloidischen Bogen ADA' beschrieben hat. Bei fortgesetzter Bewegung des Erzeugungskreises wird der Punkt M einen zweiten dem ersteren völlig congruenten Bogen beschreiben, u. s. f. Ist das Verhältniss der beiden Halbmesser $R : r$ irrational, so leuchtet ein, dass keiner der folgenden Bögen mit einem früheren zusammenfallen kann; in diesem Falle besteht die Epicycloide aus unendlich vielen congruenten Bögen. Ist aber das Verhältniss $R : r$ rational, so wird der Punkt M nach einem oder mehreren Umläufen wieder mit A zusammenfallen und von hier an die schon einmal beschriebenen Bögen fort und fort wieder durchlaufen. In diesem Falle besteht also die Epicycloide aus einer endlichen Anzahl von Bögen.

Im letzteren Falle, wenn nämlich das Verhältniss $R : r$ rational ist, führt die Elimination von φ aus den Gleichungen (1) zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y, so dass in diesem Falle die Epicycloide aufhört eine transcendente Curve zu sein. Denn ist $R : r = m : n$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, so gehen die Glgn. (1) über in:

$$x = (R + r) \cos\varphi - r \cos (m + n) \frac{\varphi}{n},$$

$$y = (R + r) \sin\varphi - r \sin (m + n) \frac{\varphi}{n};$$

oder, wenn man $\varphi = n\psi$, $m + n = k$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos n\psi - r \cos k\psi, \\ y &= (R + r) \sin n\psi - r \sin k\psi. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nun lassen sich aber bekanntlich, wenn n und k ganze Zahlen sind, $\cos n\psi$, $\sin n\psi$, $\cos k\psi$, $\sin k\psi$ durch Potenzen von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ rational ausdrücken [§. 71]; substituirt man diese Ausdrücke in (2), so können mit Hilfe der Gleichung $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$, $\sin\psi$ und $\cos\psi$ eliminirt werden, wodurch man offenbar zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y gelangt.

Der einfachste Fall dieser Art ist der, wenn $R = r$ angenommen wird; die Gleichungen der Epicycloide werden dadurch:

$$x = 2r \cos\varphi - r \cos 2\varphi, \quad y = 2r \sin\varphi - r \sin 2\varphi,$$

und verwandeln sich mit Hilfe der bekannten Relationen:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi, \quad \cos 2\varphi = 2 \cos\varphi^2 - 1$$

in folgende:

$$x = r(2 \cos\varphi - 2 \cos\varphi^2 + 1), \quad y = 2r \sin\varphi (1 - \cos\varphi).$$

Verlegen wir den Ursprung, indem wir $x + r$ statt x schreiben, in den Punkt A, (Fig. 63), so kommt:

$$x = 2r \cos\varphi (1 - \cos\varphi),$$
$$y = 2r \sin\varphi (1 - \cos\varphi).$$

Fig. 63.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie quadrirt und addirt:

$$x^2 + y^2 = 4r^2 (1 - \cos\varphi)^2,$$

und durch Division derselben:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

woraus $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, welcher Werth in die vorige Gleichung substituirt:

$$x^2 + y^2 = 2r (\sqrt{x^2 + y^2} - x),$$

oder

$$(x^2 + y^2)^2 + 4rx (x^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0$$

als Gleichung der gesuchten Epicycloide gibt; diese Curve führt von ihrer herzförmigen Gestalt den Namen Cardioide. Setzt man:

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta,$$

so erhält man als Polargleichung der Cardioide:

$$\varrho = 2r (1 - \cos\theta) = 4r \sin \tfrac{1}{2}\theta^2.$$

Zieht man durch den Punkt A eine beliebige Gerade MM', welche den Grundkreis in P schneidet, und setzt $\angle MAX = \theta$, so ist:

$$AM = 2r - 2r \cos\theta, \quad AM' = 2r + 2r \cos\theta,$$

somit:

$$AM + 2r \cos\theta = AM' - 2r \cos\theta = 2r;$$

aus dem $\triangle ABP$ folgt aber $AP = 2r \cos\theta$; folglich ist $PM = PM' = 2r$, welche Eigenschaft der Cardioide ein sehr einfaches Mittel zur Construction derselben darbietet.

245. Wenn der Erzeugungskreis auf der inneren, concaven Seite der Pheripherie des Grundkreises rollt, wobei sein Halbmesser kleiner sein muss, als jener des Grundkreises, so beschreibt ein fester Punkt des ersteren Kreises die Hypocycloide.



Die Gleichungen dieser Curve werden auf dieselbe Weise abgeleitet, wie jene der Epicycloide, wozu die Fig. 64 entworfen ist. Einfacher ergeben sie sich aus jenen der Epicycloide, indem man den Halbmesser des Erzeugungskreises mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Dadurch erhält man für die **Hypocycloide** das System der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \\ y &= (R - r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Hypocycloide besteht ebenfalls aus unendlich vielen, dem Bogen ADA' gleichen Zügen, wenn das Verhältniss $R : r$ irrational ist. Sind aber diese Halbmesser commensurabel, so ist die Anzahl der Bögen eine endliche, und die Hypocycloide in diesem Falle eine algebraische Curve, da man durch Elimination von φ aus den Glgn. (1) zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y gelangt.

Fig 64.

Ein bemerkenswerthes Resultat ergibt sich für die Annahme $R = 2r$; damit gehen die Glgn. (1) über in:

$$x = 2r\cos\varphi, \quad y = 0,$$

welche offenbar dem durch den Anfangspunkt A der Bewegung gezogenen Durchmesser des Grundkreises angehören. Die Hypocycloide ist also in diesem Falle eine gerade Linie und zwar der besagte Durchmesser des Grundkreises.

Ist der Halbmesser r des Erzeugungskreises grösser als jener des Grundkreises, so erfolgt offenbar die Wälzung — bei innerer Berührung der Kreise — auf der convexen Seite des Grundkreises, und die erzeugte Rolllinie ist wieder eine Epicycloide. Denn setzen wir in obigen Gleichungen (1) $r = R + \varrho$, so nehmen sie die Form an:

$$x = (R + \varrho)\cos\frac{\varrho}{R+\varrho}\varphi - \varrho\cos\varphi,$$

$$y = (R + \varrho)\sin\frac{\varrho}{R+\varrho}\varphi - \varrho\sin\varphi,$$

und verwandeln sich, wenn man noch:

$$\frac{\varrho}{R+\varrho}\varphi = \psi, \quad \text{also } \varphi = \frac{R+\varrho}{\varrho}\psi$$

setzt, in folgende:

$$x = (R+\varrho)\cos\psi - \varrho\cos\frac{R+\varrho}{\varrho}\psi$$

$$y = (R+\varrho)\sin\psi - \varrho\sin\frac{R+\varrho}{\varrho}\psi,$$

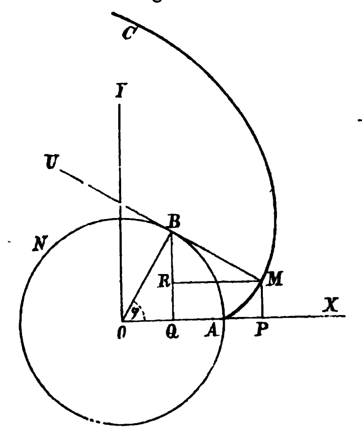
welche einer Epicycloide angehören, deren Erzeugungskreis vom Halbmesser ϱ den Grundkreis vom Halbmesser R von aussen berührt.

Man sieht hieraus, dass jede Epicycloide auf zweifache Weise erzeugt werden kann; entweder, wenn auf dem Grundkreise vom Halbmesser R der Erzeugungskreis vom Halbmesser r so rollt, dass die Kreise sich von aussen berühren; oder, wenn sich auf demselben Grundkreise vom Halbmesser R ein Erzeugungskreis vom Halbmesser $R+r$ wälzt, und dabei die Kreise sich von innen berühren.

4. Die Kreisevolvente.

246. Wenn eine gerade Linie, die erzeugende Gerade, an der Peripherie eines Kreises, des Grundkreises, sich, ohne zu gleiten, so bewegt, dass sie mit dem Kreise beständig in Berührung bleibt, so beschreibt ein fester Punkt der Geraden eine Curve, welche den Namen Kreisevolvente führt.

Fig. 65.



Sei (Fig. 65) ABN der Grundkreis, UM die erzeugende Gerade in einer beliebigen Lage, in welcher sie den Kreis im Punkte B berührt, M der beschreibende Punkt, welcher in einer früheren Lage der Geraden mit dem Punkte A des Kreises zusammenfiel; R der Halbmesser des Kreises, $\angle AOB = \varphi$. Nimmt man O als Ursprung, und den verlängerten Durchmesser OA als Abscissenaxe, so ist für den Punkt M der Curve:

$$OP = x = OQ + MR; \quad MP = y = BQ - BR.$$

$$OQ = R\cos\varphi, \qquad MR = BM\sin\varphi,$$

$$BQ = R\sin\varphi, \qquad BR = BM\cos\varphi,$$

endlich $BM = \text{arc } AB = R\varphi$. Durch Substitution dieser Werthe erhält man für die Kreisevolvente das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \\ y &= R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Man kann die Kreisevolvente als Epicycloide betrachten, bei welcher der Halbmesser des Erzeugungskreises unendlich gross ist, wodurch dieser in eine gerade Linie degenerirt. In der That gehen die Glgn. (1) der Epicycloide [§. 244] in jene der Kreisevolvente über, wenn man $r = \infty$ setzt. Aus der ersten derselben folgt nämlich durch Auflösung des Cosinus:

$$x = R\cos\varphi + r\cos\varphi - r\cos\frac{R}{r}\varphi \, . \cos\varphi + r\sin\frac{R}{r}\varphi \, . \sin\varphi,$$

$$= R\cos\varphi + r\cos\varphi\left(1 - \cos\frac{R}{r}\varphi\right) + r\sin\frac{R}{r}\varphi \, . \sin\varphi,$$

$$= R\cos\varphi + 2r\cos\varphi\left(\sin\frac{R}{2r}\varphi\right)^2 + r\sin\frac{R}{r}\varphi \, . \sin\varphi.$$

Setzen wir $\frac{R}{2r}\varphi = \alpha$, also $r = \frac{R\varphi}{2\alpha}$, so kommt:

$$x = R\cos\varphi + R\varphi\cos\varphi \, . \frac{\sin\alpha^2}{\alpha} + R\varphi\sin\varphi \, . \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

Lassen wir nun r unendlich zunehmen, so wird α unendlich klein, folglich, weil:

$$\lim\frac{\sin\alpha^2}{\alpha} = \lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} \, . \sin\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \lim\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 1 \ \text{ist},$$

$$x = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi).$$

Dieselbe Behandlung gestattet die Gl. für y.

Will man die Curve durch Polarcoordinaten ausdrücken, so hat man, wenn $OM = \varrho$, $\angle MOP = \theta$ gesetzt wird, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ somit:

$$\varrho = R\sqrt{1 + \varphi^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \varphi}{1 + \varphi\operatorname{tg}\varphi}.$$

Wie man sieht, nimmt ϱ mit φ unendlich zu; die Curve zieht sich demnach in unendlich vielen schneckenförmigen, sich immer erweiternden Windungen um den Kreis herum, und schliesst sich in Folge dieser Eigenschaft an die Familie der Spirallinien an, von welchen wir die bemerkenswerthesten noch kurz betrachten wollen.

Spirallinien.

247. Spirallinie oder Spirale heisst jede Curve, welche sich in unendlich vielen, sich immer erweiternden oder verengernden Win-

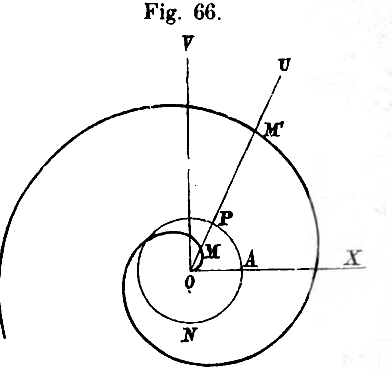
dungen um einen festen Punkt herumzieht, in welchem sie entweder ihren Anfang hat, oder welchem sie sich ohne Ende nähert. Es liegt in der Natur dieser Curven, dass ihre Gleichungen durch Anwendung von Polarcoordinaten die einfachste Form erhalten, wobei das am Schlusse des §. 236 Gesagte zu berücksichtigen ist.

1) Die archimedische Spirale. (Fig. 66) Ihre Gleichung ist:

$$r = a\theta,$$

wo r den Radiusvektor OM eines beliebigen Punktes der Curve, θ den Polarwinkel MOX bedeutet, im Bogenmaass für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt, (also den Bogen AP des mit dem Halbmesser $= 1$ aus O beschriebenen Kreises APN), und a eine lineare Constante. Die Gleichung zeigt, dass die Radienvektoren den von denselben beschriebenen Winkeln proportional sind. Man kann sich daher diese Spirale auf folgende Weise durch eine stetige Bewegung erzeugt denken. Eine bewegliche Gerade OU von unbegrenzter Länge drehe sich um den Punkt O, und auf derselben bewege sich ein Punkt M dergestalt, dass die von demselben durchlaufenen Wege den von dem beweglichen Radiusvektor beschriebenen Winkeln proportional sind; der Punkt M beschreibt dann die archimedische Spirale.

Fig. 66.



Ertheilt man in (1) dem Bogen θ negative Werthe, so drückt diese Gleichung dieselbe Spirale, aber in entgegengesetzter Lage aus, welche man erhält, wenn man die in der Figur gezeichnete um OV dreht. Beide Spiralzüge sind in derselben Gleichung enthalten, wiewohl in der Regel blos der eine in Betracht gezogen wird.

Sind r, r' die Vektoren zweier Punkte M, M' der Spirale, welche zu zwei um 360^0 verschiedenen Polarwinkeln gehören, so ist $r' = a(\theta + 2\pi)$, wenn $r = a\theta$, somit $r' - r = 2a\pi$, woraus folgt, dass der Abstand MM' der einzelnen Windungen von einander, auf dem Radiusvektor gezählt, in der archimedischen Spirale constant ist.

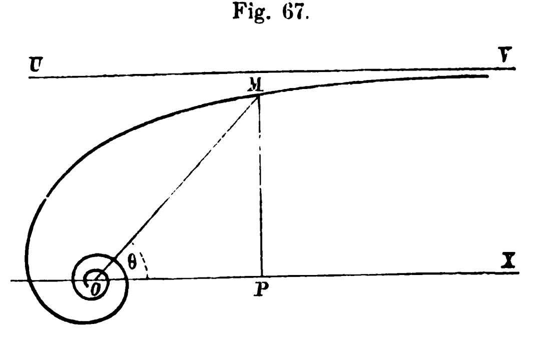
2) Die hyperbolische Spirale, (Fig. 67); ihre Gleichung ist:

$$r\theta = a, \tag{2}$$

von deren Aehnlichkeit mit der Asymptotengleichung der Hyperbel der

Name dieser Spirale herrührt. Für $\theta = 0$ ist $r = \infty$; mit zunehmendem θ wird r immer kleiner, ohne je $= 0$ zu werden. Die Curve macht daher nach der einen Seite unendlich viele immer kleiner und kleiner werdende Windungen um den Pol, ohne ihn je zu erreichen, wobei zugleich der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen immer kleiner wird. Der Pol bildet hier einen sogenannten asymptotischen Punkt.

Fig. 67.



Ist M ein Punkt der Curve, $OM = r$, $\angle MOP = \theta$, $MP = y$, so hat man $r = \frac{a}{\theta}$ und $y = r \sin\theta$, somit:

$$y = a \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Für jedes $\theta > 0$, ist $\frac{\sin\theta}{\theta} < 1$, folglich $y < a$; je kleiner aber θ wird, desto mehr nähert sich (weil $\lim \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$) die Ordinate y der Grösse a, wobei gleichzeitig r unendlich zunimmt. Hieraus folgt, dass die hyperbolische Spirale nach der anderen Seite die Gerade UV, welche in dem Abstande $= a$ zur Polaraxe parallel läuft, zur Asymptote hat.

3. Die **logarithmische Spirale** geht aus der logarithmischen Linie hervor, wenn man die Coordinaten x, y in der Gl. der letzteren Curve [Gl. (1), §. 241] als Polarcoordinaten betrachtet; die Gleichung der logarithmischen Spirale ist daher:

$$r = ae^{\frac{\theta}{a}} \text{ oder } \theta = al\frac{r}{a},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Für $\theta = 0$ wird $r =$ und für jeden positiven Werth von θ ergibt sich ein mit θ fort un fort wachsender Werth von r; für $\theta = \infty$ wird auch $r = \infty$. Fü negative Werthe von θ wird r (von $r = a$ angefangen, entsprechend $\theta = 0$) immer kleiner, je grösser der Zahlenwerth von θ wird, und

unendlich klein für $\theta = -\infty$. Die logarithmische Spirale macht daher unendlich viele Windungen um den Pol herum, welche nach der einen Seite ins Unendliche sich fortsetzen, dabei ihren Abstand immer vergrössernd, nach der anderen Seite, sich immer mehr und mehr verengernd, dem Pole sich unendlich nähern, ohne ihn je zu erreichen. Der Pol ist daher auch hier ein asymptotischer Punkt. Negative Werthe von r sind nur für solche Werthe von θ möglich, welche einen Bruch mit geradem Nenner zum Ausdrucke haben; solchen Werthen von θ entsprechende Punkte existiren daher wohl unendlich viele, bilden aber keine stetige Folge.

II. ABSCHNITT.

ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME.

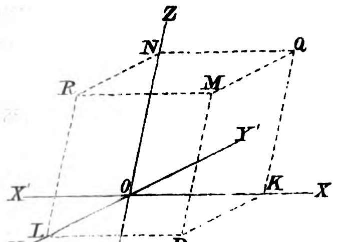
ERSTES KAPITEL.

BESTIMMUNG DER LAGE EINES PUNKTES IM RAUME. — COORDINATEN-SYSTEME. — TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

248. Denken wir uns durch einen festen Punkt O (Fig. 68) im Raume drei unter beliebigen Winkeln gegen einander geneigte unbegrenzte Ebenen gelegt, welche sich in den drei Geraden oder Axen XX', YY', ZZ' schneiden. Der Raum wird durch jede dieser Ebenen in zwei Partien, somit durch die Gesammtheit der drei Ebenen in acht dreiflächige Körperwinkel getheilt.

Es sei nun M ein Punkt in einem dieser Körperwinkel; fällen wir von demselben, parallel zu den Axen OZ, OY, OX die Geraden MP, MQ, MR auf die genannten Ebenen, so ist klar, dass die Lage des Punktes M in dem in Rede stehenden Körperwinkel durch die Längen dieser drei Geraden unzweideutig bestimmt ist. Denn legt man durch den Punkt M drei zu den obigen festen Ebenen parallele Ebenen, so schliessen die sechs Ebenen ein schiefwinkeliges Parellelepiped ein, in welchem die Punkte O und M gegenüberliegende Ecken bilden, und welches durch die drei im Punkte O zusammenstossenden Kanten $OK = MR$, $OL = MQ$, $ON = MP$ vollkommen bestimmt ist, da die von denselben eingeschlossenen Winkel als gegeben zu betrachten sind.

Fig. 68.



Die parallel zu den Axen genommenen Abstände MR, MQ, MP heissen die **Coordinaten** des Punktes M; die festen Ebenen XOY,

XOZ, YOZ werden Coordinaten-Ebenen oder coordinirte Ebenen; ihre Durchschnittslinien XX', YY', ZZ' die Coordinaten-Axen; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O derselben der Ursprung oder Anfangspunkt genannt. Das Coordinatensystem heisst ein rechtwinkeliges, wenn die coordinirten Ebenen auf einander senkrecht stehen; in jedem anderen Falle ein schiefwinkeliges.

Die drei Coordinaten eines Punktes M pflegt man mit den Buchstaben x, y, z zu bezeichnen, und nennt die Axen, welchen diese Coordinaten beziehungsweise parallel sind, Axe der x, Axe der y, Axe der z. In jeder der drei coordinirten Ebenen liegen zwei Axen, von welchen diese Ebenen die Namen: Ebene der xy, Ebene der xz, Ebene der yz erhalten. Bei der graphischen Darstellung werden die Coordinaten des Punktes M:

$$MR = x, \quad MQ = y, \quad MP = z$$

gewöhnlich durch die gleichgeltenden Strecken $OK = MR$, $PK = MQ$ und MP zur Darstellung gebracht.

Denkt man sich nun die Coordinaten-Ebenen nach allen Seiten ins Unendliche erweitert, so entsprechen denselben numerischen Werthen der drei Coordinaten x, y, z offenbar acht Punkte, welche in den oben erwähnten acht körperlichen Ecken liegen. Um diese acht Punkte von einander zu unterscheiden, genügt es, die Coordinaten noch mit den gehörigen Vorzeichen zu versehen, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem dieselben auf den zugehörigen Axen vom Ursprunge aus nach der einen, oder nach der anderen entgegengesetzten Richtung abgeschnitten werden. Der Ursprung theilt sodann jede der Axen in zwei Hälften, eine positive und eine negative; in den Figuren werden die positiven Halbaxen durch OX, OY, OZ vorgestellt, und in der Regel allein gezeichnet.

Sind m, n, p die numerischen Werthe der Coordinaten eines Punktes, so ergibt sich für die acht möglichen Lagen desselben folgendes Schema:

$$\begin{array}{llll}
x = +m & x = -m & x = -m & x = +m \\
y = +n & y = +n & y = -n & y = -n \\
z = +p & z = +p & z = +p & z = +p \\
x = +m & x = -m & x = -m & x = +m \\
y = +n & y = +n & y = -n & y = -n \\
z = -p & z = -p & z = -p & z = -p.
\end{array}$$

Bezeichnen wir daher mit a, b, c die mit den gehörigen Vorzeichen versehenen Werthe der Coordinaten eines Punktes, so ist die Lage

desselben im Raume durch die drei Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

vollkommen bestimmt; sie werden daher die Gleichungen des Punktes genannt.

Liegt der Punkt in einer der coordinirten Ebenen, so ist die den Abstand desselben von dieser Ebene ausdrückende Coordinate $= 0$; zwei seiner Coordinaten werden Null, wenn er in einer der Axen liegt; endlich gehören die Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dem Ursprunge selbst an.

249. Die Punkte P, Q, R (Fig. 68, S. 420), in welchen die Coordinaten des Punktes M die coordinirten Ebenen treffen, sind die — parallel zu den Axen genommenen — Projectionen des Punktes M auf die genannten Ebenen. Bezeichnen wir, wie oben, mit a, b, c die Coordinaten des Punktes M, so sind offenbar:

$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}$ die Gleichungen der Projection des Punktes M auf die Ebene der xy.

$\left.\begin{array}{l} x = a \\ z = c \end{array}\right\}$ die Gleichungen der Projection des Punktes M auf die Ebene der xz.

$\left.\begin{array}{l} y = b \\ z = c \end{array}\right\}$ die Gleichungen der Projection des Punktes M auf die Ebene der yz.

Von diesen drei Systemen von Gleichungen ist jedes eine Folge der beiden anderen und kann aus diesen abgeleitet werden, woraus folgt, dass die Lage eines Punktes im Raume durch zwei Projectionen desselben vollkommen bestimmt ist. Aus diesem Grunde reicht die darstellende Geometrie bekanntlich mit zwei Projectionsebenen aus, während die analytische Geometrie dreier Coordinaten-Ebenen bedarf, weil zwei Projectionen zu ihrer analytischen Bestimmung drei Coordinaten erfordern.

In den meisten Fällen kommen rechtwinkelige Coordinatensysteme zur Anwendung; dann sind P, Q, R die senkrechten oder orthogonalen Projectionen des Punktes M, und wir wollen, bevor wir weiter gehen, einige Sätze über derlei Projectionen voranschicken, welche uns von Nutzen sein werden.

1) Fällt man aus den Endpunkten einer begrenzten Strecke $= l$ Senkrechte auf eine Gerade G (die Projectionsaxe), so heisst das zwischen den Fusspunkten der Senkrechten liegende Stück der Geraden G die Projection der Strecke l auf die Gerade G. — Liegen die projicirte Gerade und die Projectionsaxe in einer Ebene, so ist, wenn

die Projection mit p, der Neigungswinkel beider Geraden mit α bezeichnet wird, offenbar

$$p = l \cos \alpha.$$

Diese Gleichung gilt aber auch dann, wenn die beiden Geraden nicht in derselben Ebene liegen. Man überzeugt sich hievon sehr leicht, wenn man beachtet, dass unter dem Neigungswinkel zweier sich nicht schneidenden Geraden immer derjenige Winkel zu verstehen ist, welchen zwei Gerade einschliessen, die durch einen beliebigen Punkt parallel zu den gegebenen Geraden gezogen werden. Legt man sodann durch die Endpunkte A, B der Strecke $AB = l$ zwei auf die Projectionsaxe senkrechte Ebenen, welche die Axe in den Punkten A', B' schneiden, ferner durch den einen Endpunkt A eine zur Axe parallele Gerade AC, welche die durch B gelegte Ebene in C trifft, so ist offenbar $p = A'B' = AC$, und in dem bei C rechtwinkeligen $\triangle\ ACB : AC = AB \cos BAC$; der Winkel BAC ist aber eben der Neigungswinkel α der Geraden l gegen die Axe, somit $p = l \cos \alpha$, wie oben.

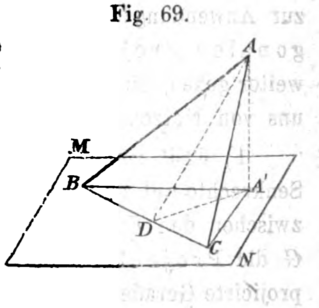
2) Die Projection einer Geraden l auf eine Ebene ist die Folge der Projectionen sämmtlicher Punkte der Geraden auf diese Ebene, folglich eine in dieser Ebene liegende Gerade, welche von den Projectionen der Endpunkte der Strecke l begrenzt wird. Ist α der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene, so hat man offenbar wieder $p = l \cos \alpha$.

3) Unter Projection einer ebenen Figur auf eine Ebene versteht man die in letzterer Ebene liegende Figur, welche von der Projection des Umfanges der projicirten Figur eingeschlossen wird. Ist die projicirte Figur ein Dreieck, F dessen Flächeninhalt, f jener der Projection desselben auf eine Ebene, welche gegen die Ebene des Dreieckes unter dem Winkel α geneigt ist, so ist wieder:

$$f = F \cos \alpha.$$

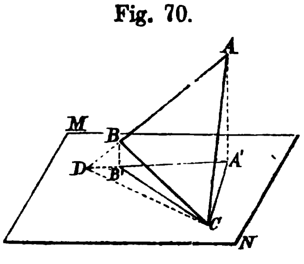
Denn es sei ABC (Fig. 69) das auf die Ebene MN zu projicirende Dreieck, und nehmen wir zuerst an, dass eine Dreiecksseite BC in der Ebene MN liege; fällt man von A das Loth AA' auf die Ebene, so ist $A'BC$ die Projection des $\triangle\ ABC$; zieht man nun $A'D$ senkrecht auf BC, so ist auch AD senkrecht auf BC, somit $\angle\ ADA' = \alpha$; folglich $A'D = AD \cos \alpha$, und $BC \,.\, A'D = BC \,.\, AD \cos \alpha$, d. i. $f = F \cos \alpha$.

Fig. 69.



Liegt keine der Dreiecksseiten in der Projectionsebene, so nehme man an, dass letztere durch eine der Dreiecksecken, etwa C (Fig. 70) gehe, was immer gestattet ist, weil sich die Projection offenbar nicht ändert, wenn man die Projectionsebene parallel zu sich selbst verschiebt. Fällt man sodann aus A und B die Lothe AA' und BB', verlängert AB bis zum Durchschnittspunkte D mit der Projections-Ebene und zieht DC, so ist nach Obigem: $A'CD = ADC \cos\alpha$, $B'CD = BCD \cos\alpha$, aus welchen Gleichungen durch Subtraktion wieder $A'B'C = ABC \cos\alpha$, d. i. $f = F \cos\alpha$ folgt.

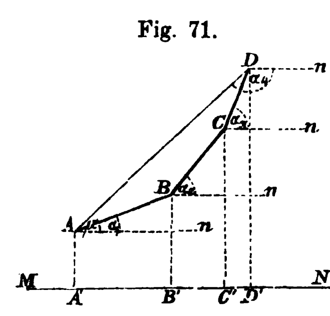
Fig. 70.



Da ferner jedes ebene Polygon in Dreiecke zerlegt und jede von einer krummen Linie umschlossene Figur als Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der durch die Gleichung $f = F \cos\alpha$ ausgesprochene Satz für jede wie immer gestaltete ebene Figur.

4) Sei $ABCD$ (Fig. 71) ein System von mehreren aufeinander folgenden Geraden, gleichgiltig, ob dieselben in einer Ebene liegen, oder nicht. Legen wir durch die Eckpunkte A, B, C, D Ebenen senkrecht auf eine beliebige Axe MN, so sind die auf letzterer von diesen Ebenen abgeschnittenen Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ die Projectionen der Seiten AB, BC, CD der gebrochenen Linie. Bezeichnen wir diese Seiten mit a_1, a_2, a_3; die Neigungswinkel derselben gegen die Projectionsaxe MN mit α_1, α_2, α_3. Da für die Neigung zweier Geraden zwei, einander zu 180^0 ergänzende Winkel genommen werden können, so ist im vorliegenden Falle, wo es sich um die Verbindung mehrerer Projectionen handelt, unzweideutig zu bestimmen, welcher von beiden Winkeln zu wählen sei. Zu diesem Zwecke nehmen wir jenen der beiden Endpunkte einer Seite, welchen ein das Liniensystem in einem bestimmten Sinne (z. B. A, B, C, etc.) durchlaufender Punkt zuerst überschreitet, als Anfangspunkt dieser Seite an, und ziehen durch den Anfangspunkt jeder Seite nach derselben Richtung eine Parallele zur Projectionsaxe (An, Bn, Cn, etc.). Als Neigungswinkel einer Seite gegen die Axe ist dann der 180^0 nicht überschreitende Winkel

Fig. 71.



zu nehmen, welchen diese Seite mit der durch ihren Anfangspunkt gelegten Parallelen zur Axe einschliesst.

Ziehen wir noch die das Polygon schliessende Gerade AD, welche wir die Resultirende nennen und mit R bezeichnen wollen, so ist $A'D'$ deren Projection, und, wenn wir zunächst den Anfangspunkt A des Liniensystems auch als Anfangspunkt der Resultirenden annehmen, der Winkel $DAn = \mu$ ihr Neigungswinkel gegen die Axe MN. Sind nun diese Winkel sämmtlich spitzig, so hat man offenbar

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D', \qquad (m)$$

d. i.

$$R \cos \mu = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3.$$

Kommen aber unter diesen Winkeln stumpfe vor, so werden die in die Cosinusse derselben multiplicirten Glieder dieser Gleichung negativ; gleichzeitig müssen aber die diesen stumpfen Winkeln entsprechenden Projectionen in die Summe (m) subtraktiv eingehen, wie man sich an einer Figur sehr leicht überzeugt, so dass der in obiger Gleichung ausgesprochene Satz:

Die Summe der Projectionen mehrerer auf einander folgenden Geraden auf eine beliebige Axe ist gleich der Projection der Resultirenden,

allgemein gilt. Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

In jedem geschlossenen Polygone ist die Summe der Projectionen sämmtlicher Seiten auf eine beliebige Axe $= 0$.

In der That, lässt man den Unterschied zwischen Seiten und Resultirenden fallen, so muss der Neigungswinkel der letzteren in demselben Sinne gezählt werden, wie bei den Seiten; somit hat man für die Seite $AD = R = a_4$ den Punkt D als Anfangspunkt und den Winkel $\alpha_4 = 180^0 - \mu$ zu nehmen, wodurch $R \cos \mu = - a_4 \cos \alpha_4$ wird, und obige Gleichung in folgende übergeht:

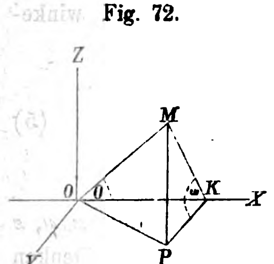
$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos \alpha_4 = 0.$$

Es folgt auch hieraus, dass, wenn zwei Polygone eine gemeinschaftliche Seite haben, die Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf eine beliebige Gerade bei beiden Polygonen gleich gross ist.

250. Seien (Fig. 72) OX, OY, OZ die positiven Richtungen der drei aufeinander senkrechten Coordinatenaxen, M ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten $OK = x$, $PK = y$, $MP = z$. Denken wir uns durch OX und M eine Ebene OKM gelegt, so ist die Lage des

Punktes M offenbar bestimmt, wenn man seine Entfernung $OM = r$ vom festen Punkte O, dem Pole; den Winkel $MOX = \theta$, welchen die OM mit der festen Axe OX, der Polaraxe, einschliesst; und endlich den Neigungswinkel $MKP = \omega$ der Ebene OKM gegen eine feste durch OX gelegte Ebene XOY, die Grundebene kennt. Diese drei Bestimmungsstücke werden Polarcoordinaten des Punktes M genannt; die Entfernung OM des Punktes M vom Pole heisst der Radiusvektor. Dieser wird in der Regel immer positiv genommen, der Winkel θ von 0^0 bis 180^0, der Winkel ω von 0^0 bis 360^0 gezählt, wodurch diese Coordinaten offenbar die Fähigkeit erhalten, jeden beliebigen Punkt im Raume zu erreichen und zu bestimmen.

Fig. 72.



Fällt der Pol mit dem Ursprunge eines rechtwinkeligen Parallelcoordinatensystemes, die Polaraxe mit der Axe der x, die Grundebene mit der Ebene der xy zusammen, so bestehen zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes M und seinen Polarcoordinaten die Gleichungen:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\omega, \quad z = r\sin\theta\sin\omega, \tag{1}$$

welche sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken OKM und KPM leicht ergeben. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie quadrirt und addirt, sowie durch Division derselben:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{z}{y}, \tag{2}$$

wobei θ im 1ten oder 2ten Quadranten zu nehmen ist, je nachdem x positiv oder negativ; ω aber in jenem der 4 Quadranten, welcher das Zeichen von $\cos\omega$ mit jenem von y, und das Zeichen von $\sin\omega$ mit jenem von z zur Uebereinstimmung bringt.

Wie man sieht, sind die rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z eines Punktes M nichts anderes, als die Projectionen seines Radiusvektors auf die drei Coordinatenaxen; bezeichnet man daher mit α, β, γ die Winkel, welche derselbe mit diesen Axen bildet, so ist:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \tag{3}$$

Hieraus folgt, wenn man quadrirt und addirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2),$$

folglich mit Rücksicht auf die erste der Glgn. (2):

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1. \tag{4}$$

Die drei Winkel α, β, γ sind demnach nicht unabhängig von einander, und wenn zwei derselben gegeben sind, so ist der 3te durch die Gl. (4) bestimmt.

Man kann die Grössen α, β, γ, r als eine andere Art von Polarcoordinaten betrachten, welche mit Hilfe der Glgn. (3) in rechtwinkelige umgesetzt werden. Umgekehrt hat man:

$$\left.\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

251. Es seien M und M' (Fig. 73) zwei Punkte im Raume, x, y, z und x', y', z' deren Coordinaten, $D = MM'$ ihre Entfernung. Denken wir uns durch jeden der Punkte M, M' drei zu den coordinirten Ebenen parallele Ebenen gelegt, so schliessen diese ein rechtwinkeliges Parallelepipedum ein, welches die $MM' = D$ zur Diagonale, und die Differenzen der gleichnamigen Coordinaten: $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ zu Seiten hat, deren Quadratsumme bekanntlich dem Quadrate der Diagonale gleich ist. Man hat daher:

Fig. 73.

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (1)$$

als Ausdruck der Distanz zweier Punkte im Raume in Funktion ihrer rechtwinkeligen Coordinaten.

Die Differenzen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ sind, wie man leicht sieht, die Projectionen der $MM' = D$ auf die Coordinatenaxen; es drückt somit die Gl. (1) den Satz aus: Das Quadrat einer begrenzten geraden Linie ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei aufeinander senkrechte Gerade.

Bezeichnet man mit λ, μ, ν die Neigungswinkel der $MM' = D$, in der Richtung von M gegen M' genommen, gegen die positiven Halbaxen der x, y, z, so hat man:

$$x' - x = D\cos\lambda, \quad y' - y = D\cos\mu, \quad z' - z = D\cos\nu, \quad (2)$$

somit:

$$\cos\lambda = \frac{x' - x}{D}, \quad \cos\mu = \frac{y' - y}{D}, \quad \cos\nu = \frac{z' - z}{D}, \quad (3)$$

welche Gleichungen, in Verbindung mit (1) die Winkel finden lassen, welche die MM' mit den Axen einschliesst, wobei D positiv zu nehmen ist.

Quadrirt und addirt man die Glgn. (3), so erhält man:

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1; \tag{4}$$

es ist somit die Summe der Quadrate der Cosinusse der Winkel, welche irgend eine Gerade mit den Coordinatenaxen einschliesst, $= 1$; ein schon durch Gl. (4) des vor. §. ausgesprochener Satz, da man [§. 249, 1)] unter den Winkeln, welche eine beliebige Gerade im Raume mit den Axen einschliesst, diejenigen zu verstehen hat, welche eine durch den Ursprung gezogene Parallele mit denselben bildet.

Seien ferner r, r' die Radienvektoren der Punkte M und M'; α, β, γ und α', β', γ' die Neigungswinkel derselben gegen die positiven Halbaxen der x, y, z, so ist:

$$\left.\begin{array}{lll} x = r\cos\alpha, & y = r\cos\beta, & z = r\cos\gamma, \\ x' = r'\cos\alpha', & y' = r'\cos\beta', & z' = r'\cos\gamma'; \end{array}\right\} \tag{m}$$

führt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man:

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

Bezeichnet man aber mit δ den Winkel MOM', welchen die zwei Radienvektoren einschliessen, so ist bekanntlich:

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta,$$

aus welcher Gleichung, mit Rücksicht auf die vorhergehende, folgt:

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \tag{5}$$

Diese Gleichung drückt nun nicht nur den Winkel aus, welchen zwei gegen die Coordinaten-Axen unter den Winkeln α, β, γ, und α', β', γ' geneigte Radienvektoren einschliessen, sondern ganz allgemein den Neigungswinkel zweier Geraden im Raume (sie mögen sich schneiden oder nicht), welche mit den Axen die genannten Winkel bilden, da dieser Neigungswinkel [§. 249, 1)] kein anderer ist als derjenige zweier zu den Geraden parallelen Vektoren.

Stehen die beiden Geraden auf einander senkrecht, so ist $\delta = 90^0$, $\cos\delta = 0$, folglich:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung drückt somit die Bedingung aus, welche erfüllt sein muss, wenn zwei Gerade, welche mit den coordinirten Axen die Wink[el] α, β, γ und α', β', γ' einschliessen, aufeinander senkrecht stehen solle[n].

Wird die Gl. (5) mit rr' multiplizirt, so erhält man mit Hilfe d[er] Glgn. (m): $rr'\cos\delta = xx' + yy' + zz'$, oder:

$$\cos\delta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Relation $\sin\delta^2 = 1 - \cos\delta^2$ findet man hieraus, da $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$ ist:

$$r^2r'^2 \sin\delta^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2,$$

oder nach leichter Reduction:

$$r^2r'^2 \sin\delta^2 = (xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2. \qquad (8)$$

Bezeichnet man aber mit F den Flächeninhalt des Dreiecks OMM', so ist $2F = rr' \sin\delta$, womit aus (8)

$$F^2 = \left(\frac{xy' - yx'}{2}\right)^2 + \left(\frac{xz' - zx'}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz' - zy'}{2}\right)^2 \qquad (9)$$

folgt. In Fig. (73) ist POP' die Projection des Dreieckes MOM' auf die Ebene der xy, somit, da x, y und x', y' die Coordinaten der Punkte P und P' sind, $\frac{1}{2}(xy' - yx')$ der Zahlenwerth des Flächeninhaltes des Dreieckes POP' [Gl. (3), §. 165]. Eben so stellen die Ausdrücke $\frac{1}{2}(xz' - zx')$ und $\frac{1}{2}(yz' - zy')$ die Flächeninhalte der Projectionen des $\triangle OMM'$ auf die beiden anderen coordinirten Ebenen vor. Beachtet man nun noch, dass die Projection sich nicht ändert, wenn man die Projections-Ebene parallel zu sich selbst verschiebt, so folgt aus (9), dass das Quadrat der Fläche eines Dreieckes gleich ist der Summe der Quadrate der Projectionen derselben auf drei zu einander senkrechte Ebenen; welcher Satz sich leicht auf eine beliebige, ebene, gerad- oder krummlinig begrenzte Figur ausdehnen lässt, und dem am Eingange dieses §. ausgesprochenen Satze über Linearprojectionen analog ist.

TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

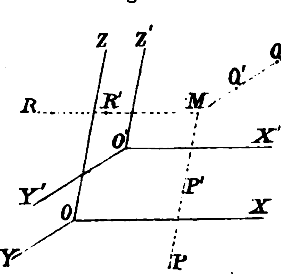
252. Unter Transformation oder Verwandlung der Coordinaten versteht man die Aufgabe, die Coordinaten x, y, z eines Punktes M im Raume, bezogen auf ein bestimmtes Coordinatensystem, auszudrücken durch die Coordinaten x', y', z' desselben Punktes in Bezug auf ein neues Coordinatensystem, dessen Lage gegen das ursprüngliche gegeben ist.

I. Nehmen wir erstlich an, es werde, ohne Veränderung der Richtung der Axen eines beliebigen recht- oder schiefwinkeligen Coordinatensystemes der Ursprung in einen Punkt O' (Fig. 74) verlegt, dessen Coordinaten in Bezug auf das alte System a, b, c sein mögen, wobei also die neuen Coordinaten-Ebenen den alten parallel liegen, so hat man offenbar:

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \qquad (1)$$

Denn, zieht man MR parallel zu OX, so schneidet diese Gerade oder ihre Verlängerung die Ebene der $y'z'$ in R'; es ist $MR = x$, $MR' = x'$, und $RR' =$ dem zur x-Axe parallel genommenen Abstande der beiden Ebenen yz und $y'z'$, d. i. $= a$, somit, da $MR = RR' + MR'$, $x = a + x'$. Eben so überzeugt man sich von der Richtigkeit der zwei anderen Gleichungen.

Fig. 74.

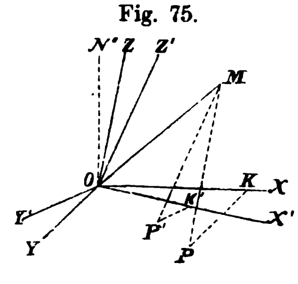


II. **Allgemeine Transformationsformeln.** Lassen wir nun den Ursprung O ungeändert, und denken wir uns durch denselben drei neue Axen OX', OY', OZ' (Fig. 75) unter beliebigen Winkeln gelegt. Die Coordinaten des Punktes M seien in dem ursprünglichen und neuen Systeme beziehungsweise:

$$OK = x, \quad PK = y, \quad MP = z,$$
$$OK' = x', \quad P'K' = y', \quad MP' = z'.$$

Diese bilden, wie man sieht, zwei gebrochene Liniensysteme: $OKPM$ und $OK'P'M$, welchen die Seite OM gemeinschaftlich ist. Denken wir uns nun senkrecht auf die Ebene der xy, in der Richtung der positiven Halbaxe der z, die Normale ON'' errichtet, so ist die Projection des Liniensystems $OKPM = x + y + z$ auf diese Normale offenbar $z \cos(N.''z)$, wenn wir mit $(N.''z)$ den von der Normale ON'' mit der Seite $MP = z$ oder — was dasselbe ist — mit der Axe der z eingeschlossenen Winkel bezeichnen, da die Punkte P und K in der auf ON'' senkrechten Ebene der xy liegen, und folglich die Projectionen der Seiten $PK = y$ und $OK = x$ auf die ON'' gleich Null sind. Die Projection des Systems $OK'P'M = x' + y' + z'$ auf dieselbe Normale ist aber $x' \cos(N.''x') + y' \cos(N.''y') + z' \cos(N.''z')$, und da diese beiden Projectionen (nach §. 249, 4) einander gleich sein müssen, so hat man:

Fig. 75.



$$z \cos(N.''z) = x' \cos(N.''x') + y' \cos(N.''y') + z' \cos(N.''z'),$$

wobei die Winkel nach der im §. 249, 4 gegebenen Regel zu nehmen sind. Zwei ganz ähnliche Formeln erhält man, wenn man dieselben Liniensysteme auf zwei andere Normalen ON' und ON projicirt, welche senkrecht auf die Ebenen der xz und yz in der Richtung der positiven

Halbaxen der y und x errichtet werden. Wir haben somit als allgemeine Transformationsformeln:

$$\left.\begin{array}{l} x\cos(N.x) = x'\cos(N.\ x') + y'\cos(N.\ y') + z'\cos(N.\ z') \\ y\cos(N'.y) = x'\cos(N'.x') + y'\cos(N'.y') + z'\cos(N'.z') \\ z\cos(N''.z) = x'\cos(N''.x') + y'\cos(N''.y') + z'\cos(N''.z'), \end{array}\right\} \quad (2)$$

bei welchen wir jedoch nicht weiter verweilen, da sie ihrer grossen Complicirtheit halber nur höchst selten eine Anwendung gestatten.

III. Transformation rechtwinkeliger Coordinaten in schiefwinkelige. Lassen wir in (2) die Axen der x, y, z mit den Normalen ON, ON', ON'' zusammenfallen, so ist das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkeliges. Die Winkel $(N.x)$, $(N'.y)$, $(N''.z)$ werden dadurch gleich Null, und die Formeln (2) verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos(x\,.\,x') + y'\cos(x\,.\,y') + z'\cos(x\,.\,z') \\ y = x'\cos(y\,.\,x') + y'\cos(y\,.\,y') + z'\cos(y\,.\,z') \\ z = x'\cos(z\,.\,x') + y'\cos(z\,.\,y') + z'\cos(z\,.\,z'). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die in diesen Formeln vorkommenden neun Winkel sind jedoch nicht sämmtlich von einander unabhängig, sondern an folgende drei Bedingungsgleichungen gebunden:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(x\,.\,x')^2 + \cos(y\,.\,x')^2 + \cos(z\,.\,x')^2 = 1 \\ \cos(x\,.\,y')^2 + \cos(y\,.\,y')^2 + \cos(z\,.\,y')^2 = 1 \\ \cos(x\,.\,z')^2 + \cos(y\,.\,z')^2 + \cos(z\,.\,z')^2 = 1, \end{array}\right\} \quad (4)$$

welche, wie man sieht, die bekannte Beziehung ausdrücken, die zwischen den Quadraten der Cosinusse der 3 Winkel besteht, welche eine Gerade (hier der Reihe nach die Axe der x', der y', der z') mit drei auf einander senkrechten Axen (der x, y, z) einschliesst [§. 251, Gl. (4)].

IV. Transformation rechtwinkeliger Coordinaten in andere gleichfalls rechtwinkelige. Hiezu dienen gleichfalls die Glgn. (3), nur treten zu den 3 Bedingungsgleichungen (4), welche zwischen den neuen Winkeln stattfinden, noch folgende hinzu:

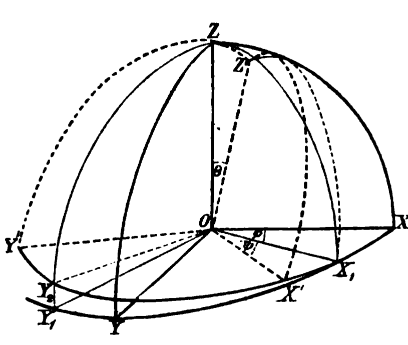
$$\left.\begin{array}{l} \cos(x.x')\cos(x.y') + \cos(y.x')\cos(y.y') + \cos(z.x')\cos(z.y') = 0 \\ \cos(x.x')\cos(x.z') + \cos(y.x')\cos(y.z') + \cos(z.x')\cos(z.z') = 0 \\ \cos(x.y')\cos(x.z') + \cos(y.y')\cos(y.z') + \cos(z.y')\cos(z.z') = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

in welchen, wie man sieht, die linken Theile die Ausdrücke der Cosinusse der Winkel sind, welche die Axen der x' und y', der x' und z', und der y' und z' mit einander einschliessen [§. 251, Gl. (6)], welche Gleichungen demnach ausdrücken, dass auch die neuen Axen aufeinander senkrecht stehen.

In Folge der sechs Bedingungsgleichungen (4) und (5) sind von den neun in (3) vorkommenden Winkeln nur **drei** unabhängig, über welche man beliebig verfügen kann, und aus welchen sich sofort die sechs anderen ergeben. Die obigen Transformationsformeln (3) werden aber, trotz ihrer Symmetrie, durch diese darin enthaltenen überzähligen Constanten in den meisten Fällen für die Anwendung unbequem, daher man sich lieber anderer, von Euler gegebenen Formeln bedient, welche nur drei Constanten enthalten, durch welche die Position des neuen Systems gegen das alte bestimmt wird.

V. Euler's Formeln zur Transformation rechtwinkeliger Coordinaten in andere gleichfalls rechtwinkelige. Sei (Fig. 76) OX, OY, OZ das System der ursprünglichen Coordinatenaxen; OX', OY', OZ' jenes der neuen; die Ebene der $x'y'$ schneide die Ebene der xy in der Geraden OX_1, so ist die Lage des neuen Axensystems bestimmt, wenn folgende drei Stücke gegeben sind:

Fig. 76.



1) Der Winkel $XOX_1 = \varphi$, welchen die Durchschnittslinie OX_1 mit der Axe der x bildet; 2) der Winkel $X_1OX' = \psi$, welchen die Axe der x', OX' mit der Durchschnittslinie OX_1 einschliesst; endlich 3) der Neigungswinkel θ der beiden Ebenen der xy und $x'y'$, welcher dem Winkel ZOZ' gleich ist, welchen die auf die genannten Ebenen senkrechten Axen der z und z' einschliessen. Die Winkel φ und ψ sind hiebei in der Richtung von OX gegen OY von 0^0 bis 360^0, der Winkel θ von 0^0 bis 180^0 zu zählen.

Die Transformation von dem Systeme der x, y, z auf jenes der x', y', z' wird am einfachsten durch successive Drehungen je zweier coordinirter Ebenen um ihre Durchschnittslinie, deren Lage dabei ungeändert bleibt, bewerkstelliget, wobei wir, da sich dabei immer bloss zwei Coordinaten verändern, von den Transformationsformeln (6) in §. 164 Gebrauch zu machen haben.

Denken wir uns zuerst das ganze Coordinatensystem um die Axe der z gedreht, bis die x-Axe mit der Durchschnittslinie OX_1 zusammenfällt, und bezeichnen wir die auf die neuen Axen OX_1, OY_1, OZ sich beziehenden Coordinaten mit x_1, y_1, z_1, so ist offenbar $z_1 = z$, weil

die xy-Ebene ihre Lage nicht geändert hat, und da die neue x-Axe mit der ursprünglichen den Winkel φ einschliesst, so hat man [Gl. (6), §. 164]:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi; \quad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi; \quad z = z_1. \qquad (6)$$

Von diesem zweiten Coordinatensysteme gehen wir auf ein drittes der x_2, y_2, z_2 über, indem wir das 2[te] um die Axe OX_1 drehen, so dass die neue Ebene der $x_2 y_2$, $X_1 O Y_2$ mit der ursprünglichen xy-Ebene den Winkel θ einschliesse; die Axe der z kommt dadurch in die Richtung OZ' und wir erhalten:

$$x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta; \quad z_1 = y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta. \qquad (7)$$

Durch eine nochmalige Drehung endlich um die Axe der z' werde die x-Axe in die Richtung OX' gebracht, welche mit der früheren Axe der x_2 den Winkel $X_1 OX' = \psi$ einschliesst. Dieses 4[te] Axensystem ist nun jenes der x', y', z', auf welches das ursprüngliche der x, y, z transformirt werden soll; zum Uebergange vom 3[ten] auf das 4[te] haben wir die Formeln:

$$x_2 = x' \cos\psi - y' \sin\psi; \quad y_2 = x' \sin\psi + y' \cos\psi; \quad z_2 = z'. \qquad (8)$$

Werden nun diese Werthe von x_2, y_2, z_2 in (7) und die dadurch sich ergebenden Werthe von x_1, y_1, z_1 in (6) substituirt, so erhält man die gesuchten Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) \\
& - y'(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta) + z' \sin\varphi \sin\theta, \\
y = {} & x'(\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) \\
& - y'(\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) - z' \cos\varphi \sin\theta, \\
z = {} & x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Soll nebst der Richtung der Axen auch noch der Ursprung verändert werden, so geschieht dies in der Regel am einfachsten durch successive Anwendung der Formeln (1) und (9), wobei die Ordnung, in welcher beide Transformationen ausgeführt werden, beliebig ist.

Allgemeine Bemerkungen über die analytische Darstellung von Flächen und Linien im Raume.

253. I. Es sei

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

eine Gleichung zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z, welche wir als Coordinaten eines Punktes im Raume betrachten. Denken wir obige Gleichung nach z aufgelöst, wodurch wir

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

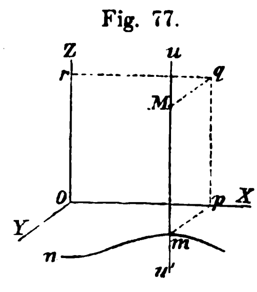
erhalten, und den beiden Coordinaten x, y willkürliche, aber bestimmte Werthe beigelegt, z. B. $x = a$, $y = b$, so bestimmt sich dadurch ein Punkt m in der Ebene der xy; errichtet man in diesem Punkte ein Perpendikel und trägt auf demselben den den Werthen $x = a$, $y = b$ entsprechenden Werth von z, $z = f(a, b) = c = mM$ auf, so erhält man einen Punkt M im Raume, dessen Coordinaten a, b, c der Gl. (1) oder (2) Genüge leisten. Da nun die Coordinaten x, y von einander ganz unabhängig sind, so wird im Allgemeinen jedem Punkte der xy-Ebene ein Punkt im Raume entsprechen, dessen drei Coordinaten die Gl. (1) erfüllen, und deren stetige Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche bilden wird, deren Gestalt und Lage durch die Gl. (1) vollkommen bestimmt ist. Hieraus geht also hervor, dass jede Gl. zwischen drei veränderlichen Grössen, geometrisch betrachtet, eine (im Allgemeinen krumme) Fläche bedeutet, und dass umgekehrt jede nach einem bestimmten Gesetze gestaltete Fläche durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines ihrer Punkte analytisch ausgedrückt werden kann. Die Gl. (1) heisst die **Gleichung der Fläche**, so wie umgekehrt letztere der **geometrische Ort** der Gl. (1) genannt wird.

II. Untersuchen wir nun die geometrische Bedeutung **im Raume** einer Gleichung, welche nur **zwei Veränderliche** enthält. Es sei

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

diese Gleichung, welche offenbar zunächst irgend eine gerade oder krumme Linie nm (Fig. 77) in der xy-Ebene bestimmt. Sei m ein Punkt dieser Linie, dessen Coordinaten $x = a = Op$, $y = b = mp$ der Gl. (3) Genüge leisten. Errichten wir im Punkte m das Perpendikel uu' auf die Ebene der xy von unbegrenzter Länge, so kommen allen Punkten dieses Perpendikels die Coordinaten $x = a$, $y = b$ zu und genügen somit der Gl. (3), da die 3te Coordinate z, durch welche sie sich allein unterscheiden, in dieser Gleichung nicht erscheint; jeder Punkt dieses Perpendikels ist folglich ein Punkt des geometrischen Ortes der Gl. (3). Dasselbe gilt nun offenbar von al[len] parallel zur Axe der z durch die Curve mn g[e]zogenen Geraden, die in ihrer stetigen Aufei[n]anderfolge eine Fläche bilden, welche man sich dadurch erzeugt denk[en] kann, dass irgend eine dieser Geraden, immer mit der z-Axe parall[el] bleibend, längs der Linie mn sich fortbewegt. Eine solche Fläche wi[rd]

Fig. 77.



bekanntlich Cylinderfläche genannt. Die Gl. (3) ist demnach die Gleichung eines auf der xy-Ebene senkrecht stehenden Cylinders. Eben so drücken die Gleichungen $f(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$ Cylinderflächen aus, welche beziehungsweise auf den Ebenen der xz und yz senkrecht stehen. — So ist z. B. $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt; die Gleichung $x = az + b$ bedeutet eine Ebene, welche auf der Ebene der xz senkrecht steht.

III. Enthält eine Gleichung bloss eine Veränderliche, z. B. x, ist also von der Form:

$$f(x) = 0,$$

so kann man dieselbe nach x aufgelöst denken und erhält dadurch $x = a$, wo a eine bestimmte Grösse ist, welche entweder nur einen oder mehrere Werthe besitzt, je nachdem die Gleichung $f(x) = 0$ vom 1ten oder höherem Grade ist. Der Gleichung $x = a$ genügen aber alle Punkte im Raume, deren Abstand von der yz-Ebene $= a$ ist, welche Punkte offenbar in einer zu dieser coordinirten Ebene parallelen, oder auf der Axe der x senkrechten Ebene liegen; es ist daher $x = a$ oder allgemeiner $f(x) = 0$ die Gleichung einer (oder, wenn $f(x) = 0$ von höherem Grade, mehrerer) zur Ebene der yz parallelen Ebene. Eben so drücken die Gleichungen $y = b$, $z = c$ Ebenen aus, welche beziehungsweise zu den Ebenen der xz und xy parallel liegen.

IV. Betrachten wir nun die Gleichungen zweier Flächen:

$$F(x, y, z) = 0, \text{ und } F'(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

als coëxistirend, so sind für die Coordinaten x, y, z nur solche Werthe zulässig, welche beiden Gleichungen gleichzeitig Genüge leisten.

Offenbar kommt diese Eigenschaft ausschliesslich nur den Coordinaten jener Punkte zu, welche sich in beiden Flächen zugleich befinden, d. h. den Punkten der Durchschnittslinie, woraus erhellt, dass durch das Zusammenbestehen beider Gleichungen eine Linie im Raume analytisch ausgedrückt wird, und zwar die Durchschnittslinie der beiden Flächen, welche jede dieser Gleichungen für sich betrachtet zum geometrischen Orte hat.

Eine Linie im Raume erfordert daher zu ihrer analytischen Darstellung ein System zweier Gleichungen zwischen den veränderlichen Coordinaten eines ihrer Punkte; diese Gleichungen werden die Gleichungen der Linie genannt.

Da durch zwei Gleichungen zwischen drei veränderlichen Grössen zwei derselben durch die dritte bestimmt sind, so ist in den Gleichungen

einer Linie bloss eine der drei Coordinaten, z. B. x als willkürlich oder unabhängig zu betrachten und die beiden anderen y und z sind Funktionen derselben. Hieraus folgt, dass, wenn wir mit $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ diese Funktionen bezeichnen, die durch die Glgn. (4) dargestellte Curve auch durch die Gleichungen:

$$y = \varphi(x), \quad z = \varphi'(x), \tag{5}$$

oder

$$\psi(x, y) = 0, \quad \psi'(x, z) = 0 \tag{6}$$

bestimmt ist. Diese sind aber, jede für sich betrachtet, die Gleichungen zweier Cylinderflächen, welche beziehungsweise auf der Ebene der xy und xz senkrecht stehen, und die projicirenden Cylinder der Linie im Raume genannt werden. Die Gleichungen derselben (5) oder (6) werden erhalten, wenn man aus (4) einmal z, dann y eliminirt. Durch Elimination von x erhält man die Gleichung $\psi''(y, z) = 0$ des dritten auf die Ebene der yz senkrechten projicirenden Cylinders.

Jede dieser Gleichungen kann, da sie nur 2 Coordinaten enthält, als Gleichung einer Curve in der Ebene dieser Coordinaten betrachtet werden; diese drei Curven sind die Durchschnittslinien der drei projicirenden Cylinder mit den coordinirten Ebenen und heissen die Projectionen der Curve im Raume auf diese Ebenen. In diesem Sinne kann man daher auch sagen, dass eine Curve im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei coordinirte Ebenen bestimmt ist.

Eine Curve im Raume heisst von einfacher oder doppelter Krümmung, je nachdem sämmtliche Punkte derselben in einer Ebene liegen oder nicht.

V. Endlich stellen drei Gleichungen zwischen drei veränderlichen Coordinaten, deren jede einzelne eine Fläche bedeutet:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad F''(x, y, z) = 0,$$

als coëxistirend betrachtet, einen oder mehrere bestimmte Punkte im Raume dar. Dies erhellt sowohl daraus, dass nach dem Obigen je zwei dieser Gleichungen eine Curve im Raume ausdrücken, welche der durch die 3te Gleichung dargestellten Fläche im Allgemeinen nur in einem oder mehreren bestimmten Punkten begegnet; als auch aus dem Umstande, dass 3 Grössen durch 3 Gleichungen vollständig bestimmt sind; durch successive Elimination erhält man aus obigen Gleichungen andere von der Form: $x = a$, $y = b$, $z = c$, durch welche die Coordinaten des oder der Durchschnittspunkte der durch obige 3

Gleichungen dargestellten Flächen explicit bestimmt sind, und zwar auf die möglichst einfachste Weise, durch den Durchschnitt dreier zu den coordinirten Ebenen parallelen Ebenen.

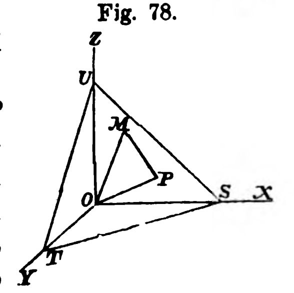
ZWEITES KAPITEL.

VON DER EBENE UND DER GERADEN LINIE.

Die Ebene.

254. Es sei (Fig. 78) STU eine Ebene in einer beliebigen Lage gegen das Coordinatensystem; fällen wir aus dem Ursprunge das Loth OP auf dieselbe, so ist ihre Lage durch die Länge und Richtung dieses Lothes vollkommen bestimmt. Irgend ein Punkt M im Raume bildet mit den Punkten O und P verbunden ein Dreieck MOP, welches, wenn M ein Punkt der durch P senkrecht auf OP gelegten Ebene ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, bei P einen rechten Winkel hat. Betrachtet man daher den Punkt P, gleich dem Ursprunge O, als einen festen, M als einen veränderlichen Punkt im Raume, so drückt die Gleichung $OP^2 + PM^2 = OM^2$ aus, dass M ein Punkt der durch P senkrecht auf OP gelegten Ebene ist. Setzt man also $OP = p$, bezeichnet mit a, b, c die Coordinaten des Punktes P, mit x, y, z jene des Punktes M, so geht obige Gleichung über in:

Fig. 78.



$$a^2 + b^2 + c^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

welche sich nach gehöriger Reduktion, und wenn man beachtet, dass $a^2 + b^2 + c^2 = p^2$ ist, in

$$ax + by + cz = p^2 \qquad (1)$$

verwandelt. Diese ist somit die **Gleichung einer Ebene**, welche durch den Punkt a, b, c geht und auf dem Radiusvektor p dieses Punktes senkrecht steht. Bezeichnet man mit α, β, γ die Neigungswinkel des Perpendikels p gegen die positiven Halbaxen der x, y, z, so ist:

$$a = p \cos\alpha, \quad b = p \cos\beta, \quad c = p \cos\gamma, \tag{2}$$

wobei p stets positiv zu nehmen ist, und durch Substitution dieser Ausdrücke nimmt die Gl. (1) der Ebene folgende Gestalt an:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p. \tag{3}$$

Die Ebene schneidet die Axen in den Punkten S, T, U, deren Abstände vom Ursprunge: e_1, e_2, e_3, offenbar die Werthe x, y, z sind, welche sich aus (1) oder (3) ergeben, wenn man daselbst der Reihe nach y und z, dann x und z, endlich x und y gleich Null setzt; man findet auf diese Art:

$$e_1 = p \sec\alpha, \quad e_2 = p \sec\beta, \quad e_3 = p \sec\gamma, \tag{4}$$

und bringt mit Hilfe dieser Ausdrücke die Gl. (3) der Ebene noch auf folgende Form:

$$\frac{x}{e_1} + \frac{y}{e_2} + \frac{z}{e_3} = 1. \tag{5}$$

Diese verschiedenen Formen der Gleichung einer Ebene unterscheiden sich, wie man sieht, nur durch die verschiedenen Constanten, welche in denselben erscheinen und zur Bestimmung der Lage der Ebene dienen; die analytische Form dieser Gleichungen ist aber wesentlich eine und dieselbe, und zwar die einer Gleichung des 1ten Grades in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten, deren allgemeine Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

ist. Jede Gleichung vom 1ten Grade drückt daher eine Ebene aus, da sich die Constanten A, B, C, D immer so bestimmen lassen, dass diese Gleichung mit den Glgn. (1), (3) oder (5) identisch wird.

Bringt man die Glgn. (3) und (I) auf die Form:

$$x\frac{\cos\alpha}{p} + y\frac{\cos\beta}{p} + z\frac{\cos\gamma}{p} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1,$$

so folgt:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = -\frac{A}{D}, \quad \frac{\cos\beta}{p} = -\frac{B}{D}, \quad \frac{\cos\gamma}{p} = -\frac{C}{D}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun, wenn man sie quadrirt und addirt und beachtet, dass $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D^2}.$$

Die Länge und Richtung des aus dem Ursprunge auf die Ebene (I) gefällten Perpendikels ist daher durch folgende Formeln gegeben:

$$\left.\begin{aligned} p = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\alpha = \mp \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \mp \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und es gelten in diesen Ausdrücken die oberen oder unteren Zeichen, je nachdem D positiv oder negativ ist.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist bekanntlich dem Winkel gleich, welchen zwei auf diese Ebenen senkrechte Gerade einschliessen, und zugleich das Complement zu 90^0 desjenigen Winkels, welchen eine dieser Senkrechten mit der anderen Ebene bildet. Dies vorausgesetzt, bezeichnen wir mit $(\mathrm{I}.\,xy)$, $(\mathrm{I}.\,xz)$, $(\mathrm{I}.\,yz)$ die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die coordinirten Ebenen der xy, xz und yz; mit $(\mathrm{I}.\,x)$, $(\mathrm{I}.\,y)$, $(\mathrm{I}.\,z)$ die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die Axen der x, y, z, so ist

$$\gamma = (\mathrm{I}.xy) = 90^0 - (\mathrm{I}.z); \quad \beta = (\mathrm{I}.xz) = 90^0 - (\mathrm{I}.y); \quad \alpha = (\mathrm{I}.yz) = 90^0 - (\mathrm{I}.x);$$

somit, wenn wir $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = N$ setzen, mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{I}.\,xy) &= \sin(\mathrm{I}.\,z) = C : N, \\ \cos(\mathrm{I}.\,xz) &= \sin(\mathrm{I}.\,y) = B : N, \\ \cos(\mathrm{I}.\,yz) &= \sin(\mathrm{I}.\,x) = A : N. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Summe der Quadrate dieser drei Cosinusse und Sinusse ist der Einheit gleich, übereinstimmend mit der zwischen den Winkeln α, β, γ bestehenden Bedingungsgleichung: $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

255. Wenn in der allgemeinen Gl. der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\mathrm{I})$$

einer oder mehrere der Coefficienten verschwinden, so erhält die Ebene dadurch eine besondere Lage gegen das Coordinatensystem, welche sich in der Form der Gleichung deutlich ausspricht.

1) Ist $D = 0$, so haben wir die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (1)$$

welche eine durch den Ursprung gehende Ebene ausdrückt, weil ihr die Coordinaten dieses Punktes: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ Genüge leisten. Auch wird in diesem Falle $p = 0$.

2) Es verschwinde einer der Coefficienten A, B, C; sei z. B. $C = 0$, so verwandelt sich (I) in

$$Ax + By + D = 0, \quad (2)$$

und es wird $\cos(\mathrm{I}.\,xy) = 0$, also $(\mathrm{I}.\,xy) = 90^0$; folglich ist (2) die

Gl. einer auf die xy-Ebene senkrechten oder zur Axe der z parallelen Ebene. (Vergl. §. 253, II.) Aus gleichen Gründen sind $Ax + Cz + D = 0$ und $By + Cz + D = 0$ die Gleichungen von Ebenen, welche beziehungsweise zu den Axen der y und x parallel liegen.

3) Ist nebst D auch noch einer der Coefficienten A, B, C der Nulle gleich, so gehen aus (I) die Gleichungen:

$$Ax + By = 0, \quad Ax + Cz = 0, \quad By + Cz = 0, \tag{3}$$

hervor, welche, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, zu Ebenen gehören, welche durch den Ursprung gehen und beziehungsweise auf den Ebenen der xy, xz und yz senkrecht stehen, und demnach der Reihe nach die Axen der z, y und x in sich enthalten.

4) Verschwinden zwei der Coefficienten A, B, C, so erhalten wir die Gleichungen:

$$Ax + D = 0, \quad By + D = 0, \quad Cz + D = 0, \tag{4}$$

oder $x = a$, $y = b$, $z = c$, welche zu Ebenen gehören, deren jede auf zwei coordinirten Ebenen, folglich auch auf der in diesen liegenden Coordinatenaxe senkrecht, also zur dritten Coordinatenebene parallel ist.

5) Ist endlich nebst zweien der Coefficienten A, B, C, auch noch $D = 0$, so gehen die Gleichungen (4) über in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, welche Gleichungen der Reihe nach den Coordinatenebenen der yz, xz, und xy angehören.

256. Die Ebene: $Ax + By + Cz + D = 0 \ldots$ (I) schneidet die coordinirten Ebenen der xy, xz und yz in geraden Linien, ST, SU UT (Fig. 78), welche Knotenlinien (Spuren, Traçen) genannt werden, und in der angeführten Reihenfolge mit $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$ bezeichnet werden sollen. Man erhält (nach §. 253, IV.) die Gleichungen dieser Durchschnittslinien, indem man die Gl. der Ebene (I) mit den Gleichungen der coordinirten Ebenen: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ der Reihe nach verbindet. Somit sind:

$Ax + By + D = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der $\bar{z}$;
$Ax + Cz + D = 0$, $y = 0$ - - - $\bar{y}$;
$By + Cz + D = 0$, $x = 0$ - - - $\bar{x}$.

Bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}, \quad z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}, \quad y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B},$$

und bezeichnet den Winkel, welchen die $\bar{z}$ mit der Axe der x bildet,

mit $(\bar{z} \,.\, x)$ und ähnlich für die übrigen, so folgt:

$$\operatorname{tg}(\bar{z} \,.\, x) = -\frac{A}{B}, \quad \operatorname{tg}(\bar{y} \,.\, x) = -\frac{A}{C}, \quad \operatorname{tg}(\bar{x} \,.\, z) = -\frac{C}{B},$$

durch welche Gleichungen die Richtung der Knotenlinien bestimmt wird.

257. Betrachten wir nun zwei durch die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{I}$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{II}$$

bestimmte Ebenen, so bietet sich zunächst die Frage nach der Durchschnittslinie und dem Neigungswinkel derselben dar. Die erstere wird in den folg. §§. von selbst ihre Erledigung finden; mit der letzteren wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Der Neigungswinkel der beiden Ebenen, den wir mit (I. II.) bezeichnen, ist offenbar dem Winkel $(p \,.\, p')$ gleich, welchen zwei aus dem Ursprunge auf die Ebenen (I) und (II) gefällte Perpendikel p, p' einschliessen, somit $\cos(\text{I. II.}) = \cos(p \,.\, p')$. Sind nun α, β, γ; α', β', γ' die Neigungswinkel dieser Perpendikel gegen die Coordinatenaxen, so hat man [§. 251, Gl. (5)]:

$$\cos(p \,.\, p') = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma', \tag{1}$$

folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), §. 254:

$$\cos(\text{I. II.}) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \,.\, \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \tag{2}$$

Sollen die Ebenen (I) und (II) zu einander parallel sein, so muss $\cos(\text{I}.\text{II}) = 1$ werden; mit diesem Werthe erhält man aus (2) nach Wegschaffung der Wurzelgrössen die Gleichung:

$$(AB' - BA')^2 + (AC' - CA')^2 + (BC' - CB')^2 = 0,$$

welche in folgende drei zerfällt:

$$AB' - BA' = 0, \quad AC' - CA' = 0, \quad BC' - CB' = 0,$$

von welchen jede eine Folge der beiden anderen ist. Wir haben daher als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der Ebenen (I) und (II):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \tag{3}$$

d. h. es müssen die Coefficienten der gleichnamigen Coordinaten proportional sein.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$ setzen; es ist daher $mAx + mBy + mCz + D' = 0$, oder, da D' eine willkürliche Grösse ist und durch mD' ersetzt werden kann,

$$Ax + By + Cz + D' = 0 \qquad \text{(III)}$$

die Gleichung einer zu (I) parallelen Ebene.

Es seien p und p' die Längen der aus dem Ursprunge auf die Ebenen (1) und (III) gefällten Perpendikel, so ist

$$p = \pm D : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad p' = \pm D' : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem die Coefficienten D, D' positiv oder negativ sind. Bezeichnet man nun mit E den Abstand der beiden parallelen Ebenen (I) und (III), so ist, wenn man D' den grösseren der beiden Coefficienten D, D' sein lässt,

$$E = p' - p, \quad = p - p', \quad \text{oder} \quad = p + p',$$

je nachdem D und D' positiv, negativ oder entgegengesetzten Zeichens sind. Hiemit wird in allen drei Fällen:

$$E = \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4)$$

Damit die Ebenen (I) und (II) sich senkrecht durchschneiden, muss $\cos(\text{I. II.}) = 0$ sein, womit sich aus (2):

$$AA' + BB' + CC' = 0 \qquad (5)$$

als Bedingungsgleichung für den perpendikulären Schnitt der Ebenen (I) und (II) ergibt.

Die gerade Linie.

258. Eine gerade Linie im Raume lässt sich immer als Durchschnitt zweier Ebenen betrachten. Sind daher:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

die Gleichungen dieser Ebenen, so gehört aus den in §. 253. IV. entwickelten Gründen das System dieser beiden Gleichungen einer geraden Linie im Raume an. Jede dieser Gleichungen kann aber durch irgend eine Verbindung derselben ersetzt werden; eliminirt man daher aus denselben der Reihe nach x, y, z, so erhält man drei neue Gleichungen von der Form:

$$gy + hz + k = 0, \quad g'x + h'z + k' = 0, \quad g''x + h''y + k'' = 0, \qquad (n)$$

und da je zwei dieser Gleichungen durch dieselben Werthe von x, y, z befriediget werden, wie die beiden Glgn. (m), so drücken dieselben auch — und zwar in einfacherer Form — dieselbe Gerade im Raume aus.

Man weiss, dass die Gleichungen (n), von denen jede eine Folge der beiden anderen ist und aus ihnen durch Elimination der beiden Gleichungen gemeinschaftlichen Coordinate abgeleitet werden kann, die Gleichungen dreier Ebenen sind, welche beziehungsweise auf den Ebenen der yz, xz und xy senkrecht stehen und von welchen je zwei durch ihren Durchschnitt die Gerade im Raume bestimmen. Diese drei Ebenen sind die projicirenden Ebenen der Geraden; da ferner jede dieser Gleichungen nur 2 Coordinaten enthält, so kann sie zugleich als Gleichung der Durchschnittslinie der projicirenden Ebene mit der Ebene dieser Coordinaten, d. h. als Gleichung der Projection der Geraden im Raume auf die bezügliche coordinirte Ebene betrachtet werden, und in diesem Sinne sagt man, dass eine Gerade im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei coordinirte Ebenen bestimmt sei.

Es ist natürlich im Allgemeinen willkürlich, welche zwei der Glgn. (n) zur analytischen Darstellung einer Geraden man wählen will; wir werden uns im folgenden der beiden ersteren, in der Form:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

bedienen, welche die Gerade durch ihre Projectionen auf die Ebenen der xz und yz ausdrücken. — Nur in dem Falle, wenn die Gerade zur xy-Ebene parallel ist, kann sie durch 2 Gleichungen von dieser Form nicht dargestellt werden, weil dann die zwei Ebenen, welche sie auf die Ebenen der xz und yz projiciren, in eine einzige Ebene $z = \gamma$ zusammenfallen; man wird in diesem Falle die Gleichung der Projection auf die Ebene der xy : $y = cx + \delta$ zu Hilfe nehmen, welche in Verbindung mit der Gl. $z = \gamma$ die Gerade bestimmt.

Aus den Gründen der analytischen Geometrie in der Ebene folgt, dass die Constanten α, β der Gleichungen (1) die vom Ursprunge aus gezählten Strecken sind, welche diese Projectionen auf den Axen der x und y abschneiden; a und b aber die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche sie mit der Axe der z einschliessen. Hieraus folgt, dass die Richtung einer Geraden im Raume bloss von den Coefficienten a und b abhängen kann, und dass somit zwei Gerade im Raume parallel sein werden, wenn ihre Gleichungen in Bezug auf diese Coefficienten übereinstimmen.

Die Durchschnittspunkte der Geraden (1) mit den Coordinaten-Ebenen ergeben sich ganz einfach durch Verbindung der Glgn. (1) mit den Gleichungen dieser Ebenen. So erhält man z. B. für $z = 0 : x = \alpha$, $y = \beta$ als die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ebene der xy.

Die Winkel, welche die Gerade (1) mit den positiven Halbaxen der x, y, z einschliesst, wollen wir mit $(1 \,.\, x)$, $(1 \,.\, y)$, $(1 \,.\, z)$ bezeichnen. Nehmen wir auf der Geraden zwei beliebige Punkte x, y, z und x', y', z', und bezeichnen ihren Abstand mit r, so ist bekanntlich [Gl. (1) und (3), §. 251]

$$\cos(1 \,.\, x) = \frac{x' - x}{r}, \quad \cos(1 \,.\, y) = \frac{y' - y}{r}, \quad \cos(1 \,.\, z) = \frac{z' - z}{r},$$

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Weil aber der Punkt x', y', z' in der Geraden liegt, so hat man $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$, welche Gleichungen mit (1) durch Subtraktion verbunden:

$$x' - x = a(z' - z), \quad y' - y = b(z' - z)$$

geben, womit endlich $r = (z' - z)\sqrt{1 + a^2 + b^2}$ folgt. Die drei letzten Gleichungen bestimmen nun die Verhältnisse $\frac{x' - x}{r}$, $\frac{y' - y}{r}$ und $\frac{z' - z}{r}$, und man erhält:

$$\cos(1.x) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}; \; \cos(1.y) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}; \; \cos(1.z) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}. \quad (2)$$

Diese Ausdrücke sind zugleich die Sinusse der Neigungswinkel $(1 \,.\, yz)$, $(1 \,.\, xz)$, $(1 \,.\, xy)$ der Geraden (1) gegen die Coordinatenebenen, welche die Winkel $(1 \,.\, x)$, $(1 \,.\, y)$, $(1 \,.\, z)$, wie man leicht sieht, zu 90^0 ergänzen.

Mit Hilfe der Glgn. (2) findet man:

$$a = \frac{\cos(1 \,.\, x)}{\cos(1 \,.\, z)}, \quad b = \frac{\cos(1 \,.\, y)}{\cos(1 \,.\, z)}, \quad (3)$$

womit die Glgn. der Geraden (1) folgende Form annehmen:

$$x = \frac{\cos(1 \,.\, x)}{\cos(1 \,.\, z)} z + \alpha, \quad y = \frac{\cos(1 \,.\, y)}{\cos(1 \,.\, z)} z + \beta. \quad (4)$$

259. Als besondere Fälle der Lage der Geraden sind folgende zu bemerken:

1) Zwei Gleichungen von der Form:

$$x = az, \quad y = bz,$$

in welchen die constanten Glieder fehlen, gehören einer durch den Ursprung gehenden Geraden an; sie werden in der That durch die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dieses Punktes erfüllt; auch erkennt man schon aus der Form derselben, dass auch die Projectionen durch den Ursprung gehen.

2) Eine Gerade, welche zu einer coordinirten Ebene parallel läuft, wird am einfachsten als Durchschnitt zweier Ebenen dargestellt, deren eine zu dieser coordinirten Ebene parallel, die andere darauf senkrecht ist. So drücken die Gleichungen $x = \alpha$, $y = bz + \beta$ eine zur Ebene der yz parallele Gerade aus.

3) Eine Gerade, welche zu zwei coordinirten Ebenen, also auch zu der in diesen Ebenen liegenden Axe parallel ist, und mithin auf der dritten coordinirten Ebene senkrecht steht, wird durch eines der Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lll} y = \beta \qquad & x = \alpha \qquad & x = \alpha \\ z = \gamma & z = \gamma & y = \beta \end{array}$$

ausgedrückt, je nachdem sie zur Axe der x, y, oder z parallel ist. Endlich sind:

$y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der Axe der x,
$x = 0$, $z = 0$ - - - - - y,
$x = 0$, $y = 0$ - - - - - z.

260. Betrachten wir jetzt zwei Gerade, welche durch ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots \; 1), \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots \; 2)$$

gegeben sind, so bieten sich wieder zuvörderst die Aufgaben dar, ihren Durchschnittspunkt, im Falle ein solcher existirt, und ihren Neigungswinkel zu finden.

1) Durchschnitt zweier Geraden. Wenn die Geraden 1) und 2) sich in einem Punkte schneiden, so müssen die Coordinaten dieses Punktes den Gleichungen beider Geraden Genüge leisten und sind daher nichts anderes als die Werthe von x, y, z, welche die Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig erfüllen, und sich aus diesen durch Elimination bestimmen. Eliminirt man zunächst x und y, so erhält man:

$$az + \alpha = a'z + \alpha'; \quad bz + \beta = b'z + \beta',$$

aus welchen Gleichungen sich für z die beiden Werthe:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} \quad \text{und} \quad z = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'}$$

ergeben, welche, da sie dem Durchschnittspunkte angehören sollen, gleich sein müssen. Es ist daher

$$\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'}, \text{ oder } (a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha') \quad (1)$$

die Bedingungsgleichung, welcher die Constanten der Gleichungen 1) und 2) Genüge leisten müssen, wenn diese beiden Geraden sich schneiden, oder allgemeiner in einer Ebene liegen sollen. Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes hat man dann:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'}; \quad y = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'}; \quad x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'}. \quad (2)$$

2) Neigungswinkel zweier Geraden. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Geraden 1) und 2) mit (1.2); mit $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$ die Winkel, welche die 1) mit den Axen bildet und durch ähnliche Symbole die analogen Winkel der 2), so ist [§. 251, Gl. (5)]:

$$\cos(1.2) = \cos(1.x)\cos(2.x) + \cos(1.y)\cos(2.y) + \cos(1.z)\cos(2.z), \quad (3)$$

oder, wenn man für die Cosinusse ihre Werthe [§. 258, Gl. (2)] einführt:

$$\cos(1.2) = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \, . \, \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}. \quad (4)$$

Sollen die beiden Geraden parallel laufen, so muss $\cos(1.2) = 1$ sein, welcher Werth in (4) eingeführt, nach einer der in §. 257 ausgeführten ganz ähnlichen Reduction:

$$a = a', \qquad b = b' \quad (5)$$

als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der beiden Geraden liefert.

Sollen aber die Geraden auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich hiefür, wegen $\cos(1.2) = 0$, die Bedingungsgleichung:

$$aa' + bb' + 1 = 0. \quad (6)$$

Verbindung der Ebene mit der Geraden.

261. Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots . \ 1)$$

die Gleichungen einer Geraden, und:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots . \ \mathrm{I})$$

die Gleichung einer Ebene gegeben; beschäftigen wir uns wieder zunächst mit der Bestimmung des Neigungswinkels $(\mathrm{I}.1)$, und des Durchschnittspunktes derselben.

1) Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene. Denkt man sich aus irgend einem Punkte der Geraden 1) ein Perpendikel auf die Ebene I) gefällt, so ist der von diesem Perpendikel und der Geraden eingeschlossene Winkel $\mu = 90^0 - (\mathrm{I}.1)$; der Winkel μ ist aber jenem gleich, welchen das aus dem Ursprunge auf die Ebene gefällte Perpendikel p mit der Geraden 1) bildet; es ist also $\sin(\mathrm{I}.1) = \cos(p.1)$. Nun hat man:

$\cos(p.1) = \cos(p.x)\cos(1.x) + \cos(p.y)\cos(1.y) + \cos(p.z)\cos(1.z)$, folglich, wenn wir im 2ten Theile dieser Gleichung statt der Cosinusse die in §. 254, Gl. (6) und §. 258, Gl. (2) entwickelten Werthe einsetzen:

$$\sin(\mathrm{I}.\ 1) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ .\ \sqrt{a^2 + b^2 + 1}}. \tag{1}$$

Soll die Gerade 1) zur Ebene I) parallel laufen, so muss $\sin(\mathrm{I}.1) = 0$ sein; hiemit folgt aus (1) als Bedingungsgleichung für den Parallelismus:

$$Aa + Bb + C = 0. \tag{2}$$

Damit aber die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide, muss $\sin(\mathrm{I}.1) = 1$ werden, wodurch (1) in

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ .\ \sqrt{a^2 + b^2 + 1} = Aa + Bb + C$$

übergeht, welche Gleichung durch Erhebung zum Quadrate auf die Form:

$$(A - aC)^2 + (B - bC)^2 + (Ab - Ba)^2 = 0$$

gebracht werden kann und somit in folgende drei:

$$A - aC = 0,\quad B - bC = 0,\quad Ab - Ba = 0$$

zerfällt. Die 3te dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden ersteren; wir haben folglich als Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, damit die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide:

$$a = \frac{A}{C},\qquad b = \frac{B}{C}. \tag{3}$$

2) Durchschnittspunkt einer Geraden und einer Ebene. Die Coordinaten dieses Punktes sind jene Werthe von x, y, z, welche den Gleichungen der Geraden und der Ebene gleichzeitig Genüge leisten und sich somit durch Elimination aus diesen Gleichungen ergeben. Substituirt man die Werthe von x und y aus 1) in I), so erhält man:

$$(Aa + Bb + C)z + A\alpha + B\beta + D = 0, \tag{4}$$

woraus

$$z = -\frac{A\alpha + B\beta + D}{Aa + Bb + C},$$

und hiemit aus 1):

$$y = \frac{(Aa + Bb + C)\beta - (A\alpha + B\beta + D)b}{Aa + Bb + C}$$

$$x = \frac{(Aa + Bb + C)\alpha - (A\alpha + B\beta + D)a}{Aa + Bb + C} \tag{5}$$

folgt. — Ist die Grösse $A\alpha + B\beta + D$ von 0 verschieden, aber der Nenner $Aa + Bb + C = 0$, so werden diese Werthe der Coordinaten

des Durchschnittspunktes unendlich gross, somit Gerade und Ebene parallel, wodurch wir auf die bereits oben gefundene Bedingung des Parallelismus zurückgeführt werden. Ist aber nebst dem Nenner auch noch die Grösse $A\alpha + B\beta + D = 0$, so ist die Gl. (4) für jeden Werth von z erfüllt, d. h. jedes System von Werthen der Coordinaten x, y, z, welches die Glgn. der Geraden 1) befriediget, genügt auch der Gl. I) der Ebene, und die Gerade liegt folglich ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene. Dasselbe sprechen auch die Glgn. (5) aus, indem diese Ausdrücke die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, also unbestimmt werden. Es sind somit

$$Aa + Bb + C = 0, \quad A\alpha + B\beta + D = 0 \tag{6}$$

die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die Gerade 1) in der Ebene I) liege.

In der That folgt dies auch aus der geometrischen Bedeutung dieser Gleichungen, indem die 1te, wie bekannt, ausspricht, dass Gerade und Ebene parallel sind, die 2te aber ausdrückt, dass die Gerade und die Ebene einen bestimmten Punkt, nämlich den Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene der xy, dessen Coordinaten $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = 0$ sind, gemeinschaftlich haben.

Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

262. 1te Aufg. **Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.**

Es seien x', y', z' und x'', y'', z'' die Coordinaten der gegebenen Punkte; die Gleichungen der Geraden sind von der Form:

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{1}$$

und müssen durch die Coordinaten der gegebenen Punkte erfüllt werden, wodurch sich die 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= mz' + \mu \\ y' &= nz' + \nu \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} x'' &= mz'' + \mu \\ y'' &= nz'' + \nu \end{aligned}\right\} (3)$$

zur Bestimmung der 4 Unbekannten m, μ, n, ν ergeben, deren Werthe sodann in (1) zu substituiren sind, was offenbar auf die Eliminati[on] dieser 4 Grössen aus den 6 Gleichungen (1), (2) und (3) hinauskomm[t]. Subtrahirt man die (2) von (1), sodann die (3) von (2), so komm[t]

$$\begin{aligned} x - x' &= m(z - z'), \quad y - y' = n(z - z') \\ x' - x'' &= m(z' - z''), \quad y' - y'' = n(z' - z'') \end{aligned} \tag{4}$$

durch deren Division man

Schneiden wir diesen letzteren Cylinder durch eine Ebene, welche durch den Ursprung geht, gegen die xy-Ebene unter dem Winkel θ geneigt ist, und diese Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit der Axe der x den Winkel φ einschliesst, so haben wir in (1) für x, y, z ihre Werthe aus (m) §. 274 zu substituiren. Indem wir den Ursprung beibehalten, somit in den angezogenen Gleichungen $a = b = c = 0$ setzen, erhalten wir als Gleichung des Cylinderschnittes:

$$y'^2(A^2\cos\varphi^2 + B^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2 + x'^2(A^2\sin\varphi^2 + B^2\cos\varphi^2)$$
$$+ 2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\,(A^2 - B^2)\,x'y' = A^2B^2,$$

welcher somit im Allgemeinen eine Ellipse ist, da das charakteristische Binom dieser Gleichung $= -4A^2B^2\cos\theta^2$ wesentlich negativ ist.

Es entsteht die Frage, ob der elliptische Schnitt unter Umständen in einen Kreis übergehen könne? Hiezu wird erfordert, dass die Coefficienten von x'^2 und y'^2 einander gleich, jener von $x'y' = 0$ werde; man hat also, da $\cos\theta$ im Allgemeinen von 0 verschieden ist, die Bedingungsgleichungen:

$$\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$(A^2\cos\varphi^2 + B^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2 = A^2\sin\varphi^2 + B^2\cos\varphi^2,$$

welche die zweifache Auflösung gestatten:

$$\sin\varphi = 0, \quad \text{also} \quad \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \cos\theta = \pm\frac{B}{A},$$

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{also} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \cos\theta = \pm\frac{A}{B};$$

die 2te ist wegen $A > B$ unzulässig; aber die erste liefert zwei Richtungen der schneidenden Ebene, nach welchen der elliptische Cylinder in Kreisen geschnitten wird. Dieser Cylinder kann daher auch als schiefer Cylinder von kreisförmiger Basis, und zwar auf doppelte Weise betrachtet werden.

Von den Kegelflächen.

279. Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die beständig durch einen festen Punkt geht, heisst eine Kegelfläche oder konische Fläche. Der feste Punkt heisst Mittelpunkt (auch Scheitel) der Kegelfläche.

Bezeichnen wir mit x', y', z' die Coordinaten des Mittelpunktes, so sind

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z') \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen a, b veränder-

liche Grössen bedeuten, da diese Gerade ihre Richtung fortwährend verändert. Setzen wir noch

$$b = \varphi(a), \tag{2}$$

so nehmen die Gleichungen der irgend eine Kegelfläche erzeugenden Geraden die Form an:

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = \varphi(a)(z - z'), \tag{3}$$

und aus diesen folgt durch Elimination von a:

$$\frac{y - y'}{z - z'} = \varphi\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right) \text{ oder } f\left(\frac{y - y'}{z - z'}, \frac{x - x'}{z - z'}\right) = 0 \tag{4}$$

als allgemeine Gleichung der Kegelflächen, deren wesentlicher Charakter darin besteht, dass sie in Bezug auf die Grössen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ homogen ist.

Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so verwandelt sich (4) in

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \text{ oder } f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{5}$$

welche Gleichung homogen ist in Bezug auf die Veränderlichen x, y, z.

Die Form der Funktion φ oder f bestimmt sich gewöhnlich dadurch, dass eine Curve gegeben ist, an welcher die erzeugende Gerade fortgleitet. Die Elimination von x, y, z aus den Gleichungen dieser Leitlinie und jenen der erzeugenden Geraden, führt auf die Gl. (2), als Ausdruck der Bedingung, dass die Erzeugende die Leitlinie beständig schneide.

280. Beisp. 1. Sei die Leitlinie ein in der Ebene der xy liegender Kreis vom Halbmesser r, dessen Centrum mit dem Ursprunge zusammenfällt; x', y', z' seien die Coordinaten des Mittelpunktes der Kegelfläche, so sind die Gleichungen der Leitlinie: $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, und jene der erzeugenden Geraden: $x - x' = a(z - z')$, $y - y' = b(z - z')$: aus diesen 4 Gleichungen folgt durch Elimination von x, y, z: $(x' - az')^2 + (y' - bz')^2 = r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden a und b eliminirt:

$$(x'z - xz')^2 + (y'z - yz')^2 = r^2(z - z')^2 \tag{1}$$

als Gl. des schiefen Kegels von kreisförmiger Basis.

Setzt man $x' = y' = 0$, so erhält man:

$$(x^2 + y^2)\, z'^2 = r^2 (z - z')^2 \tag{2}$$

als Gleichung des geraden Kegels, dessen Scheitel in der Axe der z, in der Entfernung $= z'$ von der in der xy-Ebene liegenden Basis vom Halbmesser r sich befindet.

Beisp. 2. Nehmen wir als Leitlinie eine **Ellipse**, deren Ebene parallel zur xy-Ebene im Abstande $= c$, deren Centrum in der Axe der z, und deren grosse Axe $= 2A$ in der Ebene der xz liegt; ihre Gleichungen sind somit $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, $z = c$. Wählt man ferner den Ursprung als Mittelpunkt der Kegelfläche, so hat man $x = az$, $y = bz$ als Gleichungen der erzeugenden Geraden, und erhält:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 \tag{3}$$

als Gl. des **geraden elliptischen Kegels.**

Multiplicirt man diese Gleichung mit c^2 und beachtet, dass $\frac{c}{A} = \operatorname{cotg}\alpha$, $\frac{c}{B} = \operatorname{cotg}\beta$ ist, wenn man mit α und β die Winkel bezeichnet, welche die Durchschnittslinien der Kegelfläche mit den Ebenen der xz und yz mit der Axe der z einschliessen, so nimmt (3) die Form an:

$$x^2 \operatorname{cotg}\alpha^2 + y^2 \operatorname{cotg}\beta^2 = z^2; \tag{4}$$

für $A = B = r$ verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis und man hat:

$$(x^2 + y^2)\, c^2 = r^2z^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}\alpha^2 \tag{5}$$

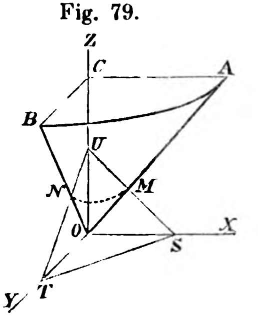
als Gl. des **geraden Kreiskegels**, dessen Scheitel im Ursprunge liegt, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt und mit einer Kante des Kegels den Winkel α einschliesst.

281. Untersuchen wir noch die Durchschnittslinien, in welchen ein elliptischer oder Kreiskegel von einer Ebene geschnitten wird. — Die Gleichung des geraden elliptischen Kegels ist:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2. \tag{1}$$

Wählen wir den Punkt U (Fig. 79), in welchem die schneidende Ebene STU der Axe der z begegnet, als Ursprung, eine zur Durchschnittslinie parallele durch den Punkt U gehende Gerade als Axe der x', setzen $OU = \gamma$, $\angle XST = \varphi$ und den Neigungswinkel der (schneidenden) Ebene der $x'y'$ gegen die xy-Ebene $= \theta$, so haben wir in den Ausdrücken (m), §. 274, $a = b = 0$, $c = \gamma$ zu setzen, und erhalten nach Substitution derselben in (1) als **Gleichung des Kegelschnittes:**

Fig. 79.



$$y'^2\left[\left(\frac{\sin\varphi^2}{A^2}+\frac{\cos\varphi^2}{B^2}\right)\cos\theta^2-\frac{\sin\theta^2}{c^2}\right]+x'^2\left[\frac{\cos\varphi^2}{A^2}+\frac{\sin\varphi^2}{B^2}\right] \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} = 0. \quad (2)$$
$$+\,2x'y'\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\frac{A^2-B^2}{A^2B^2}-\frac{2\gamma\sin\theta}{c^2}y'-\frac{\gamma^2}{c^2}$$

Der Schnitt ist also eine Linie der 2ten Ordnung und, wie man nach Entwickelung des charakteristischen Binoms dieser Gleichung leicht findet, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem, blos mit Rücksicht auf den Zahlenwerth:

$$\operatorname{tg}\theta \lesseqgtr \frac{c}{\sqrt{B^2\cos\varphi^2+A^2\sin\varphi^2}}. \qquad (3)$$

Um insbesondere diejenige Lage der schneidenden Ebene zu finden, bei welcher die elliptischen in Kreisschnitte übergehen, müssen wir die Gl. (2) einen Kreis ausdrücken lassen und zu diesem Zwecke:

$$2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\,(A^2-B^2)=0,$$
$$\left(\frac{\sin\varphi^2}{A^2}+\frac{\cos\varphi^2}{B^2}\right)\cos\theta^2-\frac{\sin\theta^2}{c^2}=\frac{\cos\varphi^2}{A^2}+\frac{\sin\varphi^2}{B^2}$$

setzen. Diese Gleichungen gestatten, so lange A von B verschieden, drei Auflösungen, nämlich:

$$\theta=90^0,\quad \frac{\cos\varphi^2}{A^2}+\frac{\sin\varphi^2}{B^2}+\frac{1}{c^2}=0,$$
$$\varphi=90^0,\quad \sin\theta=\pm\frac{c}{B}\sqrt{\frac{B^2-A^2}{c^2+A^2}},$$
$$\varphi=0\quad\ \sin\theta=\pm\frac{c}{A}\sqrt{\frac{A^2-B^2}{c^2+B^2}},$$

von welchen aber die beiden ersten unzulässig sind, indem einerseits die Summe dreier positiver Grössen nicht Null sein kann, anderseits für $\varphi=90^0$, wegen $B<A$, $\sin\theta$ imaginär wird. Hingegen ist der für $\varphi=0$ folgende Werth von $\sin\theta$ immer reell und <1; es gibt somit des doppelten Zeichens wegen zwei Systeme von parallelen Ebenen, welche den elliptischen Kegel in Kreisen schneiden. Sie sind sämmtlich wegen $\varphi=0$ parallel zur Axe der x, d. h. zur grossen Axe der elliptischen Basis des Kegels. Der elliptische Kegel kann daher auch au zweifache Weise als schiefer Kreiskegel betrachtet werden.

Für $A=B=r$ geht der elliptische Kegel in einen geraden Kreiskegel über. Die Gl. (2) des Kegelschnittes verwandelt sich in:

$$(c^2\cos\theta^2-r^2\sin\theta^2)\,y'^2+c^2x'^2-2\gamma\sin\theta\,.\,y'-\gamma^2=0,$$

und derselbe ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem

$\operatorname{tg}\theta <, >$ oder $= \frac{c}{r}$, oder je nachdem $\theta <, >$ oder $= 90^0 - \alpha$ ist, wenn man mit α den halben Scheitelwinkel des Kegels bezeichnet und beachtet, dass $\frac{c}{r} = \operatorname{cotg}\alpha$. Die Linien zweiter Ordnung entstehen daher durch ebene Schnitte des geraden Kreiskegels, worin die Benennung derselben, Kegelschnittslinien, ihren Grund hat.

Von den Rotationsflächen.

282. Denkt man sich irgend eine Linie von einfacher oder doppelter Krümmung (die erzeugende Curve) mit einer der Lage nach gegebenen Geraden fest verbunden, und um letztere als Axe herumgedreht, so beschreibt die rotirende Curve eine Fläche, welche Rotations- oder Umdrehungsfläche genannt wird.

Aus dieser Erzeugungsart erhellt sogleich, dass eine solche Fläche durch Ebenen, welche senkrecht auf der Axe stehen, in Kreisen geschnitten wird; man pflegt diese Kreise Parallelkreise zu nennen. Alle Ebenen hingegen, welche durch die Axe gelegt werden, schneiden die Rotationsfläche in congruenten ebenen Curven, welche Meridiane heissen. Es ist klar, dass, wie auch immer die Curve beschaffen sein mag, durch deren Umdrehung die Fläche entstanden ist, einer der Meridiane deren Stelle als erzeugende Curve vertreten kann.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass man sich die Rotationsflächen auch durch die Bewegung eines Kreises entstanden denken kann, dessen Ebene immer senkrecht bleibt auf der Rotationsaxe, dessen Mittelpunkt auf eben dieser Axe fortrückt, und dessen Halbmesser sich stetig so verändert, dass der Kreis eine gegebene Curve (bei der früheren Erzeugungsweise die rotirende Curve) beständig schneide. Hier übernimmt der bewegliche Kreis die Rolle der erzeugenden Curve, die rotirende Curve jene einer festen Leitlinie oder Directrix. Wir wollen diese letztere Erzeugungsweise zur Ableitung der allgemeinen Gleichung der Rotationsflächen benützen.

Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Punktes der Rotationsaxe; α, β, γ ihre Neigungswinkel gegen die Coordinatenaxen, welche sechs Grössen die Lage der Rotationsaxe bestimmen und als gegeben vorausgesetzt werden. Die Gleichungen des erzeugenden Kreises in irgend einer Lage desselben seien:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \tag{1}$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p, \tag{2}$$

von welchen die 1te einer aus dem Punkte x_0, y_0, z_0 mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel, die 2te einer Ebene angehört, welche in dem Abstande $= p$ vom Ursprunge auf der Rotationsaxe senkrecht steht, und wo offenbar r eine Funktion von p sein muss, damit der durch den Schnitt der Kugel mit der Ebene entstehende Kreis die gegebene Leitlinie schneide. Setzen wir also

$$r^2 = \varphi(p), \tag{3}$$

so werden die Gleichungen des erzeugenden Kreises:

$$\left.\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(p), \\ x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

aus welchen man durch Elimination von p:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) \tag{5}$$

als die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen erhält.

Die Form der Funktion φ hängt von der Natur der Leitlinie ab, und bestimmt sich auf die bekannte Weise, indem man aus den Gleichungen derselben in Verbindung mit den obigen (1) und (2), x, y, z eliminirt, wodurch man zur Gl. (3) gelangt, aus welcher sodann noch mit Hilfe von (1) und (2) die Grössen r und p zu eliminiren sind, um die Gl. der Rotationsfläche zu erhalten.

In den meisten Fällen ist die rotirende Curve eine ebene Curve, in deren Ebene die Rotationsaxe liegt, also mit den Meridianen identisch; lässt man dann noch die Rotationsaxe mit einer der Coordinatenaxen zusammenfallen, so werden die Gleichungen einfacher. Man kann dann den Ursprung als den Punkt x_0, y_0, z_0 annehmen, wodurch — die Axe der z als Rotationsaxe vorausgesetzt — die Gleichungen des beweglichen Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = p \tag{6}$$

werden. Durch Substitution dieser Werthe in die Gl. (3) erhält man:

$$x^2 + y^2 = \varphi(z) \text{ oder } z = f(x^2 + y^2) \tag{7}$$

als allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, deren Axe mit der Axe der z zusammenfällt. — Nimmt man sodann die Leitlinie, durch deren Rotation die Fläche entsteht, in der Ebe[ne] der xz an, was immer möglich, so sind ihre Gleichungen:

$$F(x, z) = 0, \quad y = 0, \tag{8}$$

und man erhält wieder, wie oben, durch Elimination von x, y, z au[s] (6) und (8) die Gl. (3), in welcher sofort für p und r^2 ihre Werthe au[s]

(6) zu setzen sind, um zur Gl. der Rotationsfläche zu gelangen. Diese Elimination kann übrigens hier leicht allgemein ausgeführt werden. Mit dem Werthe $y=0$ aus (8) gibt die 1[te] der Glgn. (6): $x=\pm r$, welcher Werth sammt jenem $z=p$ in die 1[te] der Glgn. (8) substituirt, $F(\pm r, p)=0$ liefert. Substituirt man in diese Gl. für p und r die Werthe aus (6), so hat man:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0 \tag{9}$$

als Gl. der gesuchten Rotationsfläche, welche — wie man sieht — unmittelbar aus jener: $F(x, z)=0$ des in der xz-Ebene liegenden Meridians hervorgeht, wenn man in derselben $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ statt x, oder x^2+y^2 statt x^2 schreibt.

283. Beisp. 1. Die erzeugende Curve sei eine Ellipse, deren kleine Axe $2b$, zugleich Rotationsaxe, in der Axe der z, deren grosse Axe $2a$ in der Axe der x liegt; die Gleichungen derselben sind $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $y=0$; man hat daher:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

als Gl. der Fläche, welche durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht und abgeplattetes Rotations-Ellipsoid (Sphäroid) genannt wird. Durch Vertauschung von b mit a erhält man die Gl. des gestreckten Rotations-Ellipsoides, welches durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe $=2a$ entsteht. Für $a=b$ geht die Ellipse in einen Kreis über, und die Gl. des Ellipsoides verwandelt sich in $x^2+y^2+z^2=a^2$, welche einer Kugel vom Halbmesser a angehört.

Beisp. 2. Die erzeugende Curve sei eine Hyperbel, deren erste Axe $=2a$ mit der Rotationsaxe der z, die 2[te] Axe mit der Axe der x zusammenfällt; ihre Gleichungen sind daher $\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=-1$, $y=0$, und man hat:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=-1 \tag{2}$$

als Gl der erzeugten Umdrehungsfläche, welche Rotations-Hyperboloid mit zwei Hölungen genannt wird, weil die Fläche aus zwei getrennten Theilen besteht.

Lässt man die zweite Axe mit der Drehungsaxe zusammenfallen, so kommt:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche den Namen **Rotations-Hyperboloid mit einer Hölung** führt.

Beisp. 3. Die Gleichungen einer in der xz-Ebene liegenden Parabel, deren Scheitel mit dem Ursprunge, deren Axe mit der Rotationsaxe der z zusammenfällt, sind $x^2 = pz$, $y = 0$; man hat also:

$$x^2 + y^2 = pz \tag{4}$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche **Rotationsparaboloid** genannt wird.

Beisp. 4. Um die Axe der z drehe sich eine Gerade, welche in dem Abstande $= a$ vom Ursprunge die x-Axe senkrecht schneidet und mit der xy-Ebene nach der positiven Seite der y hin den Winkel α einschliesst; die Gleichungen dieser Geraden sind daher $x = a$, $y = z \operatorname{cotg} \alpha$. Da hier die Erzeugende mit der Rotationsaxe nicht in derselben Ebene liegt, so haben wir diese Gleichungen mit jenen (6) [§. 282]: $x^2 + y^2 = r^2$, $z = p$ zu verbinden, und erhalten durch Elimination von x, y, z : $r^2 = p^2 \operatorname{cotg} \alpha^2 + a^2$, und hieraus nach Wiederherstellung der Werthe von r und p: $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{cotg} \alpha^2 + a^2$, oder:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 \operatorname{tg} \alpha^2} = 1 \tag{5}$$

als Gl. der erzeugten Fläche, welche sonach ein **Rotationshyperboloid mit einer Hölung** ist, dessen halbe 1te Axe $= a$, und halbe 2te Axe $b = a \operatorname{tg} \alpha$ ist. Da in (5) $\operatorname{tg} \alpha$ blos im Quadrate vorkommt, so entsteht dieselbe Fläche, wenn die rotirende Gerade gegen die xy-Ebene unter dem Winkel $180^0 - \alpha$ geneigt ist.

Aus dem Umstande, dass das Rotationshyperboloid mit einer Hölung durch Bewegung einer Geraden — und zwar auf doppelte Weise — erzeugt werden kann, folgt umgekehrt, dass auf dieser krummen Fläche unendlich viele Gerade gezogen werden können, deren jede im Endpunkte eines Halbmessers des kleinsten Parallelkreises auf diesem Halbmesser senkrecht steht, und gegen die Ebene dieses Kreises unter einem Winkel geneigt ist, welcher die Grösse $\pm \frac{b}{a}$ zur trigonometrischen Tangente hat.

Von den windschiefen Flächen.

284. Jede Fläche, welche durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, heisst eine **geradlinige Fläche** oder **Regelfläche**. Zu diesen gehören also z. B. die Cylinder- und Kegelflächen. Während

aber bei diesen Flächen, wie aus der Entstehungsweise derselben sogleich erhellt, durch je zwei aufeinander folgende Lagen der erzeugenden Geraden eine Ebene gelegt werden kann, ist dies bei anderen Regelflächen nicht der Fall, und die Flächen der letzteren Art, welche also durch eine Gerade erzeugt werden, die sich so bewegt, dass je zwei aufeinanderfolgende Lagen derselben nicht in einer Ebene liegen, führen im Allgemeinen den Namen windschiefe Flächen. Ein Beispiel dieser Art haben wir schon an dem Rotationshyperboloide mit einer Hölung kennen gelernt.

Nach den in §. 276 entwickelten Gründen können wir die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$x = az + \varphi(a); \quad y = \psi(a) \, . \, z + \chi(a)$$

annehmen; das System dieser beiden Gleichungen stellt jede geradlinige Fläche dar, deren Gleichung man durch Elimination von a erhält, sobald die Funktionen φ, ψ und χ gegeben sind, welche das Gesetz der Bewegung der Geraden bestimmen. Hiezu werden also drei von einander unabhängige Bedingungen erfordert, welche übrigens mannigfaltig sein können; einige hieher gehörige allgemeinere Aufgaben sind folgende.

I. Eine gerade Linie bewege sich so, dass sie stets drei gegebene Linien schneide, von denen eine eine Gerade sein soll.

Nehmen wir der Einfachheit halber die gegebene gerade Leitlinie als Axe der z, so können wir die erzeugende Gerade durch die Gleichungen

$$y = ax, \quad mx + nz = 1$$

darstellen, in welcher Form sie bereits die Bedingung enthalten, dass diese Gerade die Axe der z stets schneide, und wo a, m, n drei veränderliche Parameter bezeichnen [§. 276]. Nehmen wir a als den willkürlichen, und setzen $m = \varphi(a)$, $n = \psi(a)$, so können wir die Gleichungen der Erzeugenden auch in der Form: $y = ax$, $x \, . \, \varphi(a) + z \, . \, \psi(a) = 1$ darstellen, aus welchen durch Elimination von a:

$$x \, . \, \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z \, . \, \psi\left(\frac{y}{x}\right) = 1$$

's die allgemeine Form der Gleichung einer auf diesem Wege erzeugen Fläche folgt. Die beiden willkürlichen Funktionen φ und ψ lassen ich auf dem im §. 276 angegebenen Wege finden, sobald die Gleihungen der beiden anderen Leitlinien gegeben sind.

II. Wenn die erzeugende Gerade stets an einer geraden Leitlinie 'ortgleitet und dabei einer gegebenen Ebene (Richtebene) beständig

parallel bleibt, so nennt man die so entstehende windschiefe Fläche **conoidische Fläche** oder **Conoid.**

Nehmen wir die Richtebene zur xy-Ebene, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden:

$$z = c, \quad y = \varphi(c) \,.\, x + \psi(c), \tag{1}$$

wo φ und ψ zwei willkürliche Funktionen bedeuten, deren eine sich dadurch bestimmt, dass die Erzeugende die gerade Leitlinie, deren Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{2}$$

sein mögen, stets schneiden soll. Durch Elimination von x, y, z aus (1) und (2) erhält man hiefür die Bedingungsgleichung:

$$bc + \beta = (ac + \alpha)\, \varphi(c) + \psi(c), \tag{3}$$

und endlich, indem man aus (1) und (3) $\psi(c)$ und c eliminirt:

$$y - bz - \beta = \varphi(z)\, (x - az - \alpha),$$

oder

$$\varphi(z) = \frac{y - bz - \beta}{x - az - \alpha},$$

oder

$$z = f\left(\frac{y - bz - \beta}{x - az - \alpha}\right) \tag{4}$$

als allgemeine Gleichungsform der conoidischen Flächen.

Steht die gerade Leitlinie auf der Richtebene senkrecht, so wird $a = b = 0$ und die Richtlinie kann jetzt als Axe der z angenommen werden, wodurch auch $\alpha = \beta = 0$ wird und die Gl. (4) sich in

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

verwandelt. Man pflegt solche Conoide **gerade Conoide** zu nennen. Die Form der Funktion f in (4) oder (5) bestimmt sich, wenn noch eine Bedingung, z. B. eine zweite Leitlinie gegeben wird, welcher die erzeugende Gerade folgen soll.

Beispiel. Es sei diese zweite Leitlinie ebenfalls eine Gerade und $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ ihre Gleichungen. Jene der erzeugenden Geraden, welche durch die Axe der z gehend zur xy-Ebene parallel sich bewegt, sind $z = c$, $y = x \,.\, \varphi(c) \,..\, (m)$, und wir erhal durch Elimination von x, y, z aus diesen 4 Gleichungen: $bc +$ $= (ac + \alpha) \,.\, \varphi(c)$, folglich, wenn wir aus dieser und den Glgn. (m) und $\varphi(c)$ eliminiren:

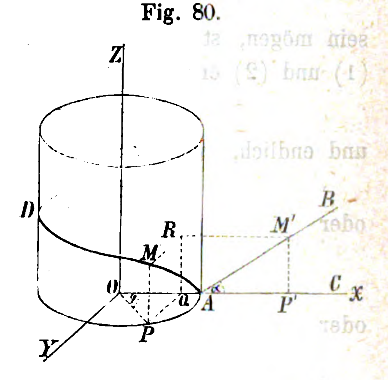
$$ayz - bxz + ay - \beta x = 0,$$

als Gleichung der gesuchten Fläche, welche somit von der zweiten Ordnung ist (hyperbolisches Paraboloid), auf welche wir im nächsten Capitel zurückkommen.

Zu den conoidischen Flächen gehört auch die Schraubenfläche, welche wir noch besonders betrachten wollen.

285. Schraubenlinie und Schraubenfläche. Wenn ein gegebener Winkel $BAC = \alpha$, Fig. (80), um einen geraden Cylinder von kreisförmiger Basis so herumgewickelt wird, dass der eine Schenkel AC die Erzeugungslinien des Cylinders unter einem rechten Winkel schneidet, so erzeugt der andere Schenkel eine Curve auf der Cylinderfläche, welche Schraubenlinie genannt wird.

Fig. 80.



Um die Gleichungen dieser Curve zu finden, nehmen wir die Axe des Cylinders als Axe der z und legen die Axe der x durch jenen Punkt A der Schraubenlinie, in welchem sie die Ebene der xy schneidet. Sei M ein beliebiger Punkt der Curve, $MP = z$, $PQ = y$, $OQ = x$ dessen Coordinaten, r der Halbmesser des Cylinders und $\angle AOP = \varphi$, so ist:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r\varphi \operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

indem, wie aus der Entstehung der Curve leicht erhellt, $z = MP = RQ = M'P' = AP' \operatorname{tg}\alpha$, und $AP' = \operatorname{arc} AP = r\varphi$ ist. Aus der letzten Gl. folgt $\varphi = \frac{z}{r \operatorname{tg}\alpha}$, womit die beiden ersteren in

$$x = r\cos\frac{z}{r\operatorname{tg}\alpha}, \quad y = r\sin\frac{z}{r\operatorname{tg}\alpha} \tag{2}$$

übergehen. Dies sind die Gleichungen der Schraubenlinie, und zwar ihrer Projectionen auf die Ebenen der xz und yz. Quadrirt und addirt man dieselben, so erhält man

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ls Gleichung der Projection auf die Ebene der xy.

Der Winkel α heisst der Steigungswinkel der Schraubenlinie. 'ür zwei Punkte der Curve, welche den Werthen φ und $\varphi + 2\pi$ entprechen, folglich in einer und derselben erzeugenden Geraden des 'ylinders liegen und um einen Schraubenumgang von einander ent- ›rnt sind, hat man $z = r\varphi \operatorname{tg}\alpha$ und $z' = r(\varphi + 2\pi)\operatorname{tg}\alpha$, deren

Differenz $z' - z = 2r\pi \operatorname{tg}\alpha = h$ die sogenannte Höhe eines Schraubenganges bestimmt. Durch Einführung dieser Grösse nehmen die Glgn. (2) die Form an:

$$x = r \cos \frac{2\pi z}{h}, \quad y = r \sin \frac{2\pi z}{h}. \tag{3}$$

Die Schraubenfläche entsteht durch die Bewegung einer Geraden, welche an der Schraubenlinie fortgleitet und dabei die Axe derselben stets senkrecht schneidet.

Fällt, der früheren Annahme gemäss, die Schraubenaxe mit der Axe der z zusammen, so sind $z = c$, $y = x \, . \, \varphi(c)$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden, welche mit den Glgn. (2) oder (3) der Leitlinie verbunden, die Bedingungsgleichung: $\varphi(c) = \operatorname{tg} \frac{c}{r \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} \frac{2\pi c}{h}$ liefern; eliminirt man aus dieser und den Gleichungen der erzeugenden Geraden c und $\varphi(c)$, so erhält man als Gleichung der Schraubenfläche:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{r \operatorname{tg}\alpha}, \text{ oder } \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{h}. \tag{4}$$

VIERTES KAPITEL.

VON DEN FLÄCHEN DER ZWEITEN ORDNUNG.

286. Die allgemeinste Form einer Gleichung des 2ten Grades zwischen drei veränderlichen Coordinaten ist:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{aligned}\right\} = 0, \tag{1}$$

und wir wollen uns nun mit der Untersuchung beschäftigen, welche Flächen überhaupt durch diese Gleichung dargestellt werden können. diesem Zwecke müssen wir die Gleichung auf eine einfachere Form bi gen, was durch Transformation der Coordinaten bewerkstelliget werd kann, in ähnlicher Weise, wie dies bei den Linien 2ter Ordnung g schehen ist. Wir setzen voraus, dass die Gl. (1) sich auf ein rech winkeliges Coordinatensystem beziehe, wodurch die Allgemeinheit d

Untersuchung für unseren Zweck nicht beeinträchtiget wird, da der Grad der Gleichung durch den Uebergang von einem schiefwinkeligen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem nie, und auch die Form der Gleichung nicht geändert wird, so lange die Lage des Letzteren unbestimmt bleibt.

287. Mittelpunkt der Flächen. Nach dem am Schlusse des §. 274 bewiesenen Satze kann eine Fläche 2ten Grades in nicht mehr als zwei Punkten von einer Geraden geschnitten werden. Das von den beiden Durchschnittspunkten begrenzte Stück der Geraden heisst eine Sehne oder Chorde der Fläche.

Unter Mittelpunkt oder Centrum der Fläche versteht man einen solchen Punkt, welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbirt.

Denken wir uns den Mittelpunkt einer Fläche als Ursprung des Coordinatensystemes, und durch denselben eine Gerade gezogen, welche die Fläche in den Punkten M und M' schneidet, so liegen der gemachten Voraussetzung zufolge diese beiden Punkte der Fläche auf entgegengesetzten Seiten des Ursprunges und in gleicher Entfernung von demselben. Bezeichnet man demnach mit x', y', z' die Coordinaten von M, so sind offenbar $-x'$, $-y'$, $-z'$ jene von M' und die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$, bezogen auf ihren Mittelpunkt als Ursprung, muss durch diese beiden Systeme von Werthen der Coordinaten erfüllt werden. Da aber dasselbe für jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne statt findet, so wird die eben genannte Gleichung der Fläche die Eigenschaft haben, sich nicht zu ändern, wenn man darin $-x$, $-y$, $-z$ an die Stelle von x, y, z treten lässt, wozu erfordert wird, dass in derselben nur Glieder der 2ten Dimension in Bezug auf x, y, z vorkommen.

Hieraus folgt, dass die Gl. (1) eine einfachere Form erhalten wird, wenn man den Mittelpunkt als Ursprung wählt, vorausgesetzt, dass ein solcher existirt, indem dadurch jene drei Glieder aus der Gleichung verschwinden müssen, welche nach x, y, z vom 1ten Grade (linear) sind.

288. Untersuchen wir nun, ob den Flächen 2ten Grades ein Mittelpunkt zukomme. Verlegen wir den Ursprung in den noch unbestimmten Punkt ξ, η, ζ und substituiren zu diesem Zwecke in (1): $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ an die Stelle von x, y, z, so erhalten wir als transformirte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ \qquad + 2(A\xi + B''\eta + B'\zeta + C)\,x \\ \qquad + 2(A'\eta + B''\xi + B\zeta + C')\,y \\ \qquad + 2(A''\zeta + B'\xi + B\eta + C'')\,z \end{array}\right\} = H,$$

wo der Kürze wegen:

$$-H = A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\eta\zeta + 2B'\xi\zeta + 2B''\xi\eta + 2C\xi + 2C'\eta + 2C''\zeta + F$$

gesetzt ist. Bestimmen wir nun die Werthe von ξ, η, ζ so, dass

$$A\xi + B''\eta + B'\zeta + C = 0 \quad (2)$$
$$A'\eta + B''\xi + B\zeta + C' = 0 \quad (3)$$
$$A''\zeta + B'\xi + B\eta + C'' = 0 \quad (4)$$

werde, wodurch aus der transformirten Gleichung die Glieder der ersten Dimension wegfallen und somit die Bedingung ausgedrückt wird, dass der neue Ursprung Mittelpunkt der Fläche sei, so verwandelt sich obige Gleichung in die einfachere:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H, \quad (5)$$

wobei wir noch bemerken, dass mit Hilfe der Gleichungen (2), (3), (4) die Grösse H leicht auf den einfacheren Ausdruck:

$$H = -C\xi - C'\eta - C''\zeta - F \quad (5^*)$$

gebracht werden kann.

Die Existenz eines Mittelpunktes, und somit die Möglichkeit dieser Transformation hängt nun davon ab, ob aus den Glgn. (2), (3), (4) endliche und bestimmte Werthe von ξ, η, ζ folgen, oder nicht.*) Durch Auflösung dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\xi = \frac{V}{\Delta}, \quad \eta = \frac{V'}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{V''}{\Delta}, \quad (6)$$

wo
$$V = C(A'A'' - B^2) + C'(BB' - A''B'') + C''(BB'' - A'B'),$$
$$V' = C'(AA'' - B'^2) + C(BB' - A''B'') + C''(B'B'' - AB),$$
$$V'' = C''(AA' - B''^2) + C(BB'' - A'B') + C'(B'B'' - AB),$$
$$\Delta = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''. \quad (7)$$

Ist nun:

1) die Grösse Δ von 0 verschieden, so ergibt sich aus (6) für jede der Coordinaten ξ, η, ζ ein endlicher und bestimmter Werth; die Fläche hat in diesem Falle einen Mittelpunkt, und die Gleichung nimmt die Form (5) an, wenn man den Ursprung in diesen Mittelpunkt verlegt.

*) Die Polynome dieser drei Gleichungen sind, wie man leicht finde[t], die im Sinne des §. 91 gebildeten 1ten derivirten Funktionen des Polyno[ms] der Gl. (1), wenn man der Reihe nach x, y und z allein als Veränderlic[h] betrachtet, und daher immer leicht hinzuschreiben, sobald die Gl. (1) ge[-] geben ist.

2) Ist $\Delta = 0$, und sind nicht gleichzeitig auch die Zähler V, V', V'' der Nulle gleich, so wird wenigstens eine der Grössen ξ, η, ζ unendlich und die Fläche hat in diesem Falle keinen Mittelpunkt; man kann ihn als in unendlicher Entfernung liegend betrachten. Die Mittelpunktsgleichungen (2), (3), (4) müssen in diesem Falle einen Widerspruch enthalten.

3) Ist $\Delta = 0$ und verschwinden gleichzeitig auch alle drei Zähler V, V', V'', so nehmen die Ausdrücke von ξ, η, ζ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; es gibt dann unendlich viele Systeme von Werthen dieser Grössen, welche den Glgn. (2), (3), (4) Genüge leisten und die Fläche hat daher unendlich viele Mittelpunkte. Wir wollen diesen Fall sogleich näher erörtern, da nur bereits bekannte Gebilde in ihm enthalten sind.

Da zur Bestimmung der drei Grössen ξ, η, ζ die drei Gleichungen (2), (3), (4) zu Gebote stehen, so kann bekanntlich diese Unbestimmtheit nur dann eintreten, wenn dieselben nicht sämmtlich von einander verschieden sind, sondern sich nur auf zwei wesentlich verschiedene, oder gar nur auf eine einzige Gleichung reduciren.

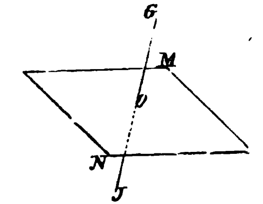
a) Kommen die besagten Gleichungen auf zwei wesentlich verschiedene zurück, was man daraus erkennt, dass die aus zweien derselben, z. B. (2) und (3) gezogenen Werthe von ξ und η die 3te Gleichung für jeden Werth von ζ identisch machen, so stellen dieselben eine gerade Linie dar, welche der geometrische Ort sämmtlicher Mittelpunkte der Fläche ist. Es sei KL (Fig. 81) diese Gerade; legen wir durch dieselbe eine beliebige Ebene und sei G ein Punkt der Durchschnittslinie dieser Ebene und der Fläche; ziehen wir ferner in dieser Ebene durch G beliebige Gerade, welche die KL in den Punkten O, O', O'', u. s. w. schneiden und machen $JO = OG$, $J'O' = O'G$, $J''O'' = O''G$, u. s. w., so liegen die Punkte J, J', J'', u. s. w. in einer zu KL parallelen Geraden und gehören zugleich der Fläche an, da jeder der Punkte O, O', O'', ... ein Mittelpunkt ist. Eben so muss aus gleichem Grunde jeder Punkt der durch G parallel zu KL gezogenen Geraden ein Punkt der Fläche sein; hieraus folgt, dass jede durch KL gelegte Ebene unsere Fläche in zwei zu KL parallelen Geraden schneidet, wodurch dieselbe als Cylinderfläche charakterisirt wird. Zugleich kann dieser Cylinder nur ein elliptischer oder hyperbolischer sein. Denn schneidet man die Fläche durch eine

Fig. 81.

auf KL senkrechte Ebene UV, so ist der Schnitt [§ 274] eine Linie zweiten Grades, welche offenbar den Punkt S zum Mittelpunkte hat und somit nur eine Ellipse oder Hyperbel sein kann. Die Gleichung (1) stellt also in diesem Falle einen elliptischen oder hyperbolischen Cylinder vor.

b) Reduciren sich aber die Glgn. (2), (3), (4) auf eine einzige, was daraus erkannt wird, dass der aus einer derselben gezogene Werth von ξ die beiden anderen für jeden Werth von η und ζ identisch macht, so drücken dieselben eine Ebene aus, als geometrischen Ort sämmtlicher Mittelpunkte der Fläche (1), und diese selbst ist in diesem Falle nichts anderes, als ein System zweier zur Mittelpunktsebene parallelen Ebenen. — In der That, sei G (Fig. 82) irgend ein Punkt der Fläche (1), verbinden wir denselben mit einem beliebigen Punkte O der Mittelpunktsebene MN, und verlängern wir GO um das Stück $OJ = OG$, so ist offenbar ein jeder Punkt der durch J parallel zur Mittelpunktsebene gelegten Ebene ein Punkt des durch Gl. (1) repräsentirten geometrischen Ortes, weil die Verbindungslinie eines jeden Punktes dieser Ebene mit dem Punkte G von der Mittelpunktsebene halbirt wird; dasselbe lässt sich nun — von dem Punkte J ausgehend — von der durch G parallel zur Mittelpunktsebene gelegten Ebene erweisen. Dass endlich kein Punkt ausserhalb dieser beiden Ebenen der Gl. (1) genügen könne, erhellt daraus, dass ein geometrischer Ort 2ter Ordnung von einer Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Die Gl. (1) stellt also in diesem Falle ein System zweier paralleler Ebenen dar, und muss sich in zwei rationale Faktoren des 1ten Grades zerlegen lassen.

Fig. 82.



Da hiernach der 3te Fall keine neuen geometrischen Gebilde darbietet, und übrigens die in demselben begriffenen (elliptischer und hyperbolischer Cylinder, System zweier parallelen Ebenen) auch als Varietäten der mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen betrachtet werden können, so theilen wir die Flächen 2ten Grades in zwei Classen ein, von welchen die 1te die mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen umfasst, die 2te diejenigen Flächen begreift, welche eines solchen ermangeln.

Nur bei ersteren ist die in diesem §. ausgeführte Transformation zulässig; ein anderes auf alle Flächen anwendbares Mittel zur Vereinfachung dieser Gleichung werden wir im Folgenden kennen lernen.

$$\frac{x-x'}{x'-x''}=\frac{z-z'}{z'-z''}, \qquad \frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{z-z'}{z'-z''} \tag{5}$$

oder

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z') \qquad y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z') \tag{6}$$

für die gesuchten Gleichungen erhält.

Die Gleichungen (4) sind, wie leicht einzusehen, die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt x', y', z' geht, was wegen der häufigen Anwendung derselben bemerkt zu werden verdient.

Lässt man auch die Coordinaten x, y, z einen bestimmten Punkt bezeichnen, so hat man in (5) oder (6) die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt sein müssen, damit 3 Punkte im Raume: x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' in einer Geraden liegen.

263. 2[te] **Aufg. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; durch ersteren eine gerade Linie zu legen, welche zu letzterer parallel ist.**

Es seien x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punktes,

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so hat man als Gl. einer Geraden, welche durch den Punkt x', y', z' geht: $x-x'=m(z-z')$, $y-y'=n(z-z')$, und $m=a$, $n=b$ als Bedingung des Parallelismus; somit sind

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z')$$

die gesuchten Gleichungen.

264. 3[te] **Aufg. Ein Punkt: x', y', z' und eine Gerade:**

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta \;\ldots\; 1)$$

sind gegeben; man suche die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt x', y', z' geht und die Gerade 1) senkrecht schneidet; die Coordinaten des Durchschnittspunktes und die Länge des zwischen diesem und dem Punkte x', y', z' enthaltenen Stückes der Senkrechten.

1) Die Gleichungen der gesuchten Senkrechten seien:

$$x=a'z+\alpha', \quad y=b'z+\beta', \tag{2}$$

so hat man, da dieselbe durch den Punkt x', y', z' gehen soll:

$$x'=a'z'+\alpha', \quad y'=b'z'+\beta'; \tag{3}$$

damit sie auf der 1) senkrecht stehe:

$$aa'+bb'+1=0, \tag{4}$$

endlich, damit sie die 1) schneide:

$$(a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha'). \qquad (5)$$

Man hat nun aus den vier Gleichungen (3), (4), (5) die Werthe der Unbekannten a', b', α', β' zu bestimmen und in (2) zu substituiren, was auf die Elimination dieser 4 Grössen zwischen den 6 Gleichungen (2) bis (5) hinauskommt, wodurch man zwei Gleichungen erhält, welche die Unbekannten nicht mehr enthalten und die gesuchten Gleichungen der Senkrechten sind.

Durch Subtraktion der Glgn. (2) und (3) findet man nun:

$$a' = \frac{x - x'}{z - z'}, \quad b' = \frac{y - y'}{z - z'}, \qquad (6)$$

welche Werthe in (4) substituirt, die Gleichung:

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0 \qquad (I)$$

liefern. Durch Substitution der aus (3) folgenden Werthe von α' und β' in (5) erhält man ferner:

$$(a - a')(\beta - y' + b'z') = (b - b')(\alpha - x' + a'z');$$

substituirt man hierin die Werthe von a', b' aus (6), und setzt Kürze halber die bekannten Grössen:

$$y' - bz' - \beta = A, \quad x' - az' - \alpha = B, \quad a(\beta - y') - b(\alpha - x') = C$$

so erhält man:

$$A(x - x') - B(y - y') + C(z - z') = 0. \qquad (II)$$

Die Gleichungen (I) und (II) sind nun jene der gesuchten Senkrechten; eliminiren wir aus beiden der Reihe nach $y - y'$ und $x - x'$, so erhalten wir sie in der gewöhnlichen Form:

$$x - x' = -\frac{Cb + B}{Ab + Ba}(z - z'), \quad y - y' = \frac{Ca - A}{Ab + Ba}(z - z'). \qquad (III)$$

2) Die Coordinaten des Durchschnittspunktes ergeben sich aus der Verbindung der Gleichungen der Senkrechten mit jenen der gegebenen Geraden, und zwar ist es am einfachsten, die 1) mit (I) zu combiniren. Bringen wir zu diesem Behufe die Glgn. 1) auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= a(z - z') - (x' - az' - \alpha) = a(z - z') - B \\ y - y' &= b(z - z') - (y' - bz' - \beta) = b(z - z') - A \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

und bestimmen aus den 3 Gleichungen (7) und (I) die Werthe von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, so erhalten wir, da $Bb - Aa = C$ ist:

$$z - z' = \frac{Ab + Ba}{N}, \quad y - y' = \frac{Ca - A}{N}, \quad x - x' = -\frac{Cb + B}{N}, \qquad (8)$$

wo Kürze halber $N = a^2 + b^2 + 1$ gesetzt ist, und x, y, z die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind.

3) Endlich hat man für die Länge P des Perpendikels, unter x, y, z die Coordinaten des Durchschnittspunktes verstanden: $P^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, folglich mit Rücksicht auf (8);

$$P = \frac{\sqrt{(Cb + B)^2 + (Ca - A)^2 + (Ab + Ba)^2}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Der Zähler unter dem Wurzelzeichen kann nach Entwickelung der Quadrate auch so geschrieben werden:

$$A^2(b^2 + 1) + B^2(a^2 + 1) + C^2(a^2 + b^2) + 2(BCb - ACa + ABab);$$

da nun $C = Bb - Aa$, somit:

$$(C - Bb + Aa)^2 = C^2 + B^2b^2 + A^2a^2 - 2(BCb - ACa + ABab) = 0$$

ist, so erhält die genannte Grösse durch Elimination des doppelten Produktes die Form $(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + 1)$, wodurch sich für P der folgende einfachere Ausdruck ergibt:

$$P = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2 + b^2 + 1}}. \tag{9}$$

Die Auflösung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn man die gesuchte Gerade als den Durchschnitt zweier durch den Punkt x', y', z' gelegten Ebenen betrachtet, von denen die eine auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, die andere durch diese hindurchgeht. In der That sind obige Gleichungen I und II die Gleichungen dieser Ebenen, wie wir später [§. 270 und 267] sehen werden.

265. 4te Aufg. Man sucht die Gleichungen der Geraden, welche durch den Punkt x', y', z' geht und auf der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

normal steht; die Coordinaten des Durchschnittspunktes und die Länge des zwischen diesem Punkte und dem Punkte x', y', z' liegenden Stückes der Normale.

Die Gleichungen einer Geraden, welche den Punkt x', y', z' enthält, sind bekanntlich

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

und damit diese auf der Ebene (I) senkrecht stehe, muss $a = \frac{A}{C}$, $b = \frac{B}{C}$ sein; folglich sind:

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z') \tag{1}$$

die gesuchten **Gleichungen der Normale.**

Zur Bestimmung des Durchschnittspunktes bringen wir die Gl. (1) auf die Form:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + (Ax' + By' + Cz' + D) = 0$$

und verbinden diese Gleichung mit den Glgn. (1), so erhalten wir, wenn Kürze halber

$$Ax' + By' + Cz' + D = E, \quad \text{und} \quad A^2 + B^2 + C^2 = N$$

gesetzt wird:

$$x - x' = -\frac{AE}{N}, \quad y - y' = -\frac{BE}{N}, \quad z - z' = -\frac{CE}{N}, \tag{2}$$

wo x, y, z die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind. Endlich ist die Länge P des zwischen diesem und dem Punkte x', y', z' liegenden Stückes der Normale:

$$P = \frac{E}{\sqrt{N}} = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{3}$$

wobei das Vorzeichen der Wurzelgrösse übereinstimmend mit dem Zeichen des Zählers zu nehmen ist, welches letztere positiv oder negativ sein wird, je nachdem der Ursprung und der Punkt x', y', z' auf entgegengesetzten Seiten oder auf derselben Seite der Ebene I liegen.

Ist die Gleichung der Ebene I in der Form:

$$p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

gegeben, wo bekanntlich p die Länge des aus dem Ursprunge auf die Ebene gefällten Perpendikels, α, β, γ die Neigungswinkel desselben gegen die positiven Halbaxen der x, y, z bedeuten, so ergibt sich die Entfernung P des Punktes x', y', z' von dieser Ebene sofort durch die Bemerkung, dass

$$p' = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma \tag{m}$$

die Gleichung irgend einer zur gegebenen parallelen Ebene, und der Abstand beider Ebenen $= \pm (p' - p)$ ist, je nachdem $p' >$ oder $< p$ ist. Dieser Abstand wird aber $= P$, wenn die Ebene (m) durch den Punkt x', y', z' geht, wozu erfordert wird, dass

$$p' = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma$$

sei, wodurch sich p' bestimmt; man hat daher:

$$P = \pm (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p). \tag{4}$$

Das Zeichen der Grösse in der Klammer hängt in derselben Weise

wie jenes des Zählers im Ausdrucke (3) von der Lage des Punktes x', y', z' in Bezug auf die Ebene und den Ursprung ab. Auch bemerkt man sofort, dass mittelst der Glgn. (6) [§. 254] aus (4) wieder der Ausdruck (3) erhalten wird, und umgekehrt.

266. 5te Aufg. **Es wird die Gleichung der Ebene verlangt, welche durch drei gegebene Punkte geht.**

Die Coordinaten der gegebenen Punkte M_1, M_2, M_3 seien $x_1, y_1 z_1$; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; die Gleichung der Ebene sei:

$$Ax + By + Cz + D = 0; \qquad (m)$$

setzt man der Kürze halber $-\frac{A}{D} = a$, $-\frac{B}{D} = b$, $-\frac{C}{D} = c$, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten a, b, c folgende Bedingungsgleichungen:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 1, \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = 1, \quad ax_3 + by_3 + cz_3 = 1,$$

die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von a, b, c erscheinen bekanntlich in Form von Brüchen, welchen ein und derselbe Nenner zukommt; nimmt man diesen für den Werth von D, was wegen der Willkürlichkeit dieser Grösse gestattet ist, so erhält man:

$$A = z_1(y_2 - y_3) + z_2(y_3 - y_1) + z_3(y_1 - y_2)$$
$$B = x_1(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_2)$$
$$C = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$$
$$D = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Wie man durch Vergleichung mit (4), §. 165 findet, sind die Coefficienten A, B, C nichts anderes als die doppelten Flächeninhalte der Projectionen des Dreieckes $M_1M_2M_3$ auf die coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, somit, wenn f, f'. f'' diese Flächeninhalte bezeichnen: $A = 2f$, $B = 2f'$, $C = 2f''$.

Um auch die geometrische Bedeutung des Coefficienten D zu finden, sei F der Flächeninhalt des Dreieckes $M_1M_2M_3$ selbst, so hat man [§. 251, Gl. (9)]: $F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2$, somit $A^2 + B^2 + C^2 = 4F^2$. Bezeichnet man nun mit p das aus dem Ursprunge auf die Ebene (m) gefällte Perpendikel, so ist bekanntlich [§. 254] $p = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, folglich $\pm D = 2Fp$, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem D positiv oder negativ ist. Es ist aber Fp bekanntlich der 3fache Körperinhalt der Pyramide, welche das $\triangle M_1M_2M_3$ zur Grundfläche und den Ursprung zum Scheitel hat, somit D das 6fache dieses Volums.

Setzt man die eben gefundenen Werthe von A, B, C, D in (m) ein und dividirt durch 6, so kommt:

$$\tfrac{1}{3}f \cdot x + \tfrac{1}{3}f' \cdot y + \tfrac{1}{3}f'' \cdot z = \tfrac{1}{3}F \cdot p;$$

nun sind $\frac{1}{3}f \cdot x$, $\frac{1}{3}f' \cdot y$, $\frac{1}{3}f'' \cdot z$ die Körperinhalte der 3 Pyramiden, welche die Projectionen des $\triangle\, M_1 M_2 M_3$ zur Grundfläche und einen beliebigen Punkt x, y, z der Ebene dieses Dreieckes zur gemeinschaftlichen Spitze haben; die letzte Gleichung spricht daher den bemerkenswerthen Satz aus, dass die Summe dieser drei Pyramiden eine constante Grösse und gleich ist jener Pyramide, welche das $\triangle\, M_1 M_2 M_3$ zur Basis und den Ursprung zum Scheitel hat.

Der Satz gilt übrigens auch dann, wenn eine beliebige ebene Figur an die Stelle des $\triangle\, M_1 M_2 M_3$ gesetzt wird. In der That, ist

$$x \cos(\mathrm{I} \,.\, yz) + y \cos(\mathrm{I} \,.\, xz) + z \cos(\mathrm{I} \,.\, xy) = p$$

die Gl. einer beliebigen Ebene I, und F der Flächeninhalt einer beliebigen gerad- oder krummlinigen in derselben verzeichneten Figur, so ist auch:

$$\tfrac{1}{3}x \,.\, F \cos(\mathrm{I} \,.\, yz) + \tfrac{1}{3}y \,.\, F \cos(\mathrm{I} \,.\, xz) + \tfrac{1}{3}z \,.\, F \cos(\mathrm{I} \,.\, xy) = \tfrac{1}{3}Fp;$$

es sind aber $F \cos(\mathrm{I} \,.\, yz)$, $F \cos(\mathrm{I} \,.\, xz)$, $F \cos(\mathrm{I} \,.\, xy)$ die Flächeninhalte der Projectionen der Figur F auf die coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, somit, wenn dieselben mit f, f', f'' bezeichnet werden

$$\tfrac{1}{3}f \cdot x + \tfrac{1}{3}f' \cdot y + \tfrac{1}{3}f'' \cdot z = \tfrac{1}{3}Fp,$$

wie oben; die Pyramiden gehen natürlich in Kegel über, wenn F eine krummlinige Figur ist.

267. 6[te] **Aufg. Es wird die Gleichung einer Ebene gefordert, welche durch den Punkt x', y', z' geht, und die Gerade**

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \;\ldots\ldots\; m)$$

in sich enthält.

Es sei:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so haben wir die Bedingungsgleichungen:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0, \qquad (2)$$

$$Aa + Bb + C = 0 \;\ldots\ldots\; (3), \quad A\alpha + B\beta + D = 0; \qquad (4)$$

von welchen die 1[te] ausdrückt, dass der Punkt x', y', z' in der gesuchten Ebene liege, die zwei anderen die Bedingung enthalten [§. 261, Gl. (6)], dass die Ebene durch die Gerade (m) gehe.

Durch Subtraktion der Glgn. (1) und (2) erhält man zunächst:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \qquad (5)$$

als Gleichung jeder Ebene, welche durch den Punkt x', y', z' geht; ferner, wenn man den aus (2) folgenden Werth von D in (4) substituirt:

$$A(\alpha - x') + B(\beta - y') - Cz' = 0. \qquad (6)$$

Aus (3) und (6) folgt aber:

$$\frac{A}{C} = -\frac{\beta + bz' - y'}{a(\beta - y') - b(\alpha - x')}, \quad \frac{B}{C} = \frac{\alpha + az' - x'}{a(\beta - y') - b(\alpha - x')},$$

welche Werthe in (5) substituirt, die Gleichung:

$$(\beta + bz' - y')(x - x') - (\alpha + az' - x')(y - y') - [a(\beta - y') - b(\alpha - x')]$$
$$(z - z') = 0 \qquad (I)$$

für die gesuchte Ebene liefern.

Kürzer gelangt man zu dieser Gleichung auf folgendem Wege. Bringen wir die Glgn. (m) der gegebenen Geraden auf die Form: $x - az - \alpha = 0$, $y - bz - \beta = 0$, multipliciren eine derselben, etwa die 2te mit dem unbestimmten Faktor λ und addiren sodann, so erhalten wir die Gleichung:

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0, \qquad (7)$$

welche einer Ebene angehört, weil sie nach x, y, z vom ersten Grade ist; welche Ebene aber auch durch die Gerade (m) geht, da (7) offenbar durch dieselben Werthe x, y, z befriediget wird, welche den Glgn. (m) Genüge leisten. Die weitere Bedingung, dass diese Ebene noch den Punkt x', y' z' enthalte, liefert die Gleichung:

$$x' - az' - \alpha + \lambda(y' - bz' - \beta) = 0$$

zur Bestimmung der Grösse λ, durch deren Elimination aus (7)

$$(x - az - \alpha)(y' - bz' - \beta) - (y - bz - \beta)(x' - az' - \alpha) = 0 \quad (II)$$

folgt; diese ist die Gl. der gesuchten Ebene und mit (I) identisch, wie man sich leicht überzeugen kann.

268. 7te Aufg. Man soll die Gleichung einer Ebene finden, welche durch die Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \qquad (m)$$

geht, und zu der Geraden

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta' \qquad (n)$$

parallel ist.

Die Gleichung einer Ebene, welche durch die Gerade (m) geht, ist nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0, \quad \text{oder}$$

$$x + \lambda y - (a + \lambda b)\, z - (\alpha + \lambda\beta) = 0, \tag{1}$$

und damit diese Ebene zur Geraden (n) parallel sei, muss die Bedingungsgleichung [(2), §. 261]: $a' + \lambda b' - (a + \lambda b) = 0$ erfüllt werden, woraus $\lambda = -\frac{a' - a}{b' - b}$ folgt; substituirt man diesen Werth in (1), so erhält man die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$x(b' - b) - y(a' - a) - z(ab' - a'b) - [\alpha(b' - b) - \beta(a' - a)] = 0. \tag{I}$$

269. 8[te] **Aufg. Man suche die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt x', y', z' geht und zu den beiden Geraden**

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots (m) \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots (n)$$

parallel ist.

Die Gleichung einer durch den Punkt x', y', z' gelegten Ebene hat die Form:

$$M(x - x') + N(y - y') + z - z' = 0. \tag{1}$$

Die Bedingung, dass diese Ebene den Geraden (m) und (n) parallel laufe, wird durch die Gleichungen:

$$Ma + Nb + 1 = 0, \quad Ma' + Nb' + 1 = 0$$

ausgedrückt, aus welchen man

$$M = -\frac{b' - b}{ab' - a'b}, \quad N = \frac{a' - a}{ab' - a'b}$$

findet, womit sich (1) in:

$$(b' - b)(x - x') - (a' - a)(y - y') - (ab' - a'b)(z - z') = 0 \tag{1}$$

verwandelt, welche die gesuchte Gleichung ist.

270. 9[te] **Aufg. Ein Punkt x', y', z', und eine Gerade:**

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots . (m)$$

sind gegeben; man soll durch erstere senkrecht auf die Gerade eine Ebene legen.

Es sei $M(x - x') + N(y - y') + z - z' = 0$ die Gl. einer durch den Punkt x', y', z' gehenden Ebene, so muss, damit dieselbe auf der Geraden (m) senkrecht stehe, [§. 261, Gl. (3)] $a = M$, $b = N$ sein, wodurch wir:

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene erhalten

Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der gegebenen Geraden, und die Entfernung dieses Punktes vom Punkte x', y', z' findet man wieder, wie leicht einzusehen, die schon in §. 264 entwickelten Ausdrücke (8) und (9).

271. 10te Aufg. Durch den Punkt x', y', z' soll eine Ebene gelegt werden, welche parallel ist zu der gegebenen Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \; . \; . \; . \; . \; (m)$$

Stellen wir eine durch den Punkt x', y', z' gehende Ebene durch die Gleichung

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0$$

vor, so erfordert der Parallelismus zur Ebene (m) noch die Erfüllung der Bedingungen:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

welchen wir genügen, wenn wir $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$ setzen, wodurch wir nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors m:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Gl. der gesuchten Ebene erhalten.

272. 11te Aufg. Man soll durch die Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \; . \; . \; . \; . \; (m)$$

eine Ebene legen, welche senkrecht steht auf der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

Eine Ebene, welche die Gerade (m) enthält, wird durch die Gleichung:

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0$$

oder

$$x + \lambda y - (a + \lambda b)z - (\alpha + \lambda\beta) = 0$$

vorgestellt, und damit diese auf der Ebene (n) senkrecht stehe, muss die Bedingung [Gl. (5) §. 257]: $A + B\lambda - C(a + \lambda b) = 0$ erfüllt werden, wodurch $\lambda = -\dfrac{A - aC}{B - bC}$ wird. Substituirt man diesen Werth in obige Gleichung, so ergibt sich:

$$(B - bC)x - (A - aC)y + (Ab - Ba)z - [\alpha(B - bC) - \beta(A - aC)] = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

273. Die vorstehenden Aufgaben geben mehr als genügende Anleitung zur Behandlung anderer die gerade Linie und Ebene betreffenden, unter welchen wir noch die Aufgabe: die kürzeste Entfernung zweier gegebenen Geraden zu bestimmen, erwähnen und den Gang der Auflösung kurz andeuten wollen. Man lege durch die beiden Geraden (1) und (2) [nach §. 268] zwei zu einander parallele Ebenen I und II, so ist der Abstand derselben, nach Gl. (4), §. 257 berechnet, offenbar die gesuchte kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Wird sodann durch jede der Geraden (1) und (2) eine Ebene senkrecht auf die parallelen Ebenen I und II gelegt, so schneiden sich diese neuen Ebenen in einer Geraden, welche die Ebenen I und II, folglich auch die beiden gegebenen Geraden senkrecht schneidet, und Ort und Richtung der kürzesten Entfernung bestimmt.

DRITTES KAPITEL.

VON DEN KRUMMEN FLÄCHEN IM ALLGEMEINEN; DEN CYLINDRISCHEN, CONISCHEN ROTATIONS- UND WINDSCHIEFEN FLÄCHEN.

---

274. Der geometrische Ort jeder Gleichung, welche in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten den 1ten Grad überschreitet, so wie jeder transcendenten Gleichung ist im Allgemeinen eine krumme Fläche. So wie die ebenen Curven, kann man auch die Flächen in algebraische und transcendente eintheilen, und die ersteren nach dem Ordnungsexponenten ihrer Gleichungen in Flächen des 1ten Grades (die Ebene), des 2ten, 3ten Grades, u. s. w. unterscheiden. Die lineare Form aller in §. 252 entwickelten Gleichungen, welche den Uebergang von irgend einem Coordinatensysteme zu einem beliebigen anderen vermitteln, zeigt auf der Stelle, dass der Grad der Gleichung einer Fläche von der Wahl des Coordinatensystemes unabhängig ist, folglich mit d durch sie repräsentirten Fläche in einem wesentlichen Zusammenhang steht.

Um die Gestalt einer Fläche aus ihrer Gleichung zu erkennen ist es am einfachsten, dieselbe durch Ebenen zu schneiden, und die Natur der Durchschnittslinien zu untersuchen. Ist $F(x, y, z) = 0$ die

Gleichung der krummen Fläche, und $L = 0$ die Gleichung der schneidenden Ebene, so gehören diese beiden Gleichungen, als coëxistirend betrachtet, der Durchschnittslinie an; eliminirt man aus beiden Gleichungen der Reihe nach z, y, x, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der Durchschnittslinie auf die coordinirten Ebenen der xy, xz und yz. Ist nun die schneidende Ebene keiner der coordinirten Ebenen parallel, so lässt sich die Gestalt des Schnittes aus den Gleichungen seiner Projectionen nicht sofort erkennen, und es ist dann am einfachsten, die Durchschnittscurve auf zwei in ihrer Ebene selbst liegende Axen zu beziehen, was man durch Transformation der Coordinaten auf folgende Weise erreicht, wobei wir immer rechtwinkelige Coordinaten voraussetzen.

Man nehme die schneidende Ebene als $x'y'$-Ebene eines neuen Coordinatensystemes an; bezeichnet man nun mit a, b, c die Coordinaten eines in dieser Ebene liegenden Punktes, welchen man als neuen Ursprung wählt, mit φ den Winkel, welchen die Knotenlinie der schneidenden Ebene in der xy-Ebene mit der Axe der x bildet, mit ψ den Winkel, welchen die Axe der x' mit der eben genannten Knotenlinie einschliesst, endlich mit θ den Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen jene der xy, so hat man [§. 252, (9)]:

$$\begin{aligned} x &= a + x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y &= b + x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z &= c + x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gl. der Fläche, so erhält man dieselbe auf das neue Coordinatensystem bezogen, in welcher sodann nur $z' = 0$ zu setzen ist, um die Gleichung der Durchschnittslinie der Fläche mit der Ebene der $x'y'$, d. i. der gegebenen schneidenden Ebene zu erhalten. Da hiedurch aus der transformirten Gleichung alle mit z' multiplicirten Glieder verschwinden, so wird man einfacher zu demselben Resultate gelangen, wenn man schon in den obigen Transformationsformeln $z' = 0$ setzt; nimmt man dann noch die neue x'-Axe parallel zu der oben erwähnten Knotenlinie, so wird auch $\psi = 0$, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta, \\ z &= c + y'\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gl. der Fläche liefert unmittelbar die Gl. des gesuchten Durchschnittes.

Geht die schneidende Ebene durch den Ursprung, so behält man gewöhnlich diesen unverändert bei, wodurch in den Ausdrücken (m) $a = b = c = 0$, und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen der xy und $x'y'$ zur neuen Axe der x' wird.

Aus der linearen Form obiger Gleichungen folgt zugleich, dass die Durchschnittslinie einer Fläche der m^{ten} Ordnung und einer Ebene höchstens eine Curve des m^{ten} Grades sein kann.

Eben so ist klar, dass eine Fläche der m^{ten} Ordnung von einer Geraden nicht in mehr als m Punkten geschnitten werden kann. Denn eliminirt man aus der Gl. des m^{ten} Grades der Fläche und jenen einer geraden Linie, welche bekanntlich vom ersten Grade sind, zwei Coordinaten, z. B. x und y, so kann die Eliminationsgleichung, welche die z-Coordinaten sämmtlicher Durchschnittspunkte liefert, bekanntlich den m^{ten} Grad nicht überschreiten.

275. Analytisch ist eine Fläche durch ihre Gleichung definirt; ist letztere gegeben, so kann die Frage nach den durch sie ausgedrückten Flächen und deren Eigenschaften zum Gegenstande einer Untersuchung gemacht werden, wie dies im folgenden Kapitel mit den Flächen der 2ten Ordnung geschehen wird.

Geometrisch ist eine Fläche bestimmt durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft derselben, welche zur Ableitung ihrer Gleichung benützt werden kann.

Ein einfaches Beispiel hiezu bietet uns die Kugelfläche dar. Aus der bekannten Eigenschaft, dass alle Punkte derselben von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit entfernt sind, ergibt sich sogleich als Gleichung der Kugel:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2, \qquad (1)$$

wenn α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunktes, x, y, z jene eines beliebigen Punktes der Fläche sind, und r die constante Entfernung dieser Punkte, d. i. den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so hat man als Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Aus (1) folgt durch Entwickelung der Quadrate:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0. \qquad (3$$

Wie man sieht, ist die Kugel eine Fläche der 2ten Ordnung; jed Gleichung des 2ten Grades von der Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \qquad (4)$$

in welcher die Quadrate von x, y, z gleiche Coefficienten haben, die Produkte xy, xz und yz aber fehlen, gehört einer Kugelfläche an, für welche man, (4) mit (3) vergleichend, als Coordinaten des Mittelpunktes und Halbmesser findet:

$$\alpha = -C, \ \beta = -C', \ \gamma = -C''; \ r = \sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2 - F}.$$

Da bekanntlich eine Kugel von einer Ebene in einem Kreise geschnitten wird, so bedient man sich zur analytischen Darstellung eines Kreises im Raume gewöhnlich des Systemes der Gleichungen einer Kugel und einer Ebene.

Weit häufiger entlehnt man jedoch die Definition einer Fläche von der Art ihrer Erzeugung durch Bewegung einer Linie im Raume. Jede Fläche kann man sich nämlich dadurch entstanden denken, dass sich eine Linie (die erzeugende Linie) im Raume nach einem bestimmten Gesetze bewege, wobei sie entweder ihre Form beibehält, oder diese gleichzeitig verändert. So wird der aus den Elementen bekannte gerade Cylinder durch Bewegung einer Geraden erzeugt, welche an der Peripherie eines Kreises fortgleitet, auf dessen Ebene sie beständig senkrecht steht; die Kugelfläche kann man sich durch Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser erzeugt denken; u. s. w. Diese Betrachtung der Flächen führt zugleich zu einer Eintheilung derselben in Familien, je nach dem ihrer Erzeugung zu Grunde liegenden Gesetze der Bewegung der erzeugenden Linie, welche Eintheilung nicht nur für die mathematische Behandlung, sondern namentlich auch für die mannigfaltigen praktischen Anwendungen von grossem Nutzen ist. Uebrigens ist diese Eintheilung keine systematische, indem eine und dieselbe Fläche auf mehrfache Weise erzeugt und demzufolge als mehreren Familien angehörig betrachtet werden kann.

276. Die Ableitung der Gleichung der erzeugten Fläche hat keine Schwierigkeit, wenn die erzeugende Linie und das Gesetz ihrer Bewegung gegeben sind. Der Gang der Rechnung ist folgender. Es seien:

$$F(x, y, z, a, b, c \ldots) = 0, \quad F'(x, y, z, a', b', c', \ldots) = 0 \quad (1)$$

die gegebenen Gleichungen der erzeugenden Linie, in welchen a, b, c, ... a', b', c', ... Coefficienten bedeuten, welche die Lage der Linie im Raume und ihre Abmessungen bestimmen und allgemein Parameter genannt werden. Offenbar müssen einige dieser Parameter unbestimmt sein, weil sonst diese Linie keiner Ortsveränderung fähig wäre, und man sieht leicht ein, dass jede der Glgn. (1) einen oder mehrere derlei

unbestimmte Parameter enthalten müsse; denn da jede dieser Gleichungen eine Fläche bedeutet, deren Durchschnitt eben die erzeugende Linie ist, so würde, falls etwa sämmtliche Parameter der 2ten Gleichung constant wären, der Durchschnitt immer auf der durch diese Gleichung dargestellten festen Fläche liegen, und also eben nur diese Fläche erzeugen können, wie auch die Parameter der 1ten Gleichung sich ändern und diese Fläche sich bewegen möge. Ferner überzeugt man sich leicht, dass von den veränderlichen Parametern nur einer willkürlich, die anderen aber von diesem abhängig oder Funktionen desselben sein müssen, weil ja von einer Lage der erzeugenden Linie zur nächsten die veränderlichen Parameter nach einem bestimmten Gesetze sich ändern sollen.

Dies vorausgesetzt, seien, um die Ideen zu fixiren, a, b, a', b' unbestimmte Parameter; einen derselben, z. B. a, nehmen wir als willkürlich und setzen daher $b = \varphi(a)$, $a' = \psi(a)$, $b' = \chi(a)$, wo φ, ψ, χ willkürliche Funktionen bezeichnen; die Glgn. (1) der erzeugenden Linie nehmen dadurch die Form an:

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0, \quad F'[x, y, z, \psi(a), \chi(a)] = 0; \quad (2)$$

jeder Punkt im Raume, dessen Coordinaten diesen Gleichungen Genüge leisten, liegt in der erzeugenden Linie bei irgend einer Lage derselben, welche durch den, dem willkürlichen Parameter a ertheilten Werth bestimmt ist; eliminirt man daher diese Grösse aus den Glgn. (2), so erhält man eine Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

welche nothwendig durch alle Punkte im Raume befriediget wird, die sich in der erzeugenden Linie bei irgend einer Lage derselben befinden, und somit die Gleichung der erzeugten Fläche selbst ist.

Zur Bestimmung der in den Glgn. (2) vorkommenden willkürlichen Funktionen müssen eben so viele Bedingungen gegeben sein, an welche die Bewegung der erzeugenden Linie gebunden ist; z. B. bei obiger Annahme dreier Funktionen, drei Curven, welche die erzeugende Linie beständig schneiden soll.

Nennt man A, B, C die drei Curven, welche die Bewegung der Erzeugenden dirigiren, und den Namen Leitlinien führen, so eliminire man aus den Glgn. (2) und jenen der Leitlinie A die Coordinaten x, y, z; man erhält dadurch eine Gleichung $L = 0$, zwischen den Grössen a, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$, welche die Bedingung ausdrückt, dass die Erzeugende (2) mit der Curve A einen Punkt gemeinschaftlich besitze. Durch dieselbe Operation auf die Leitlinien B und C angewendet,

ergeben sich noch zwei Bedingungsgleichungen, $M = 0$, $N = 0$, welche in Verbindung mit jener: $L = 0$ zur Bestimmung der Funktionen $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ hinreichen. Werden sodann die gefundenen Werthe derselben in (2) substituirt, so hat man aus diesen Gleichungen noch a zu eliminiren, um die Gl. (3) der Fläche zu erhalten. Dies kommt, wie leicht einzusehen, darauf hinaus, aus fünf Gleichungen, nämlich jenen (2) der Erzeugenden und obigen drei Bedingungsgleichungen: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, die vier Grössen a, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ zu eliminiren, was auf beliebige Weise geschehen mag.

Von den Cylinderflächen.

277. Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die einer gegebenen festen Geraden stets parallel bleibt, heisst eine Cylinderfläche.

Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen sofort, da diese Gerade ihre Richtung nicht ändert, a und b constante gegebene Grössen bedeuten, während α, β, bekanntlich die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der xy, als veränderliche Parameter zu betrachten sind. Setzen wir daher

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{2}$$

so werden die Gleichungen der irgend eine Cylinderfläche erzeugenden Geraden:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{3}$$

aus welchen durch Elimination von α:

$$y - bz = \varphi(x - az) \tag{4}$$

oder

$$f(x - az, \quad y - bz) = 0 \tag{5}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen folgt.

Hätte man allgemeiner die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

gegeben, so würde man als Gleichung der Cylinderfläche:

$$ax + by + cz = \varphi(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten; in jeder dieser Formen erkennt man als charakteristisches Merkmal der Gl. einer Cylinderfläche, dass dieselbe

irgend eine Relation zwischen zwei linearen Funktionen von x, y, z ausspricht.

Die Form der Funktion φ oder f bestimmt sich meistens durch die Bedingung, dass die Erzeugende bei ihrer Bewegung eine gegebene Curve stets schneide. Sind:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, so wird man aus (1) und (6) die Coordinaten x, y, z eliminiren, wodurch man zu der Relation (2): $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$ gelangt; aus dieser und den Glgn. der Erzeugenden hat man dann noch α und β zu eliminiren, um die gesuchte Gl. der Cylinderfläche zu erhalten.

278. Beisp. 1. Die Leitlinie sei ein Kreis in der Ebene der xy, dessen Gleichungen: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, $z = 0$; ferner $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden. Durch Elimination von x, y, z aus diesen 4 Gleichungen erhält man: $(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2 = r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden α und β eliminirt:

$$(x - az - p)^2 + (y - bz - q)^2 = r^2$$

als Gleichung des schiefen Cylinders von kreisförmiger Basis.

Lässt man den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises mit dem Ursprunge zusammenfallen, so wird $p = q = 0$ und die Gl. des Cylinders:

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2.$$

Steht auch noch die erzeugende Gerade senkrecht auf der Ebene der xy, so ist $a = b = 0$, und man hat:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

als Gleichung des geraden Cylinders von kreisförmiger Basis.

Beisp. 2. Die Leitlinie sei eine Ellipse in der Ebene der xy, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge, deren grosse Axe $2A$ mit der Axe der x zusammenfällt, somit:

$$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2, \; z = 0$$

ihre Gleichungen; ferner wie oben $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen der Erzeugenden, so erhält man auf demselben Wege:

$$B^2(x - az)^2 + A^2(y - bz)^2 = A^2B^2$$

als Gleichung des schiefen elliptischen Cylinders, welche f $a = b = 0$ in die Gleichung:

$$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2 \qquad ($$

des geraden elliptischen Cylinders übergeht.

289. Diametral-Ebenen. Denken wir uns in einer beliebigen krummen Fläche eine Schaar paralleler Sehnen gezogen, so nennt man den geometrischen Ort der Halbirungspunkte derselben eine Diametral-Fläche. Die Diametralflächen von Flächen des 2ten Grades können, wie wir sogleich sehen werden, nur Ebenen sein. Nimmt man nun eine solche Diametralebene als Ebene der xy und die Axe der z parallel mit den zugehörigen Sehnen, (wobei also im Allgemeinen ein schiefwinkeliges Coordinatensystem zu Stande kommt), so werden zu irgend einem Werthe $x = OR$ und $y = RP$ (Fig. 83) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von z : PM und PM' gehören, und es ist klar, dass die Gleichung der Fläche, auf ein solches Coordinatensystem bezogen, in Bezug auf z rein quadratisch sein, also kein Glied enthalten wird, in welchem z in der 1ten Potenz vorkommt. Hiedurch ist nun ein zweites Mittel zur Vereinfachung der Gl. (1) geboten, welches den Vorzug hat, auf alle Flächen anwendbar zu sein; übrigens werden wir, um den Vortheil, mit rechtwinkeligen Coordinaten zu rechnen, nicht zu verlieren, uns nach solchen Diametral-Ebenen umzusehen haben, welche von den zugehörigen Sehnen rechtwinkelig geschnitten und Haupt-Ebenen genannt werden.

Fig. 83.

Suchen wir zuvörderst die zu einer gegebenen Folge paralleler Sehnen gehörige Diametralebene. Es seien:

$$x = mz + p, \quad y = nz + q \tag{8}$$

die Gleichungen einer dieser Sehnen, in welchen m und n gegebene, die Richtung der Sehnen bestimmende Grössen sind, während p und q von einer Sehne zur andern sich ändern. Verbinden wir dieselben mit der auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen Gl. (1) der Fläche 2ter Ordnung, so erhalten wir durch Elimination von x und y zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$Pz^2 + 2Qz + R = 0, \tag{9}$$

in welcher:

$$P = Am^2 + A'n^2 + A'' + 2(Bn + B'm + B''mn),$$
$$Q = Amp + A'nq + Bq + B'p + B''(np + mq) + Cm + C'n + C'',$$
$$R = Ap^2 + A'q^2 + 2B''pq + 2Cp + 2C'q + F,$$

ist. Bezeichnen wir ferner mit X, Y, Z die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne (8), so ist, wenn z_1, z_2 die beiden Wurzeln

der Gl. (9) sind, $Z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = -\frac{Q}{P}$; folglich:

$$Z = -\frac{Amp + A'nq + Bq + B'p + B''(np + mq) + Cm + C'n + C''}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2(Bn + B'm + B''mn)}$$

$$Y = nZ + q, \quad X = mZ + p.$$

Eliminiren wir endlich aus diesen drei Gleichungen die Grössen p und q, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{r}(Am+B'+B''n)X+(A'n+B+B''m)Y+(A''+Bn+B'm)Z\\ +(Cm+C'n+C'')\end{array}\right\} = 0 \quad (10)$$

als Gleichung der gesuchten Diametral-Fläche, welche somit, in Folge der nach X, Y, Z linearen Form dieser Gleichung, eine Ebene ist.

Da die Coefficienten von X, Y, Z und das constante Glied in (10) für jeden reellen Werth von m und n reell sind, so entspricht im Allgemeinen jeder Folge paralleler Sehnen eine (conjugirte) Diametral-Ebene und jede Fläche 2ter Ordnung lässt daher unendlich viele Diametral-Ebenen zu.

Nach m und n geordnet, nimmt (10) folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{r}(AX+B''Y+B'Z+C)m+(A'Y+B''X+BZ+C')n\\ +A''Z+B'X+BY+C''\end{array}\right\} = 0 \quad (11)$$

und wird augenscheinlich identisch, wenn man darin für X, Y, Z die aus den Glgn. (2), (3), (4) folgenden Werthe der Mittelpunktscoordinaten ξ, η, ζ substituirt. Hieraus folgt, dass bei jenen Flächen, welchen ein Mittelpunkt zukommt, jede Diametral-Ebene durch diesen Punkt geht.

Die Durchschnittslinie zweier Diametral-Ebenen heisst ein Durchmesser der Fläche.

290. Hauptebenen. So nennt man jene Diametral-Ebenen, welche ihren conjugirten Sehnen unter einem rechten Winkel begegnen. Es folgt aus diesem Begriffe, dass jede Hauptebene die Fläche in zwei symmetrische Hälften theilt.

Damit die Diametral-Ebene (10) die zugehörigen Sehnen, deren eine durch die Glgn. (8) dargestellt wird, senkrecht schneide, müssen [§. 261, Gl. (3)] die Bedingungsgleichungen:

$$m = \frac{Am + B' + B''n}{A'' + Bn + B'm}, \quad n = \frac{A'n + B + B''m}{A'' + Bn + B'm}$$

erfüllt werden. Aus diesen Gleichungen würde sich m und n, und hie-

mit die Richtung jenes Systemes paralleler Sehnen finden lassen, welche die conjugirte Diametral-Ebene senkrecht treffen, welche Richtung wir **Hauptrichtung** nennen wollen.

Zweckmässiger ist jedoch folgendes Verfahren. Setzen wir den Nenner:

$$A'' + Bn + B'm = s,$$

wo s als eine neue noch unbekannte Hilfsgrösse zu betrachten ist, so treten an die Stelle der beiden letzten Gleichungen folgende drei:

$$\left.\begin{aligned}(A \;\; - s)\, m + B''n + B' &= 0\\ (A' - s)\, n + B''m + B \;&= 0\\ A'' - s \quad + B'm + Bn &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

aus welchen man die Werthe von s, m, n auf folgendem Wege findet.

Dividiren wir die 1te dieser Gleichungen durch $B'B''$, addiren zu beiden Seiten $\frac{m}{B}$, und setzen Kürze halber:

$$K = \frac{m}{B} + \frac{n}{B'} + \frac{1}{B''}, \qquad (13)$$

so kommt:

$$(A - s)\frac{m}{B'B''} - \frac{m}{B} = -K,$$

oder

$$\left(A - s - \frac{B'B''}{B}\right)\frac{m}{B'B''} = -K.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus der 2ten und 3ten der Glgn. (12):

$$\left(A' - s - \frac{BB''}{B'}\right)\frac{n}{BB''} = -K,$$

$$\left(A'' - s - \frac{BB'}{B''}\right)\frac{1}{BB'} = -K.$$

Setzt man nun:

$$L = A - \frac{B'B''}{B}, \quad M = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad N = A'' - \frac{BB'}{B''}, \qquad (14)$$

so erhält man aus den drei letzten Gleichungen:

$$m = \frac{K.B'B''}{s - L}, \quad n = \frac{K.BB''}{s - M}, \quad 1 = \frac{K.BB'}{s - N}.$$

Die zwei ersten dieser Gleichungen, durch die 3te dividirt, geben:

$$m = \frac{B''}{B}\cdot\frac{s - N}{s - L}, \quad n = \frac{B''}{B'}\cdot\frac{s - N}{s - M}. \qquad (15)$$

Werden aber dieselben drei Gleichungen der Reihe nach durch B, B', B'' dividirt und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (13):

$$1 = \frac{B'B''}{B(s-L)} + \frac{BB''}{B'(s-M)} + \frac{BB'}{B''(s-N)}, \qquad (16)$$

welche Gleichung durch Multiplikation mit $(s-L)(s-M)(s-N)$ und Division mit $BB'B''$ die Form:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{BB'B''}(s-L)(s-M)(s-N) - \frac{1}{B^2}(s-M)(s-N) \\ \quad - \frac{1}{B'^2}(s-L)(s-N) - \frac{1}{B''^2}(s-L)(s-M) \end{array}\right\} = 0 \qquad (17)$$

annimmt, und endlich, wenn man entwickelt und die Werthe von L, M, N substituirt, in folgende sich verwandelt:

$$\left.\begin{array}{l} s^3 - s^2(A+A'+A'') - s(B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA') \\ \qquad + (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') \end{array}\right\} = 0, \qquad (18)$$

in welcher das absolute Glied die in §. 288 mit Δ bezeichnete Grösse ist. Diese Gleichung ist nun vom dritten Grade, und liefert daher mindestens einen reellen Werth von s, mit welchem sich aus (15) ein System reeller Werthe von m und n ergibt. Hieraus folgt, dass den Flächen 2ter Ordnung mindestens eine Hauptrichtung und folglich auch eine Hauptebene zukomme.

Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die drei Wurzeln der obigen, in mehrfacher Beziehung merkwürdigen, cubischen Gleichung sämmtlich reell sind. Zu diesem Zwecke ist die Form (17) am geeignetsten. Im Allgemeinen werden die Grössen L, M, N von einander verschieden sein; nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, es sei $L < M < N$, wobei man leicht bemerken wird, dass eine andere Aufeinanderfolge an der folgenden Diskussion nichts ändert. Substituiren wir nun in das Polynom der Gl. (17), welches wir mit P bezeichnen wollen, der Reihe nach $s = -\infty$, L, M, N, $+\infty$, so erhalten wir:

1) wenn $BB'B''$ positiv:		2) wenn $BB'B''$ negativ:	
für $s = -\infty$:	$P = -\infty$	für $s = -\infty$:	$P = +\infty$
„ $s = L$	$P = -\ldots$	„ $s = L$	$P = -\ldots$
„ $s = M$	$P = +\ldots$	„ $s = M$	$P = +\ldots$
„ $s = N$	$P = -\ldots$	„ $s = N$	$P = -\ldots$
„ $s = +\infty$	$P = +\infty$	„ $s = +\infty$	$P = -\infty$

In beiden Fällen wird durch die in den Substitutionsresultaten erscheinenden Zeichenwechsel die Existenz dreier reeller Wurzeln nachgewiesen [§. 116]. Man sieht zugleich, dass diese Wurzeln nothwendig von einander verschieden sein müssen, so lange es die Grössen L, M, N sind.



Hieraus folgt also, dass in jeder Fläche des 2[ten] Grades im Allgemeinen drei Hauptrichtungen und somit auch drei Hauptebenen existiren, welche ihre conjugirten Sehnen normal halbiren.

Mit Hilfe der Glgn. (12) verwandelt sich die Gl. (10) einer Diametral-Ebene in:

$$mX + nY + Z + \frac{Cm + C'n + C''}{s} = 0, \qquad (19)$$

die Gleichung einer Hauptebene, wenn man darin ein System zusammengehöriger Werthe von s, m, n substituirt.

291. Bezeichnen wir mit s_1, s_2, s_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung, mit m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3 die aus (15) folgenden entsprechenden Werthe von m und n, welche die Hauptrichtungen bestimmen; diese Werthe von s, m, n müssen, weil hervorgegangen aus der Auflösung der Gleichungen (12), diesen Gleichungen nothwendig Genüge leisten, und man hat demzufolge identisch:

$$\begin{array}{ll}
Am_1 + B' + B''n_1 = m_1 s_1 \ldots (\alpha_1) & Am_2 + B' + B''n_2 = m_2 s_2 \ldots (\beta_1) \\
A'n_1 + B + B''m_1 = n_1 s_1 \ldots (\alpha_2) & A'n_2 + B + B''m_2 = n_2 s_2 \ldots (\beta_2) \\
A'' + Bn_1 + B'm_1 = s_1 \ldots (\alpha_3) & A'' + Bn_2 + B'm_2 = s_2 \ldots (\beta_3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
Am_3 + B' + B''n_3 = m_3 s_3 \ldots (\gamma_1) \\
A'n_3 + B + B''m_3 = n_3 s_3 \ldots (\gamma_2) \\
A'' + Bn_3 + B'm_3 = s_3 \ldots (\gamma_3)
\end{array}$$

Multiplicirt man (α_1) mit m_2, (β_1) mit m_1 und subtrahirt, wodurch A eliminirt wird, so kommt:

$$B'(m_2 - m_1) + B''(m_2 n_1 - m_1 n_2) = m_1 m_2 (s_1 - s_2).$$

Eben so erhält man durch Elimination von A' aus (α_2) und (β_2):

$$B(n_2 - n_1) + B''(m_1 n_2 - m_2 n_1) = n_1 n_2 (s_1 - s_2),$$

endlich durch Elimination von A'' aus (α_3) und (β_3):

$$B(n_1 - n_2) + B'(m_1 - m_2) = s_1 - s_2;$$

durch Addition dieser drei Gleichungen folgt:

$$(s_1 - s_2)(m_1 m_2 + n_1 n_2 + 1) = 0.$$

Da nun im Allgemeinen s_1 und s_2 von einander verschieden sein werden, so muss in Folge der letzten Gleichung:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + 1 = 0$$

sein, welche Gleichung ausspricht, dass die zwei Hauptrichtungen, welche durch die Grössen m_1, n_1 und m_2, n_2 bestimmt sind, auf einander senkrecht stehen [§. 260, Gl. (6)]. Zu demselben Ergebnisse führt die

Verbindung der Systeme (α) und (γ), (β) und (γ) in Bezug auf die 3te Hauptrichtung, woraus folgt, dass bei den Flächen 2ter Ordnung die drei Hauptrichtungen und folglich auch die drei Hauptebenen auf einander senkrecht stehen.

292. Diese Ergebnisse erleiden einige Modificationen, wenn die Gl. (17) wiederholte Wurzeln besitzt, oder wenn eine oder mehrere ihrer Wurzeln der Nulle gleich sind.

Wiederholte Wurzeln können bekanntlich nur auftreten, wenn die Grössen L, M, N nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Ist nun $L = M$, so geht (17) über in:

$$(s-L)\left[\frac{(s-M)(s-N)}{BB'B''} - \frac{s-N}{B^2} - \frac{s-N}{B'^2} - \frac{s-M}{B''^2}\right] = 0;$$

eine ihrer Wurzeln ist also dann $s = L$; die beiden anderen ergeben sich, wenn man den Faktor in den eckigen Klammern $= 0$ setzt, und werden im Allgemeinen sowohl von L als unter sich verschieden sein. Ist aber $L = M = N$, so lässt sich aus obiger Gleichung ein Faktor $s - M = s - N = s - L$ nochmals sondern, welcher eine 2te Wurzel $s = L$ liefert, während sich die 3te aus der Gleichung

$$\frac{s-L}{BB'B''} - \frac{1}{B^2} - \frac{1}{B'^2} - \frac{1}{B''^2} = 0$$

d. i.

$$s = L + BB'B''\left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B''^2}\right) \ldots . (\alpha)$$

ergibt. Unsere cubische Gleichung hat somit zwei gleiche Wurzeln, jede $= L$, wenn $L = M = N$ ist.

Alle drei Wurzeln können nun offenbar nur dann einander gleich werden, wenn auch die 3te Wurzel $= L$ ist, wozu nach (α) erfordert wird, dass

$$BB'B''\left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B''^2}\right) = 0$$

werde, was nur für $B = B' = B'' = 0$ möglich ist. Die cubische Gleichung hat somit drei gleiche Wurzeln, wenn $L=M=N$, und $B = B' = B'' = 0$ ist.

293. Untersuchen wir nun den Einfluss, welchen diese besondere Umstände auf die Lage der Hauptebenen nehmen, wobei wir zuerst voraussetzen wollen, dass keine der drei Wurzeln der Gl. (18) der Nulle gleich sei. Bei dieser Voraussetzung muss das absolute Glied $= \Delta$ dieser Gleichung von 0 verschieden sein und somit der Fläche ein bestimmter Mittelpunkt zukommen.

1) Die drei Wurzeln sind von einander verschieden. In diesem Falle existiren drei Hauptebenen, welche auf einander senkrecht stehen und sich im Mittelpunkte der Fläche schneiden. Jede theilt die Fläche in zwei symmetrische Hälften; ihre auf einander senkrechten Durchschnittslinien heissen Hauptdurchmesser oder Axen der Fläche.

2) Hat die Gl. (18) zwei gleiche Wurzeln, so muss $L = M = N$ sein, und die beiden gleichen Wurzeln sind $s_1 = s_2 = L$. Zunächst bestimmt sich nun mit Hilfe der 3ten Wurzel s_3 aus (15) eine Hauptrichtung

$$m_3 = \frac{B''}{B}, \quad n_3 = \frac{B''}{B'}; \ldots \quad (\alpha)$$

dieselben Ausdrücke (15) bieten aber die Werthe von m_1, n_1 und m_2, n_2 unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar, sobald man in ihnen eine der gleichen Wurzeln $s_1 = s_2 = L$ substituirt; woraus folgt, dass nebst der obigen bestimmten Hauptrichtung (m_3, n_3) noch unendlich viele andere existiren. In der That, kehren wir zu den Glgn. (12) zurück, welche die Hauptrichtungen bestimmen; substituiren wir darin $s = L$ und beachten, dass aus (14):

$$A - L = \frac{B'B''}{B}, \quad A' - M = \frac{BB''}{B'}, \quad A'' - N = \frac{BB'}{B''}$$

folgt und jetzt $L = M = N$ ist, so geht aus jeder der Gleichungen (12) die folgende hervor:

$$\frac{B''}{B} m + \frac{B''}{B'} n + 1 = 0; \ldots . (\beta)$$

wir erhalten daher zur Bestimmung von m und n nur diese eine Gleichung, welche zu jedem beliebig gewählten Werth von n einen entsprechenden Werth von m liefert, wodurch man offenbar unendlich viele Hauptrichtungen erhält. Aus der Verbindung der Gleichungen (α) und (β) folgt nun weiter:

$$mm_3 + nn_3 + 1 = 0,$$

woraus erhellt, dass jede der Hauptrichtungen (β) auf der einen bestimmten Hauptrichtung (α) senkrecht steht.

Dieser Fall tritt ein, wenn die der Gl. (1) entsprechende Fläche durch Umdrehung entstanden ist. Man sieht leicht ein, dass jede durch die Rotationsaxe gelegte Ebene eine Hauptebene sein muss.

3) Hat die Gl. (18) drei gleiche Wurzeln, so muss nebst $L = M = N$, auch noch $B = B' = B'' = 0$ sein; jede der Wurzeln

ist $= L$ und aus (14) folgt noch überdies $L = A = A' = A''$. Unter diesen Umständen sind nun die Glgn. (12), wenn man darin $s = L$ substituirt, für jeden Werth von m und n identisch erfüllt; jede beliebige Richtung ist eine Hauptrichtung, und die Fläche lässt folglich unendlich viele Hauptebenen zu. Dieser Fall tritt bei der Kugelfläche ein, für welche offenbar jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene eine Hauptebene ist. In der That verwandelt sich (1) in die Gleichung einer Kugel [§. 275, Gl. (4)], wenn man $A = A' = A''$ und $B = B' = B'' = 0$ setzt.

In allen diesen 3 Fällen, welche durch die gemeinschaftliche Bedingung, dass Δ von 0 verschieden sei, charakterisirt sind, können daher in der Fläche drei auf einander senkrechte Hauptebenen angegeben werden. Sie haben gegen die Fläche eine vollkommen bestimmte Lage im 1ten Falle; im 2ten Falle hat nur eine Hauptebene gegen die Fläche eine bestimmte Lage, die beiden anderen können unter einander und auf die erste senkrecht beliebig durch den Mittelpunkt gelegt werden; im 3ten Falle kann man jedes System dreier im Mittelpunkte sich senkrecht schneidender Ebenen wählen.

294. Sind eine oder mehrere Wurzeln der Gl. (18) der Nulle gleich, so muss zunächst das absolute Glied Δ dieser Gleichung verschwinden; dieser Fall kann also nur bei solchen Flächen eintreten, welche keinen Mittelpunkt, oder deren unendlich viele besitzen [§. 288 2) nnd 3)].

1) Ist eine Wurzel, z. B. $s_1 = 0$, und sind die zwei anderen s_2, s_3 von einander verschieden, so bestimmen wieder die Glgn. (12) drei aufeinander senkrechte Hauptrichtungen; zweien von diesen entsprechen bestimmte Hauptebenen, deren Gleichungen sich aus (19) ergeben, wenn man m_2, n_2, s_2 und m_3, n_3, s_3 an die Stelle von m, n s setzt; für die 3te Hauptebene nimmt das absolute Glied der Gl. (19) der Hauptebene die Form an:

$$\frac{Cm_1 + C'n_1 + C''}{0} = h,$$

wo m_1 und n_1 die für $s = s_1 = 0$ folgenden bestimmten Werthe si Bezeichnet man den Abstand dieser Hauptebene vom Ursprunge mit so ist [§. 254, Gl. (6)] $p = \pm h : \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + 1}$; ist nun:

α) die Grösse $Cm_1 + C'n_1 + C''$ von der Nulle verschieden, so ist h und somit auch p unendlich gross; d. h. die 3te Hauptebene existirt in diesem Falle nicht, oder sie rückt in unendliche Entfernung

hinaus. Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn das durch die Richtung m_1, n_1 bestimmte Sehnensystem die Fläche nur einmal schneidet. Ist aber

β) die Grösse $Cm_1 + C'n_1 + C''$ identisch $= 0$, so wird h und somit auch p unbestimmt; d. h. jede auf die Richtung m_1, n_1 senkrechte Ebene ist eine Hauptebene. Dies findet offenbar dann statt, wenn die Gl. (1) einen Cylinder darstellt; die Richtung m_1, n_1 ist jene der erzeugenden Geraden des Cylinders. Die zu dieser Richtung parallelen Sehnen schneiden die Fläche gar nicht und jeder Punkt derselben ist dann ein Halbirungspunkt, durch welchen eine Hauptebene gelegt werden kann.

Da der Durchschnittspunkt der drei Hauptebenen der Mittelpunkt der Fläche ist, so hat diese im Falle (α) keinen Mittelpunkt, im Falle (β) deren unendlich viele, und der oben erwähnte Cylinder ist daher ein elliptischer oder hyperbolischer.

In dem Falle, dass eine Wurzel $= 0$ ist, hat die Fläche somit nur zwei bestimmte Hauptebenen, die 3[te] liegt in unendlicher Entfernung, oder ist willkürlich.

2) Sind zwei Wurzeln $s_1 = s_2 = 0$, so muss in Folge dieser zwei gleichen Wurzeln auch $L = M = N = s_1 = s_2 = 0$ sein; die Glgn. (12) reduciren sich wieder auf die eine:

$$\frac{B''}{B}\,m + \frac{B''}{B'}\,n + 1 = 0, \quad \ldots \quad (\alpha)$$

welche unendlich viele Hauptrichtungen angibt, die sämmtlich auf der 3[ten], durch die Gl. (15) bestimmten:

$$m_3 = \frac{B''}{B}, \quad n_3 = \frac{B''}{B'}$$

senkrecht stehen. Dieser letzteren entspricht eine bestimmte durch (19) dargestellte Hauptebene, wenn man darin m_3, n_3, s_3 substituirt. Was die zu den Hauptrichtungen (α) gehörigen Hauptebenen betrifft, so nimmt für diese das absolute Glied der Gl. (19) die Form an:

$$\frac{Cm + C'n + C''}{0}$$

und wird für alle Werthe von m und n unendlich, für welche die Gleichung

$$Cm + C'n + C'' = 0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

nicht erfüllt ist; die zugehörigen Hauptebenen liegen daher in unendlicher Entfernung oder existiren nicht; jene Werthe von m und n jedoch, welche den Glgn. (α) und (β) gleichzeitig Genüge leisten, bestim-

men eine Hauptrichtung, auf welche senkrecht in jedem ihrer Punkte eine Hauptebene gelegt werden kann, da für diese Richtung das absolute Glied in (19) die Form $\frac{0}{0}$ erhält. Auch dieser Fall, (welcher dem parabolischen Cylinder entspricht), lässt also zwei aufeinander senkrechte Hauptebenen zu.

Sind aber die zwei Glgn. (α) und (β) identisch (wenn nämlich $\frac{C}{C''}=\frac{B''}{B}$, $\frac{C'}{C''}=\frac{B''}{B'}$), dann erhält das absolute Glied in (19) für alle aus (α) folgenden Werthe von m und n die Form $\frac{0}{0}$; d. h. jede Ebene ist eine Hauptebene, welche durch einen beliebigen Punkt irgend einer der durch (α) dargestellten Hauptrichtungen senkrecht gelegt wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gl. (1) ein System zweier paralleler Ebenen bedeutet.

3) Sämmtliche drei Wurzeln der Gl. (17) können nicht gleichzeitig 0 werden; denn zu diesem Ende müsste $s = L = M = N$, ferner $B = B' = B'' = 0$ werden [§. 292], womit aus (14) $A = A' = A'' = 0$ folgt, wodurch aber die Gl. (1) auf den 1ten Grad herabsinkt.

295. Aus den Erörterungen der beiden vorhergehenden §§. geht hervor, dass den durch die Gl. (1) dargestellten geometrischen Gebilden unter allen Umständen mindestens zwei auf einander senkrechte Hauptebenen zukommen, deren Lage durch die Gleichungen (15), (18) und (19) gegeben ist. Diese beiden Hauptebenen nehmen wir sofort als neue Coordinaten-Ebenen der $x'y'$ und $x'z'$, wobei die Ebene der $y'z'$ zwar parallel zur 3ten (in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden) Hauptebene wird, ihr Durchschnittspunkt mit der Durchschnittslinie der beiden ersteren Hauptebenen, d. h. der neue Ursprung jedoch vorläufig willkürlich bleibt. Transformirt man nun die Gl. (1) auf dieses neue Coordinatensystem, so kann die transformirte Gleichung, nach dem im Anfange des §. 289 Gesagten, die Coordinaten z' und y' in der 1ten Potenz nicht enthalten, und wird daher die einfachere Form:

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 + 2C_1x' + F_1 = 0 \qquad (20)$$

annehmen, in welcher somit noch sämmtliche Flächen der 2ten Ordnung enthalten sind.

Die weitere Vereinfachung dieser Gleichung erfordert nun die Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem P von der Nulle verschieden oder $= 0$ ist.

Im ersteren Falle können wir das Glied mit x' verschwinden machen, indem wir den Ursprung um das Stück $a = \frac{C_1}{P}$ auf der Axe der x' zurückschieben, somit in (20) $x' - \frac{C_1}{P}$ an die Stelle von x setzen. Hiedurch verwandelt sich (20) in:

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = K. \qquad \text{(I)}$$

Ist aber $P = 0$, so wird diese letzte Transformation unmöglich, weil $a = \infty$ würde; in diesem Falle hat aber (20) die Form:

$$P'y'^2 + P''z'^2 + 2C_1x' + F_1 = 0,$$

und wir können nun aus dieser Gleichung das constante Glied wegschaffen, indem wir den Ursprung um das Stück $b = \frac{F_1}{2C_1}$ auf der Axe der x' zurückschieben, d. i. $x' - \frac{F_1}{2C_1}$ an die Stelle von x' setzen; die letzte Gleichung verwandelt sich dadurch in folgende:

$$P'y'^2 + P''z'^2 = Qx'. \qquad \text{(II)}$$

Hieraus erhellt, dass die allgemeine Gleichung (1) des 2ten Grades durch geeignete Transformation immer auf eine der beiden Formen (I) oder (II) gebracht werden kann, aus deren Diskussion folglich alle Flächen 2ter Ordnung hervorgehen werden.

Die in der Gl. (I) begriffenen Flächen sind mit einem Mittelpunkte versehen (oder auch mit unendlich vielen in besonderen Fällen), welcher zugleich Ursprung der jetzigen Coordinaten ist, weil die Gleichung nur Glieder der 2ten Dimension enthält [§. 287]; auch ist jede der coordinirten Ebenen eine Hauptebene, weil die Gleichung in Bezug auf alle drei Coordinaten rein quadratisch ist [§. 289].

Jene Flächen hingegen, welche aus der Gl. (II) hervorgehen, ermangeln eines Mittelpunktes in Folge der Anwesenheit des linearen Gliedes Qx, welches durch Veränderung des Ursprunges nicht weggeschafft werden kann; von den coordinirten Ebenen sind nur jene der xy und xz Hauptebenen.

Diskussion der Gleichung:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K. \qquad \text{(I)}$$

(Flächen mit Mittelpunkt.)

296. Wir wollen, was offenbar gestattet ist, voraussetzen, dass man den zweiten Theil K dieser Gleichung positiv gemacht habe; die

drei Coefficienten P, P', P'' können dann, ohne dass die Gl. aufhört eine reelle Bedeutung zu haben, nicht gleichzeitig negativ sein, und wenn wir im folgenden mit P, P', P'', K die numerischen Werthe der bisher mit diesen Buchstaben bezeichneten Grössen vorstellen, so haben wir nur folgende Fälle zu betrachten:

$$\left.\begin{array}{l} Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K, \\ Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = K, \\ Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = K, \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

indem jede andere Combination von Zeichen durch geeignete Vertauschung der Coordinatenaxen auf eine der obigen zurückgeführt werden kann.

I. Das Ellipsoid. Betrachten wir zuerst die Gleichung:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K, \tag{21}$$

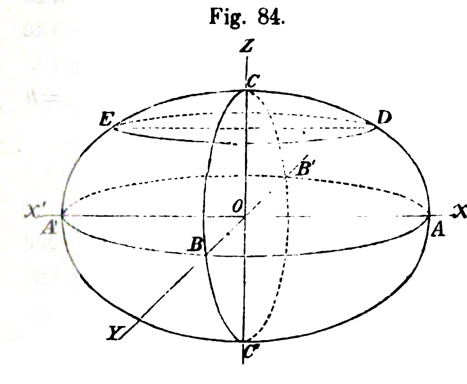
in welcher sämmtliche Coefficienten positiv sind. Setzen wir der Reihe nach y und z; dann x und z; endlich x und y der Nulle gleich, so erhalten wir:

$$x = \pm\sqrt{\frac{K}{P}} = \pm a, \quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{P'}} = \pm b,$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{K}{P''}} = \pm c \tag{22}$$

als Coordinaten der Durchschnittspunkte A, A'; B, B'; C, C' (Fig. 84) der Fläche mit den Coordinatenaxen, welche somit, 6 an der Zahl, sämmtlich reell sind, und die Scheitel der Fläche genannt werden. Die Coordinatenaxen sind Hauptdurchmesser der Fläche, und die von je zwei Scheiteln begrenzten Stücke derselben, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$, heissen die Axen der Fläche; diese besitzt demnach drei reelle Axen. Durch Einführung der Werthe (22) derselben in die Gl. (21) unserer Fläche erhält diese die symmetrische Form:

Fig. 84.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{23}$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach z, y, x der Nulle gleich, so erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

als Gleichungen der Hauptschnitte, d. i. der Durchschnittslinien der Fläche mit den coordinirten Ebenen, welche demnach Ellipsen sind. Schneidet man ferner die Fläche durch eine im Abstande $z = \pm h$ zur xy-Ebene parallele Ebene, so ergibt sich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2}$$

als Gleichung des Schnittes, wie man sieht, eine Ellipse, deren Halbaxen

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}, \text{ und } b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$$

sind. Alle zur Ebene der xy parallelen Schnitte sind somit Ellipsen, und zwar ähnliche Ellipsen, da das Verhältniss ihrer Halbaxen $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ein constantes, von h unabhängiges ist. Der Schnitt wird unmöglich, wenn $h > c$, woraus folgt, dass die Fläche sich über die Scheitel C und C' hinaus nicht erstreckt. Zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt die Betrachtung von Schnitten, welche zu den beiden anderen Coordinaten-Ebenen parallel gemacht werden. Hieraus folgt zugleich, dass unsere Fläche nach allen Richtungen begrenzt, also eine geschlossene Fläche ist. Sie führt den Namen Ellipsoid.

Sind zwei der Coefficienten P, P', P'' gleich, z. B. $P = P'$ also auch $a = b$, so kann das Ellipsoid durch Umdrehung um die Axe der z entstanden gedacht werden (Rotations-Ellipsoid, Sphäroid) [§. 283]; denn jede auf die Axe der z senkrechte Ebene $z = h$ schneidet die Fläche in einer Curve, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad \text{d. i.} \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2(c^2 - h^2)}{c^2}$$

ist, und offenbar einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt auf der Axe der z liegt. — Für $P = P' = P''$ oder $a = b = c$ verwandelt sich (23) in: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, und das Ellipsoid geht somit in eine Kugel über.

297. Als besondere Fälle der Gl. (21) oder (23) sind folgende zu bemerken:

1) $K = 0$; die Gleichung wird dann nur durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erfüllt; sie bedeutet also einen Punkt, und zwar den gegenwärtigen Coordinatenanfang.

2) Ist einer der Coefficienten P, P', P'' der Nulle gleich, oder was auf dasselbe hinauskommt, wird eine der Halbaxen a, b, c unendlich, so geht die Gl. (23) des Ellipsoids in eine der Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

über, welche elliptischen Cylindern angehören, deren Axen beziehungsweise mit den Axen der z, y, x zusammenfallen.

3) Sind zwei der Coefficienten P, P', P'' der Nulle gleich, z. B. P', P'', so geht (21) über in $x=+\sqrt{\frac{K}{P}}$, und bedeutet somit ein System zweier Ebenen, welche zur Ebene der yz parallel laufen.

4) Verschwindet nebst K einer der Coefficienten P, P', P'', z. B. P'', so reducirt sich Gl. (21) auf $Px^2+P'y^2=0$, welche Gleichung in folgende zwei zerfällt: $x=0$, $y=0$ und somit der Axe der z angehört. Unsere Gleichung hat also in diesem Falle eine gerade Linie zum geometrischen Orte.

5) Verschwinden endlich nebst K noch zwei der Coefficienten P, P', P'', z. B. P', P'', so geht (21) über in $Px^2=0$, oder $x=0$, welche Gl. der Ebene der yz angehört. Unsere Gleichung bedeutet demnach in diesem Falle eine einzige Ebene.

298. II. Das Hyperboloid mit einer Hölung. Die 2te der Glgn. (α), mit einem negativen Quadrate hat die Form:

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=K. \tag{24}$$

Als Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Fläche mit den Coordinatenaxen finden wir:

$$x=\pm\sqrt{\frac{K}{P}}=\pm a; \quad y=\pm\sqrt{\frac{K}{P'}}=\pm b,$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{K}{-P''}}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{K}{P''}}=\pm c\sqrt{-1};$$

und schliessen hieraus, dass nur die Axen der x und y, nicht aber jene der z von der Fläche geschnitten werden. Diese Fläche hat daher nur zwei reelle Axen: $AA'=2a$, $BB'=2b$, (Fig. 85) mit den vier reellen Scheiteln: A, A', B, B'. Der Analogie nach pflegt man die Strecke $OC=OC'=c$ auf der Axe der z aufzutragen, wo nun $CC'=2c$ die 3te imaginäre Axe vorstellt. Durch Einführung der Halbaxen a, b, c in die Gl. (24) erhält diese die Form:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{26}$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen der coordinirten Ebenen, so erhält man als Gleichungen der Hauptschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

von welchen die erste einer Ellipse, die beiden anderen jedoch Hyperbeln angehören.

Jeder zur Ebene der xy im Abstande $z = h$ parallele Schnitt erzeugt eine Ellipse:

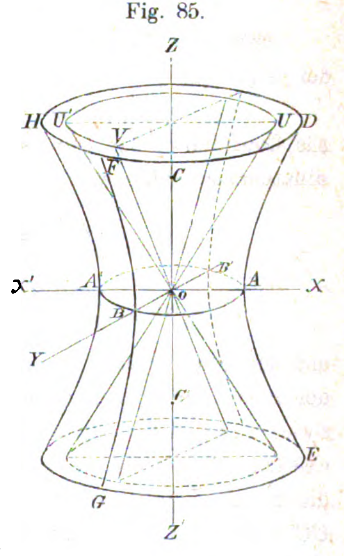
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2 + c^2}{c^2},$$

deren Halbaxen

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{h^2 + c^2}, \quad b' = \frac{b}{c}\sqrt{h^2 + c^2} \tag{27}$$

mit zunehmendem h immer grösser werden; den kleinsten dieser Querschnitte erhält man offenbar für $h = 0$ und dieser ist somit der elliptische Hauptschnitt $ABA'B_1'$, welcher die Kehlellipse genannt wird. Da ferner das Verhältniss $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ von h unabhängig ist, so sind diese Ellipsen sämmtlich unter sich ähnlich. — Zu analogen Resultaten führt die Betrachtung von Schnitten, welche parallel zu den Ebenen der xy und yz geführt werden, nur dass statt der Ellipsen Hyperbeln als Durchschnittslinien erscheinen, unter welchen als Uebergangsglieder auch zwei Systeme sich schneidender Geraden sich befinden, wenn die Entfernung der schneidenden Ebene von den oben genannten coordinirten Ebenen beziehungsweise $= b$ oder $= a$ ist.

Fig. 85.



Von der Gestalt dieser Fläche wird man sich nun eine deutliche Vorstellung machen können; sie erstreckt sich nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen ins unendliche und ist nicht unterbrochen, so dass man von einem beliebigen Punkte der Fläche zu irgend einem anderen gelangen kann, ohne die Fläche zu verlassen. Sie führt den Namen Hyperboloid mit einer Hölung.

Ist $P = P'$, folglich auch $a = b$, d. i. sind beide reelle Axen einander gleich, so werden alle auf die Axe der z senkrechten Schnitte

zu Kreisen, deren Mittelpunkte in der Axe der z liegen; die Fläche wird daher durch Umdrehung der Hyperbel DAE um ihre imaginäre Axe CC' erzeugt werden können und ist das Rotationshyperboid mit einer Hölung. [§. 283.]

299. Als besondere Fälle der Gl. (24) ergeben sich folgende: 1) $K = 0$; die Gleichung hat die Form:

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0,$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{28}$$

und gehört, wie man durch ebene Schnitte leicht erkennt, einem elliptischen Kegel an, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprunge und dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt. Er steht in naher Beziehung mit dem durch die Gl. (24) oder (26) dargestellten Hyperboloide.

Die Hauptschnitte des Kegels mit den Ebenen der xz und yz sind durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ oder } x = \pm \frac{a}{c} z, \text{ und } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ oder } y = \pm \frac{b}{c}$$

gegeben, und sind somit je zwei sich im Ursprunge schneidende Gerade, in welchen man aus den Coefficienten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ die Asymptoten UO und VO der beiden hyperbolischen Hauptschnitte DAE und FBG erkennt. Ein in der Entfernung $= h$ vom Ursprunge parallel zur xy-Ebene geführter Schnitt UVU' ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

als Ellipse charakterisirt, deren Halbaxen $a_1 = \frac{ah}{c}$, $b_1 = \frac{bh}{c}$ sind.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit jenen (27) der Halbaxen des durch dieselbe Ebene erzeugten elliptischen Schnittes DFH des Hyperboloides, so findet man

$$a' - a_1 = \frac{a}{c}\left(\sqrt{h^2 + c^2} - h\right) = \frac{ac}{\sqrt{h^2 + c^2} + h};$$

$$b' - b_1 = \frac{b}{c}\left(\sqrt{h^2 + c^2} - h\right) = \frac{bc}{\sqrt{h^2 + c^2} + h},$$

diese Differenzen bleiben immer positiv, d. h. der Kegel liegt innerhalb des Hyperboloides, und sie werden unendlich klein, wenn h unendlich wächst, woraus folgt, dass das Hyperboloid sich der Kegelfläche unendlich nähert, ohne dass beide Flächen sich jemals treffen. Aus diesem

Grunde wird dieser Kegel der Asymptoten-Kegel des Hyperboloides genannt.

Ein Hyperboloid, dessen Axen zu jenen des Hyperboloides (26) i dem Verhältnisse $\alpha : 1$ stehen, wird durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 b^2} - \frac{z^2}{\alpha^2 c^2} = 1, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \alpha^2$$

dargestellt; lässt man nun α gegen 0 convergiren, so geht dieses Hyperboloid in den Asymptotenkegel (28) über. Letzterer ist daher die Grenze, welcher sich das Hyperboloid unendlich nähert, wenn die Axen, während sie ihr Verhältniss unverändert beibehalten, unendlich klein werden.

Die folgenden Fälle sind jenen beim Ellipsoide vorgetragenen so ähnlich, dass eine kurze Anzeige genügen wird:

2) Wenn einer der Coefficienten P, P', P'' verschwindet: elliptischer oder hyperbolischer Cylinder.

3) Wenn zwei dieser Coefficienten verschwinden: zwei reelle oder imaginäre parallele Ebenen.

4) Wenn K und einer der Coefficienten P, P', P'' verschwinden: Eine Gerade oder zwei sich schneidende Ebenen.

5) Wenn nebst K noch zwei dieser Coefficienten verschwinden: eine einzige Ebene.

800. III. Das Hyperboloid mit zwei Hölungen. Die letzte Form der Gl. (I), welche wir zu untersuchen haben, ist:

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = K, \tag{29}$$

mit zwei negativen Quadraten. Die Fläche trifft die Coordinatenaxen in den Punkten:

$$x = \pm\sqrt{\frac{K}{P}} = \pm a; \quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{-P'}} = \pm b\sqrt{-1};$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{K}{-P''}} = \pm c\sqrt{-1},$$

und hat somit nur zwei reelle Scheitel A, A' (Fig. 86, siehe Seite 498) und eine reelle Axe $AA' = 2a$; die anderen zwei Axen $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ sind imaginär. Durch Einführung der Axen nimmt (29) die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{30}$$

Die Hauptschnitte der Fläche mit den coordinirten Ebenen sind durch die Gleichungen:

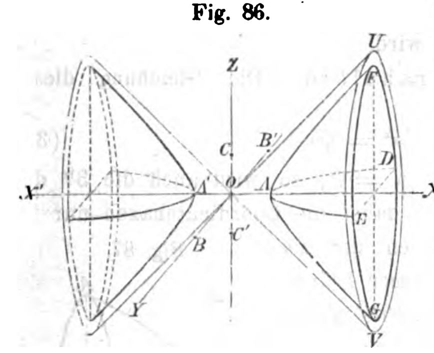
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gegeben, von welchen die beiden ersteren Hyperbeln (DAE und FAG) angehören; die letztere hat keine reelle Bedeutung und die Ebene der yz wird daher von unserer Fläche nicht geschnitten. Für alle parallel zu dieser Ebene in der Entfernung $x = \pm h$ vom Ursprunge geführten Schnitte erhält man:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2 - a^2}{a^2},$$

d. h. so lange $h > a$, Ellipsen, welche, unter sich ähnlich bleibend, mit zunehmendem h immer grösser und grösser werden; für $h < a$ sind sie jedoch imaginär, woraus folgt, dass kein Punkt der Fläche zwischen den beiden Ebenen liegt, welche durch die beiden Endpunkte A, A' der reellen Axe senkrecht auf diese gelegt werden. Die Fläche besteht daher aus zwei getrennten Theilen und wird **Hyperboloid mit zwei Hölungen** genannt.

Fig. 86.



Alle Schnitte, parallel zu den Ebenen der xy und xz geführt, sind Hyperbeln, welche den respektiven Hauptschnitten ähnlich sind.

Ist $P' = P''$ oder $b = c$, d. i. sind die beiden imaginären Axen gleich, so werden alle auf die reelle Axe senkrechten Schnitte zu Kreisen und die Fläche kann durch Umdrehung um diese Axe erzeugt werden. (**Rotationshyperboloid mit zwei Hölungen.**)

301. Die Voraussetzung, dass einer oder mehrere der Coefficienten der Gl. (29) verschwinden, führt mit Ausschluss des elliptischen Cylinders auf dieselben Gebilde wie in §. 299. Ist insbesondere $K = 0$, so gehört die Gleichung

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (31)$$

wieder einem Kegel UOV (Fig. 86) an, welcher, wie man sich auf ähnliche Weise wie §. 299 überzeugt, **Asymptotenkegel** des Hyperboloids mit 2 Hölungen ist, die Fläche jedoch von Aussen umschliesst.

Diskussion der Gleichung:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx. \qquad \text{(II)}$$

(Flächen ohne Mittelpunkt.)

302. Berücksichtiget man, dass das 1te Glied im 1ten Theile dieser Gleichung immer positiv gemacht werden kann, und in dem Falle, wenn das Glied Qx negativ wäre, nur x mit $-x$, d. i. die positive Halbaxe der x mit der negativen zu vertauschen wäre, um dieses Glied ebenfalls positiv zu erhalten, so ist klar, dass obige Gleichung nur zwei wesentlich verschiedene Formen darbieten kann, nämlich:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx \quad \text{und} \quad P'y^2 - P''z^2 = Qx,$$

welche, so lange keiner der Coefficienten verschwindet, zwei krumme Flächen charakterisiren, von welchen die eine elliptisches, die andere hyperbolisches Paraboloid genannt wird.

I. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx. \qquad (32)$$

Setzt man zwei der Coordinaten $= 0$, so wird auch die 3te der Nulle gleich; die Fläche schneidet daher die Coordinatenaxen nur im Ursprunge O (Fig. 87); die Ebenen der xy und xz sind allein Hauptebenen dieser Fläche und die Axe der x, als ihre Durchschnittslinie, die einzige Axe derselben, welche sie im Punkte O, dem Scheitel der Fläche, trifft, und nach der Seite der positiven x ins Unendliche sich erstreckt.

Fig. 87.

Die Hauptschnitte der Fläche mit den Ebenen der xy und xz sind durch die Gleichungen:

$$P'y^2 = Qx \quad \text{und} \quad P''z^2 = Qx$$

bestimmt, folglich Parabeln (COD und AOB), deren Parameter beziehungsweise $p = \frac{Q}{P'}$ und $p' = \frac{Q}{P''}$ sind, welche den Ursprung zum Scheitel und die Axe der x zur gemeinschaftlichen Axe haben. Irgend ein zur xy-Ebene paralleler ebener Schnitt der Fläche ist: $z = h$, $P'y^2 = Qx - P''h^2$, somit wieder eine Parabel vom Parameter $\frac{Q}{P'} = p$, woraus folgt, dass alle zur xy-Ebene parallelen Schnitte dieselbe Parabel erzeugen. Eben so sind alle zur xz-Ebene parallelen Schnitte unter sich

gleiche Parabeln. Man kann daher diese Fläche durch eine stetige Bewegung dadurch erzeugen, dass man den Scheitel einer beweglichen Parabel an einer festen Parabel als Leitlinie fortrücken lässt, so dass die Ebenen beider Curven beständig auf einander senkrecht, und die Axen, nach derselben Seite gerichtet, einander parallel bleiben.

Für die senkrecht auf die Axe der x in der Entfernung $x = h$ geführten Schnitte erhält man endlich:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qh,$$

d. h. unter sich ähnliche Ellipsen, deren Halbaxen

$$a' = \sqrt{\frac{Qh}{P'}}, \quad b' = \sqrt{\frac{Qh}{P''}}$$

sind, und mit unendlich zunehmendem h unendlich gross werden. Für $h = 0$ reducirt sich die Ellipse auf einen Punkt, den Scheitel O, und wird imaginär, wenn h negativ. Die Fläche liegt daher nur auf der Seite der positiven x, und erstreckt sich hier ins Unendliche. Durch Einführung der Parameter p, p' der beiden parabolischen Hauptschnitte erhält die Gl. des elliptischen Paraboloides die Form:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = x \quad \text{oder} \quad p'y^2 + pz^2 = pp'x. \qquad (33)$$

Die zur Axe der Fläche senkrechten Schnitte werden Kreise, wenn $p = p'$ ist; die Fläche kann dann durch Umdrehung einer Parabel um ihre eigene Axe erzeugt werden (Rotationsparaboloid).

Das elliptische Paraboloid degenerirt in einen parabolischen Cylinder, wenn einer der Coefficienten P' oder P'' verschwindet. Für $Q = 0$ bedeutet die Gl. (32) eine Gerade (die Axe der x); ihr Ort wird eine Ebene, wenn zwei der drei Coefficienten verschwinden.

808. II. Das hyperbolische Paraboloid:

$$P'y^2 - P''z^2 = Qx. \qquad (34)$$

Auch diese Fläche schneidet die Coordinatenaxen nur im Ursprunge O (Fig. 88, S. 501) und hat die Ebene der xy und xz zu Hauptebenen, deren Durchschnittslinie, die Axe der x, die einzige Axe der Fläche ist. Als Hauptschnitte der Fläche in den Ebenen der xy und xz erhalten wir:

$$P'y^2 = Qx \quad \text{und} \quad P''z^2 = -Qx,$$

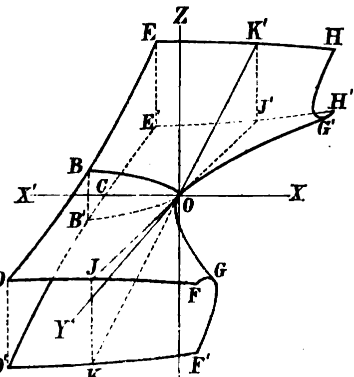
d. i. Parabeln GOG' und BOB', deren Parameter beziehungsweise $p = \frac{Q}{P'}$, $p' = \frac{Q}{P''}$ sind, deren Scheitel im Ursprunge, deren Axen in

der Axe der x aber vom Ursprunge aus nach entgegengesetzten Richtungen liegen. Irgend ein zur Ebene der xz in der Entfernung $y = \pm h$ parallel geführter Schnitt ist:

$$y = \pm h, \quad P''z^2 = -Qx + P'h^2,$$

also ebenfalls eine dem Hauptschnitte BOB' gleiche Parabel, wie $DFF'D'$, $EHH'E'$. In gleicher Weise erzeugt jeder zur Ebene der xy parallele Schnitt eine dem Hauptschnitte GOG' gleiche Parabel. Hieraus folgt, dass das hyperbolische Paraboloid durch die stetige Bewegung einer Parabel entsteht, deren Scheitel an einer zweiten Parabel so fortgleitet, dass die Ebenen beider Parabeln beständig auf einander senkrecht und die Axen derselben, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, einander parallel bleiben.

Fig. 88.



Die Gleichungen eines in der Entfernung $x = h$, parallel zur Ebene der yz geführten Schnittes sind:

$$x = h, \quad P'y^2 - P''z^2 = Qh,$$

welche Hyperbeln angehören, deren Mittelpunkte auf der Axe der x liegen; die Halbaxen sind: $a = \sqrt{\frac{Qh}{P'}}$, $b = \sqrt{\frac{Qh}{P''}}$, und werden mit zunehmendem h unendlich gross; die erste Axe dieser Hyperbeln liegt parallel zur Axe der y oder der z, je nachdem h positiv oder negativ ist. Ein Schnitt der ersteren Art ist in der Figur durch FGF', $HG'H'$, ein Schnitt der zweiten Art durch DBE, $D'B'E'$ dargestellt. Da, wie man sieht, das Verhältniss $a : b$ von h unabhängig, also constant ist, so sind die Asymptoten aller hyperbolischen Schnitte unter sich parallel, und die Hyperbeln eines jeden der beiden Systeme unter sich ähnlich.

Für $h = 0$ erhält man als Hauptschnitt der Fläche in der Ebene der yz:

$$P'y^2 - P''z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z = \pm \sqrt{\frac{P'}{P''}} \cdot y.$$

d. i. zwei im Ursprunge sich schneidende gegen die Axe der y gleich geneigte Gerade (JJ', KK'), welche zugleich die gemeinschaftlichen Projectionen der Asymptoten sämmtlicher Hyperbelschnitte auf die Ebene yz sind.

Durch Einführung der Parameter p, p' der beiden parabolischen

Hauptschnitte in die Gl. (34) erhält die Gl. des hyperbolischen Paraboloides die Form:

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x \quad \text{oder} \quad p'y^2 - pz^2 = pp'x. \tag{35}$$

Die Fläche degenerirt in einen parabolischen Cylinder, wenn einer der Coefficienten P', P'' verschwindet; in ein System zweier in der Axe der x sich schneidenden Ebenen, wenn $Q = 0$ wird; in eine Ebene endlich, wenn zwei der Coefficienten der Gl. (34) verschwinden.

Die geometrischen Gebilde, welche einer Gleichung des 2ten Grades zwischen drei veränderlichen Grössen entsprechen, sind demnach folgende:

1) Das Ellipsoid; 2) das Hyperboloid mit einer Hölung; 3) das Hyperboloid mit zwei Hölungen; 4) das elliptische Paraboloid; 5) das hyperbolische Paraboloid.

6) Der elliptische Kegel; 7) der elliptische Cylinder; 8) der hyperbolische Cylinder; 9) der parabolische Cylinder.

10) Zwei sich schneidende Ebenen; 11) zwei parallele Ebenen; 12) eine Ebene.

13) Eine gerade Linie.

14) Ein Punkt.

Endlich kann die Gleichung auch jeder geometrischen Bedeutung ermangeln.

VON DEN EBENEN SCHNITTEN DER FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

304. Eine Fläche der 2ten Ordnung werde von irgend einer Ebene geschnitten, deren Abstand vom Ursprunge $= h$ ist. Um die Gleichung des Schnittes, welcher eine Linie der 2ten Ordnung sein wird, zu erhalten, transformiren wir, ohne Veränderung des Ursprunges, die Gleichung der gegebenen Fläche auf ein neues Coordinatensystem, dessen xy-Ebene der schneidenden Ebene parallel liegt. Die transformirte Gleichung wird im Allgemeinen die Form haben:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{array}\right\} = 0.$$

In Bezug auf dieses neue Coordinatensystem ist nun $z = h$ die Gleichung der schneidenden Ebene, durch deren Verbindung mit obiger Gleichung sich:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2(C + B'h)x + 2(C' + Bh)y \\ + A''h^2 + 2C''h + F \end{array}\right\} = 0$$

als Gleichung des Durchschnittes, bezogen auf ein in der schneidenden Ebene liegendes rechtwinkeliges Coordinatensystem ergibt. Wie man sieht, sind die Coefficienten A, A', $2B$ der Glieder der 2ten Ordnung von h unabhängig. Nun kommt es bekanntlich nur auf das Zeichen der Grösse $B''^2 - AA'$ an, ob die letzte Gleichung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel bedeute; ferner hängt die Richtung der Axen der Curve, so wie — wenn die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel angehört, — das Verhältniss derselben bloss von den genannten drei Coefficienten ab, wie aus Gl. 16, §. 196 und Gl. 28, §. 200 sogleich erhellt. Durch diese Bemerkungen gelangt man zu dem Satze: dass, wenn eine krumme Fläche 2ter Ordnung durch eine Folge paralleler Ebenen geschnitten wird, die entstehenden Durchschnittslinien unter sich ähnliche Linien der 2ten Ordnung sind, deren gleichnamige Axen einander parallel liegen; wobei, wie bekannt, in einer Folge von Ellipsen auch der Kreis und Punkt, in einer Folge von Hyperbeln zwei sich schneidende Gerade, in einer Folge von Parabeln zwei parallele Gerade oder eine einzige Gerade erscheinen können.

Man sieht leicht ein, dass man in Folge dieses Satzes bei der Untersuchung der ebenen Schnitte der Flächen 2ter Ordnung sich auf solche beschränken könne, welche durch den Ursprung geführt werden.

305. Betrachten wir zuerst die mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen, deren Gleichung die Form hat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Wir wollen voraussetzen, dass zwischen den Quadraten der drei Halbaxen mit Rücksicht auf ihre Zeichen, die Relation:

$$a^2 > b^2 > c^2$$

bestehe, welche Voraussetzung nöthigenfalls durch Vertauschung der Axen immer erfüllt werden kann, und wobei a^2 immer positiv ist.

Schneiden wir nun diese Fläche durch eine durch den Ursprung — zugleich Mittelpunkt — gelegte Ebene, deren Knotenlinie in der Ebene der xy mit der Axe der x den Winkel φ einschliesst, und welche gegen die xy-Ebene unter dem Winkel θ geneigt ist. Wir erhalten unter Anwendung der Ausdrücke (m), §. 274, als Gleichung des Schnittes, bezogen auf ein in der schneidenden Ebene liegendes Coordinaten-

system der $x'y'$, dessen x'-Axe die oben erwähnte Knotenlinie ist:

$$\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \alpha' y'^2 = a^2b^2c^2, \qquad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= c^2(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2), \\ \beta &= c^2(a^2 - b^2) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta, \\ \alpha' &= c^2(a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2) \cos\theta^2 + a^2b^2 \sin\theta^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ist. Es hängt nun die Natur des Schnittes von der Differenz:

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = - a^2b^2c^2 [(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) \sin\theta^2 + c^2 \cos\theta^2)] \qquad (4)$$

ab, welche wir für jede der drei Flächen besonders betrachten wollen.

I. Im **Ellipsoide** sind die drei Grössen a^2, b^2, c^2 positiv, folglich ist die Differenz $\beta^2 - \alpha\alpha'$ **wesentlich negativ**, daher diese Fläche nur in Ellipsen geschnitten werden kann. — Von Interesse ist hier die Frage, ob die elliptischen Schnitte bei einer gewissen Lage der schneidenden Ebene nicht in kreisförmige übergehen können? Zu diesem Behufe muss in (2) $\beta = 0$ und $\alpha = \alpha'$ werden; wir haben also den Bedingungsgleichungen:

$$(a^2 - b^2) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta = 0, \text{ und}$$

$$c^2(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) = c^2(a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2) \cos\theta^2 + a^2b^2 \sin\theta^2$$

zu genügen, welche, wenn die Halbaxen a, b, c von einander verschieden sind, nur folgende drei Auflösungen zulassen:

$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{1}{2}\pi$	$\theta = \frac{1}{2}\pi$
$\sin\theta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2}}$	$\sin\theta = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$	$\sin\varphi = \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$

Hievon sind, in Folge der Relation $a^2 > b^2 > c^2$ die 1[te] und 3[te] Auflösung unzulässig, weil sie beziehungsweise $\sin\theta$ imaginär, und $\sin\varphi > 1$ geben; die aus der Annahme $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ folgenden zwei Werthe von $\sin\theta$, nämlich $\pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ sind aber reell und < 1; es gibt daher immer **zwei Folgen paralleler Ebenen**, welche das Ellipsoid **in Kreisen** schneiden; wegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stehen diese Ebenen senkrecht auf der Ebene xz, sind also parallel zur Axe $2b$ des Ellipsoides, d. h. zur mittleren Axe desselben.

II. Für das **Hyperboloid mit einer Hölung** ist in obigen Gleichungen c^2 negativ, somit

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = a^2b^2c^2 [(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) \sin\theta^2 - c^2 \cos\theta^2]; \qquad (5)$$

der Schnitt ist eine **Ellipse** oder **Hyperbel**, je nachdem $\beta^2 - \alpha\alpha'$ negativ oder positiv, d. h. je nachdem, dem Zahlenwerthe nach:

$$\operatorname{tg}\theta < \text{ oder } > \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}$$

ist. — Auf ganz ähnliche Weise, wie beim Ellipsoide findet man, dass zwei Systeme von Ebenen, welche zur grösseren der beiden reellen Axen des Hyperboloides parallel und gegen die Ebene der xy unter den durch die Gl. $\sin\theta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$ bestimmten Winkeln geneigt sind, das Hyperboloid in Kreisen schneiden.

Es erübriget noch die Untersuchung derjenigen Schnitte, welche aus der Annahme $\beta^2 - \alpha\alpha' = 0$, d. i.:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}} \qquad (n)$$

hervorgehen. Es ist aber nach (3), c^2 negativ nehmend:

$$\alpha = -c^2(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2),\quad \beta = -c^2(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\alpha' = \cos\theta^2[-c^2(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2) + a^2b^2\operatorname{tg}\theta^2];$$

der Ausdruck von α' nimmt, wenn man für $\operatorname{tg}\theta$ obigen Werth (n) substituirt, die Grösse in den Klammern auf einerlei Nenner bringt und im Zähler das Glied $a^2b^2\cos\varphi^4$ nach Potenzen von $\sin\varphi$ auflöst, die Form an:

$$\alpha' = -c^2\frac{(a^2 - b^2)^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 \cos\theta^2}{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}.$$

Durch Einführung dieser Werthe von α, β und α' in die Gl. (2) wird der erste Theil der Gleichung ein vollständiges Quadrat, und wir erhalten nach Ausziehung der Wurzel, als Gleichung des Schnittes:

$$\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}\,.\,x + \frac{(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}}\,.\,y = \pm ab,$$

welche zwei parallelen Geraden angehört. Vermöge des doppelten Zeichens von $\operatorname{tg}\theta$ in Gl. (n) entsprechen also jedem Werthe von φ zwei durch den Mittelpunkt gehende und gegen die Ebene der xy gleich geneigte Ebenen, welche das Hyperboloid mit einer Hölung in geraden Linien schneiden. Wir werden diese Geraden in §. 307 noch einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Parabolische Schnitte entstehen endlich, wenn die schneidenden Ebenen parallel sind zu einer von jenen durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen, von welchen das Hyperboloid in zwei parallelen Geraden geschnitten wird.

III. Für das Hyperboloid mit zwei Hölungen haben wir in den Glgn. (1) bis (4) b^2 und c^2 negativ zu nehmen und erhalten somit:

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = - a^2b^2c^2[(a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2)\sin\theta^2 - c^2 \cos\theta^2]$$
$$= \quad a^2b^2c^2[(b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2)\sin\theta^2 + c^2 \cos\theta^2].$$

Diese Grösse ist für jeden Werth von θ positiv, wenn $b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2 > 0$, d. i. $\operatorname{tg}\varphi < b : a$ ist, oder die Durchschnittslinie der schneidenden und der xy-Ebene innerhalb des Asymptotenwinkels des in dieser coordinirten Ebene befindlichen Hauptschnittes liegt; diese Schnitte sind also Hyperbeln. Ist aber $\operatorname{tg}\varphi > b : a$, so begegnet die schneidende Ebene dem Hyperboloide in Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem

$$\operatorname{tg}\theta < \text{oder} > \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2}};$$

in Parabeln endlich, wenn

$$\text{entweder } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \text{ und } \theta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a} \text{ und } \operatorname{tg}\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2}}$$

ist. In geraden Linien kann diese Fläche nicht geschnitten werden, was schon daraus erhellt, dass dieselbe aus zwei getrennten Theilen besteht.

In Kreisen wird dieses Hyperboloid von Ebenen geschnitten, welche zur grösseren der beiden imaginären Axen parallel und gegen die reelle Axe unter einem Winkel geneigt sind, dessen Sinus

$$= \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}}$$

ist, wobei $b < c$ vorausgesetzt ist.

306. Die Flächen ohne Mittelpunkt sind in der Gleichung:

$$p'y^2 + pz^2 - pp'x = 0 \tag{1}$$

begriffen, welche unmittelbar dem elliptischen Paraboloide angehört, und sich durch Aenderung des Zeichens von p' in jene des hyperbolischen verwandelt; durch Substitution der Ausdrücke (m), §. 274, erhalten wir:

$$\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \alpha' y'^2 + \gamma x' + \delta y' = 0 \tag{2}$$

als Gleichung der Durchschnittslinie, und man findet:

$\alpha = p' \sin\varphi^2$, $\beta = p' \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta$, $\alpha' = p' \cos\varphi^2 \cos\theta^2 + p \sin\theta^2$, $\gamma = - pp' \cos\varphi$, $\delta = pp' \sin\varphi \cos\theta$, womit sich

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = - pp' \sin\varphi^2 \sin\theta^2$$

ergibt.

I. Das elliptische Paraboloid, auf welches diese Ausdrücke sich unmittelbar beziehen, wird, da die Grösse $\beta^2 - \alpha\alpha'$ wesentlich negativ, im Allgemeinen in Ellipsen geschnitten; nur wenn φ oder $\theta = 0$, d. i. wenn die schneidende Ebene parallel ist zur Axe der Fläche, werden die Schnitte Parabeln. — In Hyperbeln kann diese Fläche nicht geschnitten werden; eben so wenig in geraden Linien, da sie bekanntlich nur nach einer Seite ins Unendliche sich erstreckt. — In Kreisen wird die Fläche von zwei Folgen paralleler Ebenen geschnitten, welche senkrecht stehen auf jenem parabolischen Hauptschnitte, welchem der kleinere Parameter entspricht und gegen die Ebene des anderen parabolischen Hauptschnittes unter Winkeln geneigt sind, deren Sinus $= \pm\sqrt{\frac{p}{p'}}$ ist, unter p' den grösseren Parameter verstanden.

II. Für das hyperbolische Paraboloid ist in obigen Ausdrücken p' negativ zu nehmen, wodurch die Grösse $\beta^2 - \alpha\alpha' = pp' \sin\varphi^2 \sin\theta^2$ wesentlich positiv wird.

Auf dieser Fläche kann daher keine Ellipse also auch kein Kreis verzeichnet werden. So lange φ und θ von Null verschieden sind, ist der Schnitt eine Hyperbel, welche jedoch für $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die schneidende Ebene mit der yz-Ebene zusammenfällt, in ein System zweier im Ursprunge sich schneidenden Geraden übergeht, deren Neigungswinkel gegen die Axe der y die Grösse $\pm\sqrt{\frac{p'}{p}}$ zur trigonometrischen Tangente hat, weil für die genannten Werthe von φ und θ die Gl. (2) des Schnittes in $py'^2 - p'x'^2 = 0$ sich verwandelt.

Damit der Schnitt eine Parabel werde, muss φ oder $\theta = 0$, d. h. die schneidende Ebene parallel sein zur Axe der x. Die Annahme $\theta = 0$ führt auf den in der xy Ebene liegenden parabolischen Hauptschnitt. Für $\varphi = 0$ folgt aus (2):

$$(p \sin\theta^2 - p' \cos\theta^2)\, y'^2 + pp'x' = 0$$

als Gleichung der Parabel, in welcher eine durch die x-Axe gelegte Ebene dem Paraboloide begegnet, und deren Aeste sich nach der Richtung der positiven oder negativen x erstrecken, je nachdem die Grösse $p \sin\theta^2 - p' \cos\theta^2$ negativ oder positiv ist, d. h. je nachdem

$$\operatorname{tg}\theta < \text{ oder } > \sqrt{\frac{p'}{p}}$$

ist. Für $\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{p'}{p}}$ geht die obige Gleichung über in $x' = 0$, d. i.

in die Gl. der jetzigen Axe der y', welche, da für $\varphi = 0$ die Axe der x' mit jener der x zusammenfällt, in der yz-Ebene liegt. Diese beiden geradlinigen Schnitte sind daher dieselben, welche schon oben durch den Schnitt unserer Fläche durch die yz-Ebene erhalten wurden.

307. Wir haben gesehen, dass das Hyperboloid mit einer Hölung und das hyperbolische Paraboloid von Ebenen in geraden Linien geschnitten, oder mit anderen Worten, dass auf diesen krummen Flächen gerade Linien gezogen werden können. Wir wollen nun diese Geraden noch einer näheren Untersuchung unterziehen.

Die Gleichung des Hyperboloides mit einer Hölung ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Irgend eine auf die Ebene der xy senkrechte Ebene, deren Gleichung

$$y = mx + \mu \qquad (2)$$

sein mag, wird das Hyperboloid im Allgemeinen in einer Linie des 2ten Grades schneiden, deren in der Ebene der xy liegende horizontale Projection die durch die Gl. (2) ausgedrückte Gerade ist, und deren Projection auf die Ebene xz:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{a^2b^2}\left[(a^2m^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2m\mu x + a^2(\mu^2 - b^2)\right] \qquad (3)$$

sich durch Elimination von y aus (1) und (2) ergibt. Soll nun der Schnitt ein geradliniger sein, so muss auch diese Projection desselben geradlinig sein und somit die Gl. (3) in zwei Gleichungen vom 1ten Grade sich zerfällen lassen. Hiezu wird erfordert, dass, da der 1te Theil ein vollständiges Quadrat ist, auch der 2te Theil ein solches sei, zu welchem Behufe zwischen den noch willkürlichen Grössen m und μ die Relation:

$$(a^2m^2 + b^2)(\mu^2 - b^2) = a^2m^2\mu^2$$

bestehen muss, aus welcher $\mu = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ folgt. Substituiren wir daher diesen immer reellen Werth in (2) und (3), so erhalten wir:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}\ \ldots (4),\quad \pm\frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab}\,x + \frac{am}{b}\ldots (5)$$

als Gleichungen einer Geraden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Fläche des Hyperboloides liegt*)

---

*) **Anmerk.** Um diese Gleichungen für das Ellipsoid oder Hyperpoloid mit zwei Hölungen umzugestalten, dürfte man nur beziehungsweise $c\sqrt{-1}$ statt c, oder $b\sqrt{-1}$ statt b schreiben; in beiden Fällen hören sie auf reell zu sein, daher auf diesen Flächen keine Geraden gezogen werden können.

Das Radikal kann man in diesen Gleichungen entweder positiv oder negativ nehmen, nur muss es in beiden mit demselben Zeichen versehen werden.

Aus der Unbestimmtheit der Grösse m in den Glgn. (5) erhellt nun sogleich, dass auf unserer Fläche unendlich viele Gerade gezogen werden können, deren wesentlichste Eigenschaften folgende sind:

1) Aus der Gl. (4) folgt, dass die horizontalen Projectionen derselben sämmtlich Tangenten sind an der Kehlellipse des Hyperboloides; denn die Elimination von y aus (4) und der Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ der Kehlellipse führt auf eine Gleichung nach x vom 2ten Grade, deren beide Wurzeln gleich sind, zum Beweise, dass die Gerade (4) die Kehlellipse nur in einem Punkte trifft, also berührt. Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass die vertikalen Projectionen der Geraden auf die Ebenen der xz und yz Tangenten sind an den respektiven hyperbolischen Hauptschnitten des Hyperboloides.

2) Schneidet man den Asymptotenkegel des Hyperboloides, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ist, durch die durch die Axe der z gehende Ebene $y = mx$, so erhält man als Projection des Durchschnittes auf die Ebene der xz:

$$\pm \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab} x;$$

es sind also:

$$y = mx, \quad \pm \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab} x$$

die Gleichungen einer der erzeugenden Geraden dieses Kegels, und man erkennt aus der Vergleichung derselben mit den Glgn. (4) und (5), dass die Geraden des Hyperboloides mit den erzeugenden Geraden des Asymptotenkegels parallel laufen.

3) Da, wie man leicht einsieht, irgend drei der erzeugenden Geraden dieses Kegels nicht in einer Ebene liegen, so folgt aus 2), dass irgend drei Gerade auf dem Hyperboloide nie zu einer und derselben Ebene parallel sein können.

4) Vermöge des doppelten Zeichens in Gl. (5) haben immer je zwei auf dem Hyperboloide gezogene Gerade eine gemeinschaftliche horizontale Projection (4); irgend zwei dieser Geraden sind:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab} x + \frac{am}{b}, \qquad (A)$$

und

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad -\frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab}x + \frac{am}{b}. \qquad (B)$$

Hiedurch sondern sich sämmtliche Gerade, welche auf dem Hyperboloide gezogen werden können, in zwei Systeme (A) und (B).

5) Irgend zwei Gerade desselben Systemes liegen nicht in einer und derselben Ebene, schneiden sich also nicht. Denn sind

$$y = mx + \sqrt{u^2m^2 + b^2}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab}x + \frac{am}{b},$$

und

$$y = m'x + \sqrt{a^2m'^2 + b^2}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m'^2 + b^2}}{ab}x + \frac{am'}{b}$$

zwei Gerade aus dem Systeme (A), so findet man als Bedingungsgleichung für den Durchschnitt [§. 260, 1.)]: $(m - m')^2 = 0$, welche, so lange die beiden Geraden von einander verschieden sind, offenbar nicht erfüllt ist. Für zwei Gerade, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers der Kehlellipse gehen, hätte man allerdings $m = m'$ [§. 215]; allein damit obige Gleichungen zwei solche Gerade repräsentiren, müsste $m = m'$ und das Radikal in beiden mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden, in welcher Form sie als Bedingung für den Durchschnitt die Gleichung $a^2m^2 + b^2 = 0$ liefern, welche ebenfalls durch keinen Werth von m erfüllt werden kann. — Dasselbe gilt natürlich für das System (B).

6) Jede Gerade des einen Systemes schneidet hingegen alle Geraden des anderen Systemes. Denn eliminirt man aus den Gleichungen (A) und (B), nachdem in letzteren der Allgemeinheit wegen m' statt m gesetzt worden, x, y und z, so erhält man eine identische Gleichung.

7) Lässt man in den Gleichungen (A) m sich stetig verändern, oder mit anderen Worten diese Gerade sich stetig bewegen, so beschreibt sie dabei offenbar die krumme Fläche des Hyperboloides mit einer Hölung.*) Diese gehört somit zur Familie der geradlinigen oder Regelflächen und insbesondere zu den windschiefen Flächen [§. 284], weil vermöge 5) je zwei aufeinanderfolgende Positionen der erzeugenden Geraden nicht in einer Ebene liegen.

*) Anmerk. In der That erhält man die Gl. des Hyperboloides, wenn man aus den Gleichungen (A) oder jenen (B) die Grösse m eliminirt, durch welche die Lage der erzeugenden Geraden bestimmt ist.



Da ferner eine erzeugende Gerade aus dem Systeme (A) in jeder ihrer Lagen alle Geraden des Systemes (B) schneidet und das Bewegungsgesetz einer Geraden durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt ist [§. 284], so folgt mit Rücksicht auf 3), dass das Hyperboloid mit einer Hölung durch die Bewegung einer Geraden beschrieben wird, welche sich beständig auf drei nicht zu einer und derselben Ebene parallele Gerade stützt.

Weil übrigens die erzeugende Gerade auch aus dem Systeme (B) und die Leitlinien aus jenem (A) gewählt werden können, so kann jedes Hyperboloid mit einer Hölung auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden.

308. Betrachten wir nun die geraden Linien, welche auf dem hyperbolischen Paraboloide gezogen werden können, welche Fläche durch die Gleichung

$$p'y^2 - pz^2 = pp'x \qquad (1)$$

dargestellt ist. Schneiden wir diese Fläche durch eine auf die Ebene der xy senkrechte Ebene: $y = mx + \mu \ldots (2)$, so erhalten wir durch Elimination von x als Gl. der Projection des Schnittes auf die Ebene der yz:

$$\frac{p}{p'} z^2 = y^2 - \frac{p}{m} y + \frac{p\mu}{m}, \qquad (3)$$

welche wieder, wenn der Schnitt ein geradliniger sein soll, in zwei Gleichungen vom 1ten Grade zerfallen muss, wozu erfordert wird, dass der zweite Theil ein vollständiges Quadrat sei. Als Bedingung hiefür haben wir $\frac{p\mu}{m} = \frac{p^2}{4m^2}$ zu setzen, woraus $\mu = \frac{p}{4m}$ folgt. Durch Substitution dieses Werthes in die Glgn. (2) und (3) erhalten wir:

$$y = mx + \frac{p}{4m} \ldots . (4), \quad \pm z = \sqrt{\frac{p'}{p}} . y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m} \ldots . (5)$$

für die gesuchten Gleichungen einer Geraden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Fläche des Paraboloides liegt. Für die Projection derselben auf die Ebene der xz findet man leicht:

$$\pm z = m\sqrt{\frac{p'}{p}} . x - \frac{\sqrt{pp'}}{4m}.$$

Diese Gleichungen sind nun immer reell, und da die Grösse m willkürlich ist, so lassen sich auf dem hyperbolischen Paraboloide unendlich viele gerade Linien ziehen.

1) In Folge des doppelten Zeichens in (5) haben je zwei dieser Geraden immer eine gemeinschaftliche horizontale Projection, wodurch sich dieselben in zwei Systeme (*A*) und (*B*) scheiden; jene des einen Systemes sind durch die Gleichungen:

$$y = mx + \frac{p}{4m}, \quad + z = \sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m}, \qquad (A)$$

jene des anderen Systemes durch die Gleichungen:

$$y = mx + \frac{p}{4m}, \quad - z = \sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m}, \qquad (B)$$

repräsentirt.

2) Die horizontalen Projectionen sämmtlicher Geraden sind Tangenten an dem horizontalen Hauptschnitte $y^2 = px$ der Fläche, die vertikalen xz-Projectionen Tangenten an dem vertikalen Hauptschnitte $z^2 = -px$; man überzeugt sich hievon auf die bekannte Weise, wenn man die Gleichungen (4) und (6) mit jenen der respektiven Hauptschnitte verbindet.

3) Da der Coefficient von y in (5) eine constante von m unabhängige Grösse ist, so sind die yz-Projectionen der Geraden des Systemes (*A*) unter sich und zu der Geraden:

$$z = + \sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y, \qquad (7)$$

in welcher das Paraboloid von der Ebene der yz geschnitten wird, parallel. Es müssen daher auch die projicirenden Ebenen unter sich parallel sein, woraus folgt, dass sämmtliche Gerade des Systems (*A*) parallel sind zu der durch die Gl. (7) dargestellten Ebene. Diese Ebene, oder eine zu ihr parallele heisst die Richtebene der Geraden des Systemes (*A*).

Auf dieselbe Weise findet man, dass sämmtliche Gerade des Systemes (*B*) zur Richtebene:

$$z = - \sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y \qquad (8)$$

parallel laufen. — Beide Richtebenen sind, wie man sieht, senkrecht auf der yz-Ebene und schneiden sich daher in der Axe der Fläche, oder in einer zu dieser parallelen Geraden.

So wie im vorigen §. beweist man auch hier, dass

4) irgend zwei Gerade desselben Systemes nicht in einer und derselben Ebene liegen, sich also niemals schneiden; und dass im Gegentheile

5) **j e d e G e r a d e d e s e i n e n S y s t e m e s a l l e G e r a d e n d e s a n d e r e n S y s t e m e s s c h n e i d e t.**

6) Betrachtet man wieder das hyperbolische Paraboloid als den geometrischen Ort dieser Geraden und berücksichtiget man, dass die Bewegung einer geraden Linie durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt ist, so ergibt sich hieraus eine doppelte Erzeugungsart dieser krummen Fläche:

a) Durch Bewegung einer Geraden [etwa aus dem Systeme (A)], welche sich beständig auf drei zu einer gegebenen Ebene parallele Gerade [aus dem Systeme (B)] stützt.

b) Durch Bewegung einer Geraden [etwa aus dem Systeme (A)], welche an zwei gegebenen nicht in derselben Ebene liegenden Geraden [aus dem Systeme (B)] fortgleitet und dabei einer gegebenen Ebene (Richtebene) beständig parallel bleibt. (Vergl. §. 284. II. Beisp.)

Auch diese Fläche gehört demnach zu den geradlinigen und insbesondere windschiefen Flächen, da vermöge 4) je zwei aufeinander folgende Positionen der erzeugenden Geraden nicht in einer und derselben Ebene liegen. Beide Erzeugungsarten lassen sich übrigens bei jedem Paraboloide auf zweifache Weise ausführen, je nachdem die erzeugende Gerade aus dem einen oder anderen Systeme gewählt wird.

NÄHERE BESTIMMUNG DER DURCH EINE GEGEBENE GLEICHUNG DES 2ten GRADES AUSGEDRÜCKTEN FLÄCHE.

309. Ist eine Gleichung des 2ten Grades zwischen drei Veränderlichen mit **b e s t i m m t e n** Coefficienten gegeben, so entsteht die Frage, welche der bisher betrachteten Flächen durch dieselbe ausgedrückt werde? Mit der Beantwortung derselben wollen wir uns zum Schlusse dieses Kapitels beschäftigen.

Die vorgelegte Gleichung sei:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{array}\right\} = 0. \quad (1)$$

Wir untersuchen zunächst, ob die Fläche einen Mittelpunkt besitze. Die Coordinaten ξ, η, ζ desselben ergeben sich bekanntlich [§. 288] durch Auflösung der Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A\xi + B''\eta + B'\zeta + C = 0 \\ A'\eta + B''\xi + B\zeta + C' = 0 \\ A''\zeta + B'\xi + B\eta + C'' = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

und deren allgemeine Ausdrücke sind:

$$\xi = \frac{V}{\Delta}, \quad \eta = \frac{V'}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{V''}{\Delta},$$

wo

$$\Delta = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' \qquad (3)$$

ist, und V, V', V'' die in §. 288 angeführten Ausdrücke bezeichnen, welche wir nicht weiter benöthigen, da es in jedem einzelnen Falle einfacher ist, die Glgn. (2) unmittelbar aufzulösen.

Bei der Auflösung dieser Gleichungen können nun folgende drei Fälle eintreten:

1) Es ergeben sich für ξ, η, ζ endliche und bestimmte Werthe; die Grösse Δ muss dann nothwendig von 0 verschieden sein, und die Fläche hat in diesem Falle **einen** Mittelpunkt.

2) Die Elimination führt auf einen Widerspruch; dies tritt ein, wenn $\Delta = 0$ und die Zähler V, V', V'' von Null verschieden sind; die Fläche hat dann keinen Mittelpunkt;

3) die Elimination führt auf eine identische Gleichung, was dann eintritt, wenn die Gleichungen (2) unbestimmt, d. i. nicht sämmtlich von einander verschieden sind, sondern sich auf zwei, oder gar nur eine einzige reduciren. In diesem Falle verschwinden nebst Δ auch noch die Zähler V, V', V'' und es existiren unendlich viele Mittelpunkte.

Wir wollen nun diese Fälle der Reihe nach betrachten.

I. Fall: $\Delta \gtrless 0$.

Verlegt man den Ursprung, ohne die Richtung der Axen zu ändern, in den Mittelpunkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ durch die Auflösung der Glgn. (2) schon bekannt sind, so nimmt die Gl. (1) der Fläche folgende Form an [§. 288]:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H, \qquad (4)$$

wo

$$H = -C\xi - C'\eta - C''\zeta - F \qquad (5)$$

ist, und mittelst der bekannten Werthe von ξ, η, ζ leicht gerechnet werden kann.

Ergibt sich $H = 0$, so ist die Gl. (4) in Bezug auf x, y, z homogen und gehört demnach einer **Kegelfläche** an, oder auch einem **Punkte**, was man leicht dadurch unterscheidet, dass man untersucht, ob ein Schnitt durch eine Ebene, etwa $z = h$, reell oder imaginär ausfällt.

Ist aber H von Null verschieden, so kann die Gleichung nur einem Ellipsoide, oder einem der beiden Hyperboloide angehören, drei Flächen,

welche sich bekanntlich durch die Anzahl ihrer reellen Axen unterscheiden. Wir wollen daher diese durch die Coefficienten der Glgn. (4) zu bestimmen suchen.

Es seien

$$x = mz, \quad y = nz$$

die Gleichungen einer durch den Ursprung (Mittelpunkt) gehenden Geraden, welche die Fläche in einem (reellen oder imaginären) Punkte x, y, z treffen wird, dessen Radiusvektor R durch die Gleichung

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (m^2 + n^2 + 1)\, z^2$$

bestimmt ist. Die Verbindung der Gleichungen $x = mz$, $y = nz$ mit der Gl. (4) der Fläche durch Elimination von x und y gibt aber für diesen Durchschnittspunkt:

$$z^2 = \frac{H}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn},$$

wodurch

$$R^2 = \frac{H(m^2 + n^2 + 1)}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn}$$

wird. Bekanntlich sind aber die Axen der Flächen nichts anderes als die von den Flächen begrenzten Durchschnittslinien der Hauptebenen; der Radiusvektor R wird daher in eine der drei Axen übergehen, wenn wir m und n so bestimmen, dass er mit einer dieser Durchschnittslinien zusammenfällt, oder mit anderen Worten, zu einer der drei Hauptrichtungen parallel werde; diese Grössen müssen zu diesem Ende den Gleichungen (12) des §. 290:

$$\begin{aligned} Am + B''n + B' &= ms \\ A'n + B''m + B &= ns \\ A'' + B'm + Bn &= s \end{aligned}$$

Genüge leisten, wo s bekanntlich durch die Gleichung:

$$s^3 - (A + A' + A'')s^2 - (B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA')s + \Delta = 0 \quad (6)$$

bestimmt wird. Addirt man nun diese drei Gleichungen, nachdem man die 1te mit m, die 2te mit n multiplizirt hat, so erscheint links vom Gleichheitszeichen der Nenner des obigen Ausdruckes von R^2, nach dessen Substitution:

$$R^2 = \frac{H}{s} \quad (7)$$

wird, welche Gleichung sofort die Werthe der drei Halbaxen darbietet, sobald man darin für s die drei Wurzeln der Gl. (6) substituirt. Diese Werthe fallen nun, wie man sieht, reell oder imaginär aus, je nach-

dem die Grösse $\frac{H}{s}$ positiv oder negativ sich ergibt. Da nun das Zeichen von H aus (5) bekannt ist, so bedarf man nur noch der Kenntniss der Zeichen der Wurzeln der Gl. (6); diese Gleichung lässt aber bekanntlich nur reelle Wurzeln zu und hat daher — gemäss der Cartesischen Zeichenregel — genau so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel.

Die vorgelegte Gleichung gehört endlich einem Ellipsoide, einem Hyperboloide mit einer, oder einem solchen mit zwei Hölungen, je nachdem diese Untersuchung drei, zwei, oder nur eine Axe als reell zu erkennen gibt. — Erscheinen alle drei Axen imaginär, so ist es auch die Fläche, und die vorgelegte Gleichung ermangelt dann einer geometrischen Bedeutung.

Beispiel. Die vorgelegte Gleichung sei:

$$x^2 - 2y^2 + xz - 2x + 4y + 7 = 0;$$

die Gleichungen des Mittelpunktes werden:

$$2x + z - 2 = 0, \quad -y + 1 = 0, \quad x = 0,$$

aus welchen für den Mittelpunkt die endlichen und bestimmten Coordinatenwerthe:

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2$$

folgen. Hiemit wird $H = -9$; die cubische Gleichung lautet:

$$s^3 + s^2 - \tfrac{9}{4}s - \tfrac{1}{2} = 0$$

mit 1 Zeichenwechsel, folglich mit einer positiven und zwei negativen Wurzeln; da nun H negativ, so sind zwei Axen reell und die Fläche ist ein Hyperboloid mit einer Hölung.

II. Fall: $\Delta = 0$,

und die Mittelpunktsgleichungen widersprechend.

Die durch die Gl. (1) dargestellte Fläche hat in diesem Falle keinen Mittelpunkt, und kann daher nur eines der beiden Paraboloide oder ein parabolischer Cylinder sein, welche Flächen durch die Hauptschnitte, in welchen die Fläche (1) von den coordinirten Ebenen geschnitten wird, leicht unterschieden werden, wenn wir folgende Punkte beachten.

1) Die besagten Hauptschnitte werden durch die Zeichen ihrer charakteristischen Binome:

$$B^2 - A'A'' = \delta, \quad B'^2 - AA'' = \delta', \quad B''^2 - AA' = \delta''$$

als Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln (mit ihren Varietäten) charakterisirt, je nachdem diese Binome negativ, positiv oder Null sind.

2) Das elliptische Paraboloid kann bekanntlich nicht in Hyperbeln, das hyperbolische nicht in Ellipsen geschnitten werden; diese Binome werden daher nothwendig einerlei Zeichen haben, können jedoch auch zum Theil oder alle $= 0$ sein.

3) Da die Axe eines Paraboloides nicht zu allen drei coordinirten Ebenen parallel sein kann, und diese Flächen bekanntlich nur von zur Axe parallelen Ebenen in Parabeln geschnitten werden können, so muss, soll die Fläche (1) einem Paraboloide angehören, mindestens eines der drei Binome von 0 verschieden sein, und das Zeichen dieses Binoms — ob negativ oder positiv — entscheidet für das elliptische oder hyperbolische Paraboloid.

4) Ein parabolischer Cylinder kann nur in Parabeln und geraden Linien geschnitten werden; für diese Fläche müssen daher alle drei Binome verschwinden.

Beisp. 1) Die gegebene Gleichung sei:

$$3x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy - 2yz + 2x - 1 = 0;$$

man findet als Gleichungen des Mittelpunktes:

$$3x + 3y + 1 = 0; \quad 4y + 3x - z = 0; \quad z - y = 0;$$

die Differenz der beiden ersten Gleichungen ist: $y - z - 1 = 0$ und widerspricht der dritten Gleichung: $y - z = 0$; da ferner $\delta = B^2 - A'A'' = -3$ negativ ist, so ist die vorgelegte Fläche ein elliptisches Paraboloid.

Beisp. 2) Aus der Gleichung [§. 284]:

$$bxz - ayz + \beta x - \alpha y = 0$$

folgen die Gleichungen des Mittelpunktes:

$$bz + \beta = 0, \quad az + \alpha = 0, \quad bx - ay = 0,$$

von welchen die beiden ersten einen Widerspruch enthalten; ferner ist $\delta = \frac{1}{4} a^2$ positiv; die Gl. gehört daher zu einem hyperbolischen Paraboloide.

III. Fall: $\Delta = 0$,

und die Mittelpunktsgleichungen unbestimmt.

Dieser Fall wurde bereits in §. 288 [3) a) und b)] vollständig erörtert. Man hat nur zu untersuchen, ob die Mittelpunktsgleichungen sich auf zwei oder nur auf eine Gleichung reduciren.

Im 1ten Falle bedeutet die Gleichung einen elliptischen oder hyperbolischen Cylinder; und da ein Cylinder nicht gleichzeitig von jeder der drei coordinirten Ebenen in zwei parallelen Geraden geschnitten werden

kann, so muss mindestens eines der Binome δ, δ', δ'' von Null verschieden sein, dessen Zeichen zugleich die beiden Cylinder auf bekannte Weise von einander unterscheidet.

Im 2ten Falle bedeutet die Gleichung ein System zweier paralleler Ebenen, und die drei Binome werden sämmtlich der Nulle gleich.

In beiden Fällen kann übrigens der Ort der Gl. (1) imaginär sein; beide Cylinder können in eine Gerade, der hyperbolische in zwei sich schneidende Ebenen, und das System der zwei parallelen Ebenen in eine einzige Ebene degeneriren. Ein oder zwei zu den coordinirten Ebenen parallel geführte Schnitte geben hierüber ohne Schwierigkeit die nöthige Auskunft.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei:

$$4x^2 + 2z^2 + 4xy - 6xz - 2yz - 12y + 6z - 1 = 0;$$

die Gleichungen des Mittelpunktes:

$$4x + 2y - 3z = 0; \quad 2x - z - 6 = 0; \quad -3x - y + 2z + 3 = 0;$$

sind unbestimmt und reduciren sich auf zwei, da die aus zweien derselben gezogenen Werthe von x und y die 3te Gleichung für jeden Werth von z identisch machen. Die Gleichung gehört also einem Cylinder an und zwar einem hyperbolischen, da $\delta = B^2 - A'A'' = 1$ positiv ist, und der Schnitt durch die Ebene der xy die reelle Hyperbel: $4x^2 + 4xy - 12y - 1 = 0$ darbietet. Man kann die gegebene Gleichung auf die Form:

$$y - \tfrac{1}{2}z = \frac{4(x - \frac{1}{2}z)^2 - 1}{12 - 4(x - \frac{1}{2}z)}$$

bringen und erkennt in dieser sogleich die für cylindrische Flächen charakteristische Gleichungsform: $y - bz = \varphi(x - az)$ [§. 277].

